EUCLIDE

*

CLASSICI
U. T. E. T.

GLI ELEMENTI

di

Euclide

A CURA DI

ATTILIO FRAJESE e LAMBERTO MACCIONI

UNIONE TIPOGRAFICO-EDITRICE TORINESE

INTRODUZIONE

Euclide, questo sconosciuto!

Può sembrare strano che proprio con questa esclamazione venga introdotta una nuova edizione italiana degli *Elementi*, l'opera di questo «sconosciuto» che ha valicato i secoli.

Ma effettivamente, di Euclide come persona sappiamo poco o nulla, sicché è assolutamente impossibile fornire di lui al lettore una sorta di biografia.

Ciò che su Euclide può dirsi è strettamente legato alla sua opera maggiore, gli *Elementi*, cioè a questa vasta trattazione della matematica elementare greca; della geometria anzitutto, ma anche dell'aritmetica e dell'algebra. E poiché la parola «Elementi» corrisponde a quella greca στοιχεῖα diciamo subito che a Euclide venne dato nell'antichità l'epiteto di στοιχειωτής cioè di «compositore degli Elementi». O, se si vuole, di «uomo degli Elementi».

Essi, come s'è detto, offrono un panorama della matematica elementare greca: aggiungiamo che nello sviluppo di questa rappresentano al tempo stesso un punto d'arrivo e un punto di partenza.

Occorre dire che, come si vedrà, gli *Elementi* furono composti intorno al 300 avanti Cristo. E poiché la matematica greca ebbe inizio intorno al 600 avanti Cristo, con Talete di Mileto che *trasportò* la geometria dall'Oriente in Grecia, gli *Elementi* di Euclide costituiscono anzitutto il punto d'arrivo di un periodo di elaborazione trisecolare della matematica, in particolare della geometria. E gli *Elementi* dominano talmente la scena, che quel periodo trisecolare, che possiamo schematicamente fissare dal 600 al 300 avanti Cristo, si suol chiamare periodo della geometria pre-euclidea, o più semplicemente periodo pre-euclideo.

Inutile quindi cercare l'originalità vera e propria negli *Elementi* di Euclide: quest'opera, infatti, riassume, utilizza, coordina, sistema, l'opera dei matematici predecessori, offrendone una validissima sintesi, che al tempo stesso è analitica nella vastità della sua intelaiatura.

Ma gli *Elementi* di Euclide rappresentano, come s'è detto, anche un punto di partenza; successori immediati di Euclide sono i sommi matematici Archimede e Apollonio, i quali, fioriti nel III secolo avanti Cristo (tra il 300 e il 200 a. C.), non si occupano più di questioni matematiche *elementari* (la trattazione delle quali è stata felicemente conclusa da Euclide), ma si dedicano a ricerche di carattere superiore, con vedute legate al moderno calcolo infinitesimale presso Archimede, con la teoria delle sezioni coniche (ellisse, parabola, iperbole) presso Apollonio.

Dopo Archimede e Apollonio ha inizio un periodo di decadenza della matematica greca, pur con i fulgidi sprazzi di Diofanto, di Erone, di Tolomeo, di Pappo ed altri.

Ma l'opera di Euclide costituisce punto di partenza anche sotto un altro profilo; gli *Elementi* passano attraverso i secoli, costituendo fin quasi ai giorni nostri la base essenziale dell'insegnamento della matematica elementare (della geometria in ispecie) pressoché in tutti i paesi.

E da quando, nel secolo XV, viene inventata la stampa, le varie edizioni degli *Elementi* di Euclide sono talmente numerose, che è stato detto essere gli *Elementi* superati, sotto questo riguardo, soltanto dalla Bibbia.

Il fatto che gli *Elementi* siano stati, per dir così, padroni del campo dell'insegnamento *elementare*, soprattutto della geometria, fino ai giorni nostri (a prescindere dalle opere di Clairaut e di Legendre), è naturalmente dovuto alle qualità del trattato euclideo: trattato che pur essendo stato oggetto di perfezionamento o di tentativi di perfezionamento, resta tuttavia come un blocco granitico che è stato, attraverso i secoli, appena appena scalfito in qualche limitatissima parte.

Soltanto nel secolo XIX la critica moderna trova maggiori imperfezioni di carattere logico negli *Elementi*, e ne consolida le basi con modifiche e aggiunte di rilievo (con Hilbert, ad esempio): per tacere del secolo nostro, nel quale si sviluppano nuovi motivi, che inducono a ricercare addirittura una nuova *assiomatica*, che sostituisca, anche e soprattutto nell'insegnamento, quella euclidea.

Ma proprio perché si possa giudicare con cognizione di causa sopra queste nuove tendenze didattiche, autorevolmente rappresentate e sostenute nell'ambiente matematico contemporaneo, è quanto mai opportuno approfondire la conoscenza degli *Elementi* di Euclide, i quali, anche da questo punto di vista, rappresentano un necessario punto di partenza, sia pure perché, chi voglia, possa allontanarsene rapidamente.

Ed a questo riguardo vorremmo ripetere l'esclamazione iniziale, e presentare anche l'opera di Euclide, se non come *sconosciuta*, almeno come generalmente *poco conosciuta*. Invero la lettura diretta degli *Elementi* di Euclide è materialmente assai difficile. Ciò non soltanto per la difficoltà che talvolta, o spesso, il lettore incontra: ma anche per la difficoltà di procurarsi il materiale da leggere.

Il nostro maestro, il grande Federigo Enriques, tra il 1924 e il 1935 pubblicò un'edizione italiana degli *Elementi*, effettuata col concorso di diversi collaboratori (anche chi scrive ebbe l'onore di collaborare alla redazione dell'ultimo volume), ma detta edizione è da tempo esaurita, ed addirittura introvabile: sicché lo studioso italiano che voglia accostarsi agli *Elementi* euclidei non riesce spesso a trovare un'edizione in lingua italiana degli *Elementi* stessi.

Abbiamo quindi accolto con immenso piacere l'iniziativa dell'UTET, di pubblicare nella collana dei « Classici della scienza » una nuova edizione italiana (nuova traduzione, introduzione, commenti) degli *Elementi* di Euclide. E questa nuova edizione ha uno scopo che differisce assai notevolmente da quello dell'Enriques. Questi aveva di mira principalmente gli sviluppi, le aggiunte, le modifiche, i complementi, introdotti dai successori di Euclide attraverso i secoli, sicché l'insieme del suo commento offre soprattutto un panorama della storia della geometria elementare, da Euclide fino ai giorni nostri.

Assai diverso è, invece, il nostro còmpito di *commentatori*: si tratta appunto di *commentare* il testo euclideo, con introduzioni e note, in modo da renderne più facile la comprensione.

Le nostre *note*, cioè, tendono a chiarire e a facilitare, e in esse rinunziamo (sia detto una volta per tutte) ad ogni completezza: ci limiteremo a dare soltanto ciò che riterremo più utile allo scopo di permettere una lettura più facile che sia possibile.

E a questi stessi criteri s'è naturalmente ispirato il traduttore che, come spiega in apposita introduzione filologica, ha

sacrificato assai spesso il rigore e la precisione dell'espressione alla facilità e alla chiarezza.

* * *

Occorre ora dir qualcosa su un effetto che la comparsa degli *Elementi* di Euclide produsse sulla conservazione dei documenti della cultura matematica greca.

In tempi nei quali, per evidenti motivi tecnici, si svolgeva una vera e propria *lotta per la vita* per la conservazione di opere scritte, l'effetto prodotto dagli *Elementi di Euclide* (che, come s'è detto, rielaboravano, completavano, riunivano in sintesi, l'opera dei predecessori) fu quello di eclissare, di far disperdere, quasi di annichilire materialmente, le opere similari dei predecessori stessi. Sicché nulla ci è rimasto degli *Elementi* che furono composti prima di Euclide: da Ippocrate di Chio, da Leone, da Teudio e forse da Democrito, e pressoché nulla delle altre opere matematiche del tempo.

Risultato è che i documenti del trisecolare periodo pre-euclideo sono scarsissimi, quasi inesistenti; e che bisogna ricorrere a fonti indirette per gettare qualche tenue raggio di luce sugli sviluppi del periodo stesso.

E non appaia singolare e strano il fatto che proprio gli *Elementi* di Euclide rappresentino pur sempre la principale fonte sulla geometria pre-euclidea: negli *Elementi* troviamo infatti l'elaborazione dei risultati raggiunti e dei metodi impiegati dai matematici di detto periodo.

Per lo storico, un problema importante sarà quindi quello di sceverare, di distinguere, negli *Elementi*, le tracce dell'opera dei predecessori dall'opera personale di Euclide: cercheremo, in taluna delle nostre note introduttive e delle note a piè di pagina, di segnalare qualche risultato su tale argomento.

* * *

Una delle testimonianze più importanti su Euclide è certamente quella di Proclo. Questi, fra le tante sue opere di carattere diverso, compose un *Commento al primo libro degli Elementi di Euclide*, contenente preziose informazioni di carattere storico.

Ivi, in un Prologo, ci offre un brano (il cosiddetto *Riassunto*, o *Elenco*, dei geometri) che ci dà appunto notizie allo sviluppo della geometria greca: essenzialmente da Talete a Euclide.

È vero che Proclo vive nel v secolo dopo Cristo, quindi assai lontano nel tempo dagli *avvenimenti* scientifici che narra: tuttavia da uno studio approfondito è stato riconosciuto che le fonti di Proclo risalgono a tempi ben più antichi e che quanto Proclo ci narra, in particolare nel suo *Riassunto*, può quindi considerarsi degno di fede, almeno salvo prova in contrario.

A proposito di Euclide, già Proclo non conosce il suo luogo di nascita, e neppure sulle date della sua vita possiede notizie precise: tanto è vero che per individuare pur in misura largamente approssimativa le date stesse, è costretto a fare un ragionamento indiretto, sia pure se basato su fondamenti storici ben validi.

Scrive infatti Proclo che Euclide non è molto più giovane di Ermotimo di Colofone e di Filippo di Medma (discepolo, quest'ultimo, di Platone) e che compone gli *Elementi* prima che Archimede scriva le sue opere, dal momento che lo stesso Archimede menziona, appunto, gli *Elementi* di Euclide.

Di qui Proclo deduce che Euclide visse ai tempi del re Tolomeo primo.

Tutti questi dati, messi insieme, ci dànno con buona approssimazione la data convenzionale del 300 avanti Cristo per la *fioritura* di Euclide, ovvero per la composizione dei suoi *Elementi*. Essendo Euclide, infatti, più giovane dei discepoli di Platone e più vecchio di Archimede (e di Eratostene) quella data convenzionale si presenta come estremamente verosimile, dal momento che Platone morì nel 347 avanti Cristo e che Archimede visse tra il 287 e il 212.

Possiamo, del resto, aggiungere altri elementi *interni* (riguardanti cioè l'opera euclidea) che inducono a confermare detta datazione.

Necessariamente l'opera di Euclide vien dopo quella di Platone, come verrà esposto nel séguito: d'altra parte Aristotele, nei *Libri analitici*, critica la teoria delle parallele del suo tempo come contenente una petizione di principio: proprio quell'argomento, invece, che rigorosamente trattato nel libro primo degli *Elementi*, costituisce la maggior gloria di Euclide! Aristotele, dunque, si riferisce a compositori di *Elementi* antecedenti Euclide, e quindi quest'ultimo fiorisce (e compone i suoi *Elementi*) dopo Aristotele, che muore nel 322.

Falsa appare dunque l'opinione, che si introdusse per errore nei secoli scorsi e che poi venne generalmente abbandonata, che

Euclide non fosse l'*Euclide di Alessandria*, ma dovesse identificarsi col filosofo *Euclide di Megara*, vissuto circa un secolo prima. Circa la denominazione *Euclide di Alessandria* la principale fonte relativa è un brano di Pappo [1] nel quale è detto che Apollonio passò lungo tempo insieme con i discepoli di Euclide ad Alessandria. Ivi, dunque, Euclide avrebbe fondato una scuola.

Su Euclide ci sono stati tramandati un paio di aneddoti (uno si trova nello stesso testo di Proclo), i quali, pur non avendo alcun fondamento storico, tuttavia ben si attagliano al carattere dell'opera euclidea. Quindi essi non ci offrono autentiche notizie sulla vita di Euclide [2], ma piuttosto *inventano* notizie riguardanti la vita, armonizzandole con quanto dall'esame dell'opera euclidea si può dedurre: anzi da detto esame traendone lo spirito. In altri termini, potremmo dire che quegli aneddoti, se non son veri sono *ben trovati*.

Nel primo aneddoto (riferito da Proclo) ci è detto che il re Tolomeo chiese a Euclide se non vi fosse un mezzo più breve degli *Elementi* per imparare la geometria, e che Euclide gli rispose che *non esistono vie regie* in geometria. Nel secondo aneddoto (riportato da Stobeo) si narra che un discepolo, dopo avere imparato taluno dei primi teoremi, chiese a Euclide: « Maestro, quale utile ricaverò imparando queste cose? ». Ed Euclide chiamò allora un servo e gli diede ordine di dare qualche moneta al malcapitato discepolo (ed evidentemente di cacciarlo via), poiché egli voleva trarre profitto da quanto imparava.

Il primo aneddoto si riferisce al culto del rigore che Euclide professava al più alto grado. Se è vero che il rigore moderno ha trovato pecche in quello euclideo, è pur vero che Euclide cerca di raggiungere il massimo rigore instaurabile nell'ambiente storico-scientifico al quale appartiene. Ed è singolare che, pur di mantenere la linea di tal rigore, egli non fa quasi mai concessioni di carattere didattico (neppure al re Tolomeo!): ciò è singolare proprio perché presso i posteri gli *Elementi* di Euclide vennero considerati come un modello di arte didattica.

Il secondo aneddoto allude evidentemente al carattere strettamente *teorico* degli *Elementi*: in essi Euclide non si rivolge mai alla pratica. Invano si cercherebbe negli *Elementi* la benché

[1] Pappo, *Collezione*, VII, p. 678 (ediz. Ver Eecke).

[2] Notizie più ampie ci offrono poi tarde fonti arabe, alle quali tuttavia non può attribuirsi alcuna credibilità.

minima regola di misura o di calcolo: ne vengono forniti soltanto i presupposti teorici. Così, per esempio, viene dimostrato il teorema sulla proporzionalità dei cerchi ai quadrati dei diametri, ma non si accenna in alcun modo ad una determinazione del relativo rapporto costante, che è legato al famoso *pi greco*. Valori approssimati di detto rapporto verranno, come è noto, forniti più tardi da Archimede, il massimo ingegnere dell'antichità, che non disdegna le applicazioni pratiche come Euclide, ma le fonde con le considerazioni teoriche, in una delle più felici sintesi nella storia del pensiero scientifico attraverso tutti i tempi.

Sul carattere di Euclide *persona*, abbiamo poi un brano della *Collezione matematica* di Pappo, nel quale si elogia il compositore degli *Elementi* per la sua modesta riservatezza, che non gli consente di appropriarsi dei meriti dei predecessori: lo Heath trova che questo dato, se non ha un fondamento diretto, tuttavia rispecchia pure un altro carattere dell'opera euclidea: quello di rispettare la tradizione precedente, lasciando tracce dell'opera dei predecessori anche quando ciò non sia strettamente necessario nell'economia generale dell'opera.

E che Euclide abbia attinto, come è del resto ovvio, all'opera dei predecessori è detto anche da Proclo, secondo il quale Euclide compose gli *Elementi* raccogliendo molti teoremi di Eudosso, perfezionandone molti di Teeteto ed anche fornendo dimostrazioni rigorose di quei risultati che dai predecessori non erano stati con altrettanto rigore dimostrati.

Vorremmo finalmente accennare ad altri due punti della testimonianza di Proclo.

Il primo punto riguarda l'affermazione che Euclide era platonico, e che tanto familiare gli era la filosofia di Platone che pose come scopo finale dei suoi *Elementi* la costruzione dei poliedri regolari (cioè le *figure cosmiche* del Timeo). Qui v'è naturalmente l'esagerazione di Proclo, che venera Platone anche a costo della verità storica (come, ad esempio, quando non nomina Democrito, di Platone ritenuto nemico, tra i geometri) sicché per lui può dirsi, capovolgendo il detto famoso: *Amica veritas, sed magis amicus Plato*. Tuttavia segni evidenti di un'influenza della filosofia platonica sull'opera di Euclide verranno da noi esposti e discussi nel séguito.

Il secondo punto riguarda un altro carattere degli *Elementi*: Proclo elogia Euclide per la felice scelta delle proposizioni ritenute fondamentali ed esposte nella sua opera. Euclide, secondo

Proclo, non ha inserito negli *Elementi* tutte le proposizioni che era in grado di dare, ma soltanto quelle che possono fungere da *elementi*.

Questo è invero un carattere fondamentale dell'opera euclidea, che Proclo felicemente mette in rilievo. Sotto quest'aspetto, gli *Elementi* non costituiscono un trattato completo, e forse non possono neppure dirsi un trattato nel senso moderno della parola: costituiscono piuttosto un gigantesco sistema di *lemmi*, ossia di proposizioni che hanno valore, e vengono quindi introdotte nell'opera, solo in quanto servono per introdurre altre proposizioni seguenti che su di esse si fondano. Sicché tutte le volte che negli *Elementi* si trova una proposizione inutilizzata nel séguito, lo storico si domanda per quale particolare motivo Euclide l'abbia introdotta: motivo che talvolta ha carattere di rievocazione storica, proprio in armonia con quel rispetto della tradizione al quale Pappo accennava.

* * *

A questo punto, affinché il lettore possa formarsi un'idea quanto possibile esatta del valore dell'opera di Euclide, ci sembra necessario di accennare a quanto il *Riassunto* di Proclo ci fa conoscere circa lo sviluppo della geometria nel periodo pre-euclideo.

Dopo un cenno sull'origine della geometria in Egitto, sorta ivi come misura dei terreni (corrispondentemente all'etimologia della parola) per scopi pratici di carattere catastale, Proclo ci fa sapere che fu Talete di Mileto a *trasportare* la geometria dall'Egitto in Grecia, ed a iniziare uno studio autonomo della geometria stessa. È notevole che la notizia sul *trasporto* della geometria dall'Oriente in Grecia per opera di Talete si trovi anche presso una fonte ben più attendibile, cioè presso il grande storico Erodoto.

Dopo Talete campeggia la grande figura di Pitagora, al quale si deve, secondo Proclo, l'inizio di una vera geometria scientifica, sia per i processi dimostrativi sia per il distacco dalla materia, cioè per la considerazione di enti geometrici idealizzati.

Va osservato, a questo punto, che già ai tempi di Platone non si riusciva più a distinguere l'opera personale di Pitagora da quella dei suoi discepoli: a ben più forte ragione quando Proclo parla di prestazioni matematiche di Pitagora dobbiamo ritenere che egli si riferisca alla «scuola pitagorica».

È dunque in seno a detta scuola che si verifica il *colpo d'ala* della geometria greca, la quale si distacca dalla pratica di misure

e di calcoli della geometria pre-ellenica, ed assurge a insegnamento *liberale*, instaurando la precisione attraverso la considerazione degli enti idealizzati.

Proclo tratteggia poi la storia della formazione del *sistema degli Elementi* [3], cioè l'elaborazione di quei procedimenti che da un insieme di risultati non collegati, o mal collegati, tra loro conducono ad una sistematicità espositiva sul tipo degli *Elementi* di Euclide, nei quali si parte da semplici proposizioni iniziali per dedurne proposizioni a mano a mano più complesse.

Proclo ci tramanda, quindi, i nomi dei compositori di *Elementi* che precedono Euclide: il primo sarebbe Ippocrate di Chio, che possiamo ritenere contemporaneo di Socrate: il secondo è Leone, contemporaneo di Platone, il terzo è Teudio, contemporaneo di Aristotele.

Tra i matematici maggiori del periodo pre-euclideo, Proclo cita i nomi di Archita di Taranto, di Eudosso di Cnido, di Teeteto ateniese.

È soprattutto attraverso l'opera di costoro che si va affinando sempre più l'insieme delle teorie, tendendo verso la sistemazione euclidea.

Va avvertito a questo punto che vi sono, presso gli storici della matematica, tre diverse interpretazioni circa le modalità e i limiti dello sviluppo della geometria pre-euclidea: vi sono cioè tre diversi modi di interpretare il quadro offertoci da Proclo.

Il primo modo, che rispecchia una antica tradizione, è quello dello Zeuthen, dell'Enriques e della sua scuola: ci sembra, a vero dire, il più equilibrato ed il più verosimile. Secondo lo Zeuthen e l'Enriques, è nella primitiva scuola pitagorica (intorno al 500 avanti Cristo, o poco dopo) che avviene l'introduzione degli enti geometrici idealizzati (punto senza dimensioni, linea senza larghezza, superficie senza spessore), dando così luogo ad una vera geometria scientifica di precisione: ciò in base alla *mirabile scoperta* delle grandezze incommensurabili, il primo esempio delle quali ci viene offerto dal lato e dalla diagonale di qualsiasi quadrato [4].

E con la primitiva scuola pitagorica ha inizio la vera formazione del *sistema degli Elementi*: si partì cioè da qualche propo-

[3] Questa dicitura venne introdotta dal grande matematico e storico danese I. Zeuthen.

[4] Sull'argomento torneremo, per gli opportuni chiarimenti, nella nota introduttiva al libro X.

sizione complessa e significativa risalendo, col processo detto di *analisi*, a proposizioni via via più semplici dalle quali quelle complesse dipendevano. Il metodo espositivo degli *Elementi* corrisponde al cammino inverso (detto pure di sintesi) che dalle semplici proposizioni iniziali ridiscende a quelle più complesse, fornendone la *dimostrazione*, cioè facendo vedere che esse dipendono (attraverso le proposizioni intermedie) da quelle semplici iniziali.

E secondo l'opinione particolare dello Zeuthen, la proposizione complessa che avrebbe suscitato nei matematici il desiderio, il bisogno, della dimostrazione, sarebbe stato il teorema detto di Pitagora sul triangolo rettangolo. Una tesi diversa è sostenuta, a parte quest'ultimo punto particolare, da un gruppo di storici, a simbolo dei quali possiamo citare Erich Frank [5].

Secondo tale tesi, non è presso la primitiva scuola pitagorica (sorta vivente il Maestro) che avviene quel vero rivolgimento della geometria costituito dalla scoperta delle linee incommensurabili [6]: ciò avviene presso i *cosiddetti Pitagorici*, cioè presso tardi seguaci di Pitagora, che fioriscono all'incirca un secolo dopo la morte del maestro, cioè che raggiungono i loro risultati *soltanto intorno al 400 a. C.*

Va poi aggiunta una terza veduta (Freudenthal, Van der Waerden) che differisce dalla prima considerata soltanto per il maggior valore attribuito alle matematiche pre-elleniche, e quindi pone Talete in posizione, per dir così, centrale e non soltanto marginale nello sviluppo della geometria pre-euclidea.

* * *

Come si presentano gli *Elementi* di Euclide?

Essi sono divisi in tredici libri, nei quali vengono trattati argomenti *elementari* di geometria, di aritmetica, in certo senso anche di algebra.

[5] ERICH FRANK, *Plato und die sogenannten Pythagoreer*, Halle, 1923.

[6] Linee incommensurabili sono segmenti che non ammettono una misura comune. Ad esempio, dire che il lato e la diagonale di qualsiasi quadrato sono incommensurabili, vuol dire che non esiste un segmentino, per quanto piccolo, che sia contenuto esattamente un certo numero di volte nel lato e al tempo stesso sia contenuto esattamente un certo altro numero di volte nella diagonale dello stesso quadrato.

Nei primi quattro libri si svolge essenzialmente la geometria piana, per tutto ciò che può essere trattato indipendentemente dalla teoria delle proporzioni (e da quella conseguente delle figure simili).

Più precisamente, nel primo libro, dopo tre serie di princìpi (definizioni, postulati, nozioni comuni) che costituiscono una specie di introduzione generale a tutta l'opera, vengono esposte: la teoria di quella che noi chiamiamo *uguaglianza* dei triangoli, la teoria delle parallele e le sue conseguenze, e infine quella che oggi chiamiamo teoria dell'*equivalenza* dei poligoni. È stato detto che il libro primo gravita intorno a due proposizioni essenziali (quasi i *fuochi* di un'ellisse): quella sulla somma degli angoli di un triangolo uguale a due retti e il teorema detto di Pitagora sul triangolo rettangolo.

Nel libro secondo, assai più breve del primo, vengono ripresi e condotti a termine alcuni procedimenti già iniziati nel libro precedente: si giunge così alla quadratura di un poligono qualunque, cioè alla costruzione di un quadrato equivalente ad un poligono.

Nel terzo libro vengono studiate le proprietà del cerchio, e nel quarto (composto esclusivamente da problemi) si operano costruzioni riguardanti poligoni regolari.

Termina così la trattazione della geometria piana eseguita indipendentemente dalla teoria delle proporzioni. E detta teoria costituisce appunto l'argomento del libro quinto. Questo libro, va osservato, non tratta propriamente di geometria, ma svolge una teoria delle proporzioni tra grandezze in generale.

A quanto è dato di affermare, in detto libro quinto Euclide espone (con variazioni e complementi che non ci è dato di valutare) la teoria di Eudosso di Cnido, al quale sarebbe dovuta, in particolare, la definizione di proporzione nel libro quinto adottata.

Col libro sesto si ritorna alla geometria: in esso vengono infatti trattate le applicazioni della teoria delle proporzioni alla geometria piana: vengono cioè studiate le proprietà dei poligoni simili. Il libro sesto culmina con un problema che costituisce una generalizzazione della quadratura del poligono, argomento finale del libro secondo. Lì si trattava di trasformare un poligono in un quadrato equivalente: cioè, mantenendo inalterata l'estensione (area) si *costringeva* il poligono ad assumere la *forma* di un quadrato, e ciò senza ricorrere alla teoria delle proporzioni. Nel libro sesto, invece, ricorrendo a detta teoria, si richiede di

più: che l'estensione del poligono resti pur sempre invariata nella trasformazione, ma che la *costrizione*, per quanto riguarda la forma, sia ancora maggiore: si richiede cioè che il poligono dato venga trasformato in un altro poligono equivalente, ma avente la forma di un altro poligono qualsiasi (se tale ultimo poligono è un quadrato si rientra nel caso precedente).

I libri settimo, ottavo, nono, non trattano di geometria, ma di aritmetica. Questa viene intesa nel senso di *teoria* dei *numeri*: si occupa esclusivamente di numeri interi, e ne studia le proprietà in modo generale, senza mai piegarsi ad esempi numerici (cioè senza indulgere ad aspetti pratici per opportunità didattica).

Il libro decimo, più lungo e complesso di tutti, studia in modo minuzioso e *raffinato* le cosiddette irrazionalità quadratiche, considerando quelle linee cosiddette irrazionali, taluna delle quali si ritrova poi nei poliedri regolari, studiati nei libri seguenti.

Nei libri undicesimo, dodicesimo e tredicesimo Euclide si rivolge appunto alla geometria solida, ed applica (anche per alcuni casi della geometria piana) quel *metodo* che assai più tardi venne chiamato *di esaustione* (e che sembra pure dovuto a Eudosso di Cnido). Vengono poi finalmente studiati i poliedri regolari, sotto vari aspetti.

Si tratta, dunque, di un'opera davvero monumentale, che a buon diritto tramanda attraverso i secoli il nome di Euclide, dello στοιχειωτής, cioè del compositore di *Elementi*: dell'*Euclide geomètra* di Dante.

ATTILIO FRAJESE

PREMESSA DEL TRADUTTORE

Anticipiamo, per quanto ci compete, una breve sintesi relativa alla storia del testo, prima di esporre i criteri secondo cui si è operata la traduzione; seguirà, ad opera del curatore Prof. Frajese, un'altra sintesi della più recente, od in ogni caso, pur se passata, non trascurabile bibliografia degli studi su Euclide. Né l'una né l'altra pretendono, com'è naturale, la completezza e neppure come sintesi: basterebbe, a rendersene conto, uno sguardo all'estensione di un'opera quale il *Saggio di una bibliografia euclidea* di Pietro Riccardi, Bologna, 1887, 1888, 1890 e 1893, opera buona e tuttavia ormai arretrata.

Prima di tutto, dunque, indicheremo le edizioni complete e capitali del testo greco di Euclide, di cui disponiamo; esse sono:

1533: data dell'*editio princeps* di Basilea, cioè della prima di tali edizioni, *Apud Ioannem Hervagium*, editore Simone Grynaeus il vecchio. Rimase a lungo la fonte delle edizioni posteriori del testo greco, ma non può certo dirsi che abbia autorevolezza particolare: non ha difatti una buona base manoscritta, anzi i Mss. usati (due) sono fra i peggiori; come dice il titolo, essa proverrebbe ἐκ τῶν Θέωνος συνουσιῶν, dalle lezioni di Teone di Alessandria (IV sec. d. C.), cioè dall'edizione teonina di Euclide di cui in séguito riaccenneremo. È bene, tuttavia, dir sùbito che tale edizione di Teone, nella storia del testo, ha fatto da punto nodale: Euclide, per quanto spetta agli *Elementi*, ossia a libri di testo elementari, era ben presto diventato un classico, né sappiamo di suoi rivali che presenti la geometria greca posteriore; gli *Elementi*, possiamo dire, dal facimento in poi saranno studiati sempre più intensamente e verranno di necessità a ricevere alte-

razioni successive: ecco il motivo per cui una edizione *ex novo* e magari, per così esprimersi, ricapitolativa delle varie occasioni in cui il testo si era prestato a dubbi, esigenze di chiarimenti e quindi aggiunte, od accuse di pretese sovrabbondanze e quindi sottrazioni, ad opera di altri, e poi dello stesso Teone, ha avuto una importanza fondamentale; naturalmente, essa non rappresenta il testo euclideo originario: Teone, da buon neoplatonico, è presumibile sapesse essere, in varie occasioni, assai partigiano, e d'altronde non erano dello spirito antico certe moderne richieste di autenticità filologica. Il testo euclideo, com'era offerto, si prestava dunque da sé a futuri miglioramenti; e difatti

1703: è la data della grande edizione di Oxford del testo greco, ad opera di David Gregory, fino a quella di Heiberg e Menge unica edizione ufficiale delle opere complete di Euclide; il testo si basava fondamentalmente sull'editio princeps di Basilea, eccetto certi passi in cui furono consultati alcuni altri Mss. greci. La traduzione latina di accompagnamento seguiva quella di F. Commandino, di cui parleremo.

Fra il 1814 ed il 1818 esce poi in tre volumi, con traduzione latina e francese, il testo greco di *Elementi* e *Data* fissato da F. Peyrard, che rappresenta il primo avvicinamento ad un testo davvero migliorato (e di ciò ugualmente riparleremo).

1826-29: data di edizione del testo greco da parte di E. F. August (Libri I-XIII degli *Elementi*), più perfezionato ancora rispetto al testo di Peyrard.

Tutte le precedenti edizioni sono state però superate da quella che è ancora la definitiva, di Heiberg e Menge, nella serie teubneriana di Lipsia. Gli *Elementi* in particolare, editi da Heiberg, sono degli anni 1883-1888. Anche di essa sarà parlato. Attualmente si annuncia la riedizione del vol. I dell'opera, Libri 1-4 degli *Elementi* con appendice, a cura di E. Stamatis.

Intorno a queste date capitali, possiamo adesso farne ruotare altre. Anteriormente al 1533, ricordiamo che Magno Aurelio Cassiodoro (n. intorno al 475 d. C., m. c. 575) dice che Euclide fu tradotto in latino da Boezio, e vi accenna anche una lettera di Teodorico a Boezio; ma va sùbito avvisato che la *Geometria* di Boezio pervenutaci non ha nulla a che fare con una simile traduzione; è in due compilazioni, l'ultima delle quali, in due

libri, è stata edita da Friedlein (Lipsia, 1867); questa, anch'essa non genuina, sembra essere stata messa insieme da varie fonti dell'XI sec.: reca elementi di Euclide, ma non con l'intento di fare una qualsiasi traduzione, così come l'altra; ci troviamo insomma di fronte alla geometria del cosiddetto Pseudoboezio.

E questo ci permette, risalendo nel tempo, di precisare due fatti, che sono poi tra loro relativi: in Italia Euclide non aveva dovuto trovare all'inizio, presso i Romani, un ambiente troppo favorevole: la geometria teorica era vista in funzione di quella pratica, cioè l'arte della misurazione praticata ad esempio dagli *agrimensores*, e quindi ridotta al minimo, ed Euclide non si è sottratto a tale sorte: lo si riduceva a poche nozioni. Solo in età piuttosto tarda entrerà a far parte per gradi di un'educazione liberale; non ci possiamo così stupire della mancanza di un testo euclideo tradotto fino a quando, proprio negli ultimi secoli dell'Impero, abbiamo invece lo stabilirsi di un ragguardevole livello scientifico. Vi sarà allora, attorno al 500, la traduzione boeziana di tutto Euclide sopra accennata e per noi persa (cfr. al proposito, nota *c*, libro I, prop. 37); e nondimeno tentativi precedenti di tradurre gli *Elementi* o dagli *Elementi* in latino devono essere stati effettuati, almeno uno conservatoci in un palinsesto di Verona con un frammento geometrico del IV sec. d. C. circa (cfr. M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Lipsia, I_1, p. 478 e I_3, p. 565).

Naturalmente poi, per tramite dei bizantini, gli *Elementi* passarono in Arabia, dove furono tradotti (cfr. per questo *Euclid's Elements* di T. L. HEATH, vol. I, cap. VII, pp. 75-90). La versione dell'arabo Thābit ben Zurra sappiamo che fu tradotta in latino da Gherardo da Cremona (1114-1187), e Mss. che sembrano contenere tale traduzione sono stati pure rinvenuti all'inizio del secolo; vi sono poi altre due traduzioni dall'arabo, quella di Adelardo di Bath (XII sec. d. C.), l'autore della prima edizione latina degli *Elementi* che esista di sicuro, operata da una copia di versione araba presa in Spagna, e fatta intorno al 1120 d. C.; non è la prima in assoluto, perché esistono tracce di una più antica traduzione, anteriore all'XI sec., e che forse è stata compilata dal greco. La seconda dall'arabo è di Giovanni Campano da Novara, che Ruggero Bacone (XIII sec.) ricorda come un grosso matematico del suo tempo e che fu cappellano di Urbano IV. Campano sembra avere operato sulla base della traduzione di

Adelardo, ma, per ciò che riguarda le dimostrazioni, mediante un'altra redazione araba. Lo nomineremo talvolta in séguito.

Nel 1482 appare la prima edizione stampata di Euclide, a Venezia, ad opera di Erhard Ratdolt, e che conteneva la traduzione di Campano. Nel 1505, sempre a Venezia, esce la prima traduzione da testo greco del complesso degli *Elementi* ed altri scritti euclidei, anzi termina nel 1505 a partire dal 1500 (data degli *Elementi*); il Ms. da cui deriva apparteneva certo alla serie dei Mss. che, per provenire da Teone, possono con Heiberg essere chiamati teonini. L'autore è Bartolomeo Zamberti (Zambertus); anzi, di lui, perché indicativo, segnaliamo un errore allora comune: che cioè le dimostrazioni fossero di Teone. Zamberti era avversario di Campano, cosicché, a contraltare, nel 1509 appare ancora a Venezia, ad opera di Luca Pacioli (1445-1514), francescano ed amico di Leonardo da Vinci, *Euclidis Megarensis philosophi acutissimi mathematicorumque omnium sine controversia principis opera a Campano interprete fidissimo tralata... Lucas Paciolus... detersit... emendavit...*; è il testo a cui, per Campano, ci riferiremo, e sùbito ci avvisa di un altro errore del tempo, già notato nell'Introduzione: che cioè Euclide il matematico fosse il filosofo Euclide di Megara (v-iv sec. a. C.; Euclide è di circa un secolo dopo).

A dir la verità, è questa una confusione la cui prima traccia risale di nuovo in là nel tempo, forse, per quel che ne ritroviamo, sino all'epoca di Tiberio (I sec. d. C.: ad es., lo storico Valerio Massimo, di quel tempo, parla – VIII, 12, ext. 1 – di un « Euclide geometra » contemporaneo di Platone, che non potrebbe essere allora se non l'Euclide megarense: e la lezione « Euclide » sembra essere, per Valerio, indubitabile); i primi riferimenti specifici e dichiarati ad Euclide come Euclide di Megara sono ad ogni modo del xiv sec. Verso la fine del xv sec., e nel xvi poi in modo definitivo, la confusione verrà corretta; già in Commandino, di cui dopo, ed è il primo traduttore a farlo, troviamo nella prefazione alla traduzione latina del 1572 indicato l'errore chiaramente, come errore da eliminare.

Del resto, riprendendo il discorso precedente, venne pure l'idea di mettere insieme le traduzioni di Campano e di Zamberti; la prima di tali edizioni è del 1516, *in officina Henrici Stephani e regione scholae Decretorum*, a Parigi. Naturalmente il '500, secolo del Rinascimento, ha avuto per contrassegno, e dei principali, l'intenso rifiorire della ricerca scientifica e, di certo, con-

tributo a ciò è stato dato dalla ripresa organica e meditata che si effettuò dei più celebri testi della scienza greca, fra cui appunto Euclide. Di Luca Pacioli abbiamo già detto, e del 1533 è, come sappiamo, l'*editio princeps* di Basilea; facendo altri nomi, possiamo ricordare Nicolò Tartaglia (1506-1557), il rinvenitore della formula definitiva di risoluzione dell'equazione algebrica di terzo grado, che nel 1543 dà la versione in italiano di Euclide (2ª ediz., 1565, ed una 3ª, 1585): « Euclide Megarense philosopho, solo introduttore delle scientie mathematice, diligentemente rassettato, et alla integrità ridotto, per il degno professore di tal scientie Nicolo Tartalea Brisciano. Secondo le due tradottioni... »: permane il solito errore di Euclide confuso con l'Euclide di Megara, il che vale pure per le due « tradottioni », cioè Campano e Zamberti. Ma la più importante traduzione latina del momento, che darà poi avvio ad una traduzione italiana rivista dall'autore stesso, è quella di Commandino da Urbino (1509-1575), base della maggior parte delle posteriori traduzioni fino al principio del XIX sec. Il titolo è: *Euclidis elementorum libri XV, una cum scholiis antiquis. A Federico Commandino Urbinate nuper in latinum conversi, commentariisque quibusdam illustrati* (Pisauri, apud Camillum Franciscbinum). Commandino sembra abbia usato, oltre all'*editio princeps* di Basilea, un qualche Ms. greco non identificato. Egli seguì abbastanza strettamente e di volontà l'originale greco ed aggiunse appunto alcuni antichi scolii da un altro Ms. Vaticano (quelli che Heiberg designa come scolii vaticani). La data di pubblicazione fu il 1572; la versione italiana fu del 1575. Ci piace notare che nel 1559 Iohannes Buteo, o Borrel (1492-1572), in certe sue note ad un libro *De quadratura circuli* provava, ragionando su autorità originali, che Euclide e non Teone, come d'ordinario si riteneva, era l'autore delle dimostrazioni delle proposizioni euclidee. Fra queste date e l'altra del 1703 (ed. di Oxford), citiamo ancora la versione latina di Clavius (Christoph Klau?, 1537-1612) del 1574, con numerose successive edizioni; non è una vera e propria traduzione, ma una semplice claviana versione, utile per la raccolta di note di precedenti commentatori ed editori o proprie dell'autore, di vario genere. Ma ci giova ricordarla perché Clavio dette termine in modo conclusivo e ben fondato all'errore di Euclide come Euclide di Megara filosofo. Del 1703, dunque, è l'edizione oxfordiana ad opera di Gregory, di cui abbiamo detto all'inizio; e nel frattempo l'interesse per Euclide non è di sicuro diminuito (potremmo recare nomi come

Savile, Tacquet, Barrow, i nostri Cataldi, Borelli, Giordano, Viviani, tutti del '600); ad ogni modo, dopo un breve accenno all'*Euclides ab omni naevo vindicatus* (1733), del Padre Gerolamo Saccheri, semplicemente per il tentativo piuttosto elaborato che presenta di dimostrazione del postulato delle parallele, il quale segna una tappa di rilievo nella storia dello sviluppo della geometria non euclidea, arriviamo al 1756, data della prima edizione in latino ed in inglese di Robert Simson, che ci capiterà di citare nella edizione inglese: il titolo latino è: *Euclidis elementorum libri priores sex, item undecimus et duodecimus, ex versione latina Federici Commandini; sublatis iis quibus olim libri hi a Theone, aliisve, vitiati sunt, et quibusdam Euclidis demonstrationibus restitutis*, Glasguae; quello inglese: *The Elements of Euclid, viz. the first six Books together with the eleventh and twelfth. In this Edition the Errors by which Theon or others have long ago vitiated these Books are corrected and some of Euclid's Demonstrations are restored* (Glasgow); questa « restaurazione degli errori » è magari discutibile, e Simson procede talvolta ad alterazioni testuali o scelta di prove alternative al posto di altre che rischiano di costituirne dei nuovi: vi sono però molti casi in cui ebbe a trovare difetti reali e mostrò come toglierli, con osservazioni acute, ad es. sul Libro V delle proporzioni. Valgono per questo le *Notes Critical and Geometrical* unite alle due edizioni, inglese e latina. Dopo la notazione di una edizione ragguardevole dei Libri I-VI in greco ed in latino di J. G. Camerer (e C. F. Hauber) in due volumi, a Berlino, 1824-25, con testo greco principalmente basato su Peyrard, anche se con uso delle edizioni di Basilea e di Oxford, e la cui collezione di note è probabilmente la più completa al riguardo che esista fino allo stesso '900, possiamo ricongiungerci all'edizione di Heiberg e Menge; ripetiamo: si è eseguito solo un percorso a grandi linee, in rapporto stretto a quanto ci sarà utile per quel che dopo avremo a trattare nel corso della traduzione, specie riguardo alle fonti di diverse citazioni [1].

La presente edizione.

Il testo di Euclide seguìto appunto nella traduzione è questo edito da Heiberg e Menge, cioè l'Euclide completo in otto volumi

[1] Abbiamo proceduto più o meno, in questo rapido discorso, secondo la assai utile e discorsiva trattazione di T. L. HEATH nel suo *Euclid in Greek, Book I*, Cambridge, 1920.

(1883-1916) nella serie dei trattati teubneriani di Lipsia: gli *Elementi*, editi da Heiberg, con prolegomeni, note critiche, scolii eccetera, apparvero negli anni 1883-1888, in cinque volumi, anche se per la nostra traduzione hanno valore i primi quattro, dal 1883 al 1886, dato che i cosiddetti Libri XIV e XV degli *Elementi*, contenuti nel volume quinto, non sono di Euclide; e fu lavoro, quello di Heiberg e Menge, fondato ben saldamente, tanto da costituire una edizione definitiva, quel che si dice il *testo critico*: fino ad oggi non abbiamo avuto altra edizione di Euclide completa e criticamente rivista, e neppure parziale ma di simile tipo, ragion per cui a quella di Heiberg dobbiamo di necessità riferirci. Non è nostra intenzione aumentare le difficoltà, che già una semplice lettura di Euclide rappresenta per il lettore, con discussioni di ordine filologico elaborato; diremo soltanto, e un po' all'ingrosso, che talvolta in nota potrà trovarsi indicato un certo codice P e che questo era stato un elemento portante della revisione critica di Heiberg del testo euclideo d'uso precedente: i manoscritti cui prima ci si affidava, difatti, senza vi fosse stata discussione reale della loro stessa validità, o preferibilità degli uni rispetto agli altri, derivavano dall'edizione di Teone di Alessandria, nel IV secolo d. C., e l'intento di Teone non era stato quello di un filologo, com'è pure naturale, ossia di rispettare o recuperare la reale scrittura di Euclide, ma di rimuovere invece difficoltà che si potessero presentare agli scolari – per loro aveva compiuto la sua opera – nel leggere un tal testo; aveva proceduto di conseguenza ad alterazioni, emendamenti, soprattutto aggiunte, ed anche omissioni. Ma F. Peyrard, agli inizi dell'Ottocento, ritrovò nel Ms. Vaticano 190 una edizione di Euclide senz'altro più antica e maggiormente apprezzabile in quanto il copista di quel codice (P appunto, come verrà detto) aveva disponibili, ed appare chiaro, tutt'e due le versioni, la teonina e quella più antica, a cui dava sistematicamente e quindi consapevolmente la preferenza. I tre volumi di Peyrard (1814-1818) davano, con traduzioni in latino ed in francese, un testo greco già migliorato, le edizioni di G. Camerer J. e C. F. Hauber, due volumi, Berlino, 1824-25, dei Libri I-VI in greco ed in latino, e quella dei XIII Libri completi di E. F. August, Berlino, 1826-29, offrivano un testo greco migliorato pure rispetto a quello di Peyrard; ed infine Heiberg, proprio dal confronto il più esteso e discusso possibile tra i Mss. « teonini », come da lui son chiamati, ed il codice P, più qualche altra fonte opportuna

(alcuni antichi papiri, per maggiore esattezza), ha determinato il testo suo, ancora definitivo.

Adesso, prima di intrattenerci un istante sui criteri traduttivi che abbiamo assunto, ci permettiamo ancora di rammentare al lettore che la *Nota bibliografica* sugli studi euclidei, seguente a questa premessa, potrebbe essere tenuta pure presente a questo punto, almeno da parte di chi volesse, con più insistenza, procedere ad una critica valutazione, e ad un critico completamento, della storia del testo euclideo e dei suoi significati.

Infine, come ultimo nostro avviso d'ordine storico-bibliografico, dobbiamo notare che per le matematiche antiche ed Euclide in particolare, possediamo una fonte di informazione di prima importanza, che ci troveremo spesso a nominare almeno nel Libro I, e che è una delle due fonti principali di informazione sulla storia della matematica greca pervenuteci, l'altra essendo la grande *Collezione* di Pappo (fine III sec. a. C.): si tratta del Commentario al Libro I di Euclide di Proclo (410-485), come già detto nell'Introduzione, che fu capo della scuola neoplatonica, e di cui abbiamo l'edizione di G. Friedlein nella teubneriana di Lipsia: *Procli Diadochi - In primum Euclidis elementorum librum commentarii* (1873). L'importanza del commentario è di primo ordine: Proclo, per ciò che spetta ad Euclide, ebbe a disposizione senz'altro molte fonti per noi perdute, cioè vari commentari ad Euclide (Erone, Pappo – di costui esisteva certo un commentario al Libro X, di cui possediamo frammenti –, probabilmente Porfirio, Simplicio, opere tutte di diversa mole ed estensione); inoltre, Proclo doveva avere a disposizione la *Storia della geometria* di Eudemo di Rodi, « il più fedele » degli scolari di Aristotele, e questo è certo, perché il commentario di Proclo ha un passo famoso, il sommario cosiddetto « eudemio » della storia della geometria fino agli immediati predecessori di Euclide. Ora, la perdita della Storia della geometria di Eudemo è una delle nostre perdite più gravi ed incolmabili; da qui anche l'importanza del passo e del Commentario: è piuttosto difficile che il passo sia stato però tratto testualmente da Eudemo, e vi è stato molto discusso intorno (ad es., dal Tannery; vi è una fondamentale trattazione, *De Procli fontibus*, di J. G. van Pesch, Lugduni-Batavorum, 1900) – è più probabile, come pensa Heath, che sia stato preso da un compendio della storia di Eudemo fatto da qualche più tardo scrittore.

La presente edizione (secondo gli Elementi *di Heiberg).*

Considerando più da vicino, adesso, i criteri seguìti nel tradurre, diciamo che la traduzione di Euclide, così come lo abbiamo osato affrontare, ha presentato un doppio ordine di problemi: rendere il greco con fedeltà di calco poteva dare talvolta difficoltà, ma l'inconveniente effettivo era di rasentare l'incomprensibilità, o di incorrere in essa a pieno, tutte le volte si cozzasse nell'abitudine giustificata di un qualunque lettore al linguaggio matematico moderno: si trattava perciò, sùbito, di schivare tale pericolo che avrebbe tolto ad Euclide la sua innegabile dote di fascino e la possibilità di agire anche sull'intelletto di un lettore d'oggi; qui si aprivano l'altro problema e l'altro pericolo: cioè, per rendere comprensibile Euclide, di eliminarlo oggettivamente, non solo modernizzandone, ma travisandone il linguaggio – una china quasi inevitabile nell'ammodernamento di uno scrittore antico di scienza e non di scienza –, finendo così non col tradurlo, ma col parlare *di lui*, e per di più come si potrebbe parlare attualmente di uno che ha discorso e delle cose che ha detto diversi secoli fa. Evitar ciò, senza per altro ottundere Euclide col sistema del calco: i criteri, lasciando stare se sufficienti, inevitabili si offrivano da sé. Esser fedeli ad Euclide, da un lato, era necessario, ma proprio per questo si doveva avere a norma fondamentale la chiarezza: vale a dire non tradurre Euclide parlando in realtà *di* Euclide alla moderna, od alternando di volta in volta, secondo le difficoltà di comprensione del testo, una traduzione letterale con l'altra analogica dall'espressione in tutto modernizzata, ma scostarsene soltanto quando ciò non si potesse evitare o quando, proprio al fine di una traduzione fedele nella sostanza, se non nella pura forma, fosse meglio scostarsene – *in funzione di Euclide*, cioè per rendere comprensibile Euclide in quanto Euclide ad un lettore modernamente abituato; il tentativo, insomma, di costruire un Euclide in italiano. Lasciando stare quanto possa esservi di pretenzioso in un simile progetto, e ne siamo consapevoli, restava almeno questo come conseguenza: che si trovasse il modo di tradurre Euclide entro certi limiti a doppia lettura, per così dire; che il lettore avesse una traduzione da leggere con sufficiente agevolezza da un lato, ed insieme, se lo ritenesse opportuno, potesse con facilità almeno relativa ricostruire il testo euclideo autentico fino ad un certo punto, il più avanzato a noi possibile, specie quando

avesse preso un po' di dimestichezza col testo medesimo. A tale scopo, avendo sempre a criterio base la chiarezza, abbiamo pensato:

a) di premettere qui, con valore generale, una nota che riguardi le modifiche usate normalmente nel corso di tutta la traduzione, ma distinguendo in esse semplici *cambiamenti* di dizione, per dir così, corrispondenti cioè ad una presenza testuale che va da noi mutata, ed *aggiunte* al testo che, sempre per ragioni di perspicuità, abbiamo ritenuto di apportare;

b) di disporre poi note ad ogni libro, progressivamente numerate per ogni teorema, o problema, o per definizioni, postulati, ecc. se ne esistono, le quali riguardino *cambiamenti* od *aggiunte* più particolari, in ordine al libro stesso.

Vale a questo punto l'avvertenza che una delle note indicate in *b*), o, meglio, il cambiamento o l'aggiunta a cui essa si riferisce, non sarà più richiamata in séguito (ad evitare il frastornamento del testo e del lettore), ma varrà normalmente da quel momento in poi per il resto della intera traduzione; tutte le volte invece che, per un qualunque caso, si venga a corrispondere in tali cambiamenti od aggiunte proprio alla lezione testuale, lo avviserà una nota apposita;

c) l'uso di parentesi quadre, le quali non saranno poi ripetute, per lo meno normalmente, nel resto della traduzione, la prima volta che a tali modifiche, cambiamenti od aggiunte si proceda.

L'uso delle parentesi vale di norma per *b*), ma anche per *a*) nelle espressioni su cui meriti, di volta in volta, richiamare l'attenzione, mentre per altre di *a*) stimiamo sufficiente l'elenco generale che ne dà la premessa.

Particolarizzando adesso, per quanto spetta alle osservazioni *a*), veniamo:

1) ad avvertire per prima cosa di avere, come ovvio, mutato la normale simbologia euclidea costituita dalle lettere maiuscole greche con le maiuscole del nostro alfabeto, secondo l'ordine progressivo dell'alfabeto, come del resto fa lo stesso Euclide con quello greco, estendendo il numero delle maiuscole medesime con introduzione di qualche altra, come K, X, W; di simboli in lettera minuscola, o di certi cambi radicali di simbologia imposti dalla necessità di comprensione, tratteremo in note apposite all'interno dei vari libri; quando poi capiti, nelle note, di riportare la lettera del testo greco (tranne che il riporto non sia traduzione, ma

lo stesso passo greco) manterremo sempre il nostro normale simbolismo;

2) per le definizioni, i postulati, le nozioni comuni, e per gli enunciati delle proposizioni (naturalmente, pure per le conclusioni quando ripetano gli enunciati – ed è regola euclidea, seppur non di rigore assoluto), in ordine cioè ad espressioni di valore generale, mentre il greco usa di norma l'articolo determinativo, noi adopereremo quello indeterminato. Ad esempio, l'enunciato della proposizione 1 del Libro I dice esattamente: *Sulla retta terminata* (o *finita*) *data costruire un triangolo equilatero*, vale a dire – sulla retta terminata data (anzi, che venne data: il tempo in greco è l'aoristo) e che prendiamo in considerazione, qualunque essa sia, costruire un triangolo equilatero; traduciamo con: *Su una retta terminata data costruire un triangolo equilatero.* Un esempio ancora: l'enunciato della prop. 6 dello stesso Libro I comincia *Se in un triangolo i due angoli sono uguali fra loro...*, vale a dire – ed è la forza dell'articolo definito greco – «i due angoli che possono esser presi, che sono presi, in considerazione qualunque essi siano»; tradurremo evidentemente: *Se in un triangolo due angoli sono uguali fra loro...*

3) Per ciò che riguarda la *costruzione* (κατασκευή) delle proposizioni, come anche se ne darà avviso appena incontriamo la prima, muteremo la disposizione temporale. Seguendo difatti il testo, ad es., della stessa prop. 1 del Libro I, avremmo: *Con centro* A *e distanza* (cioè, *raggio*) AB *risulti descritto* (sia stato descritto: γεγράφθω, un perfetto medio-passivo in greco) *il cerchio* BCD, *e di nuovo, con centro* B *e distanza* BA, *risulti descritto il cerchio* ACE, *e dal punto* C, *in cui i cerchi si tagliano fra loro, risultino congiunte ai punti* A, B *le rette* CA, CB. Ora, tranne i casi in cui il senso di tale perfetto greco abbiamo lasciato, per esempio nelle prime proposizioni del Libro I, ad evitare appesantimenti eccessivi si è dovuto tradurre normalmente col presente, in questa prop. 1 con un «si descriva...» ripetuto due volte, in totale, e «si traccino le rette congiungenti...». Va detto anzi a questo punto che renderemo sempre il greco «congiungere» (congiungere una retta), cioè tracciare una retta che faccia da congiungente da un punto ad un altro, con la formula *tracciare la congiungente*, o *le congiungenti*, *da... a...* sottintendendo il termine *retta* e pure senza le specificazioni dei punti, come Euclide fa appunto quasi sempre. Notiamo adesso qualcosa sul perfetto di cui sopra, usato proprio per

quelli che noi diremmo atti operativi, mentre nell'àmbito della stessa *costruzione*, accanto a simili perfetti, possiamo trovare l'altro verbo κείσθω, « si ponga », quando si debba porre una retta, ad esempio, uguale ad un'altra, cioè usando un verbo opportuno per atti che vogliano essere considerati non tanto operativi nel corso della loro operazione, quanto piuttosto di visione mentale unitaria di un'operazione – e difatti κείσθω è verbo che guarda non al porre del *si ponga*, ma ha l'occhio volto allo *stia* del risultato (che una retta stia in eguaglianza con un'altra). Dunque, Euclide parrebbe considerare la costruzione non come qualcosa che si venga a costruire di volta in volta traendone di volta in volta, processualmente, certe conclusioni, ma viceversa come visione mentale di un certo tipo (quello che noi diremmo operativo, dato che si rivolge ad operazioni), per cui dinanzi alla mente che considera tale séguito di atti, non nel seguitare, ma appunto quale un séguito unitario, non può darsi che un perfetto, ossia uno stato di fatto. È pure ovvio che, traducendo, è stato necessario eliminare nella costruzione la sequenza greca degli « e » (ve ne sono spesso molti di continuo, dato che ne sta uno ad ogni passo operativo) e rivedere un poco, in genere, la punteggiatura.

4) Per la punteggiatura in generale, nel corso di tutta la traduzione, eccetto il caso più esposto della costruzione, abbiamo sempre cercato di mantenerci il più possibile aderenti a quella greca all'infuori di eventualità in cui davvero, pur se di poco, ma per restar fedeli al senso, fosse opportuno cambiarla: di tali cambi, dato il loro peso relativo, non facciamo note particolari.

5) Sempre per motivi di ordine e chiarezza in italiano, utilizzando del resto sfumature ed inflessioni del greco talvolta, e qualche altra permettendoci un minimo di libertà, abbiamo spesso mutato il καί (e) greco, durante la discussione risolutiva di teoremi e problemi, o con *ora*, o con *ma*, e qualche volta abbiamo soppresso lo stesso *e*; si è usato *Ora*, se non sempre, con abbastanza frequenza, al posto dell'*E* con cui Euclide, ripigliando quanto detto prima nella costruzione o riattaccandosi a motivi antecedenti per utilizzarne i risultati acquisiti, inizia la dimostrazione del teorema o la risoluzione del problema (la formula è di solito *E poiché*...; es. I, 3, dopo la costruzione: *E poiché il punto* A *è centro del cerchio* DEF...); si è adoperato *ma* quando il senso dell'*e* equivaleva piuttosto, in italiano, a tale

sfumatura. Ci ha del resto qui guidati pure un'altra preoccupazione: di evitare, per quanto possibile, l'impiego in accezione diversa dell'E maiuscola, lettera usata in simbologia, specie se in vicinanza immediata, o molto prossima, di altre lettere maiuscole usate simbologicamente ed includenti magari la maiuscola E; lo stesso, per ragioni di omogeneità od opportunità, è valso anche per l'espressione *Ed.* Sempre per evitare ogni equivoco, pur momentaneo, abbiamo cercato al massimo di eliminare la vicinanza di gruppi di lettere maiuscole, in uso simbologico, ad altri dello stesso tipo: es. I, 23 – ... *si costruisca il triangolo* AFG, *in modo che* CD *sia uguale ad* AF, CE *ad* AG, *ed infine* DE *a* FG; traduciamo: ... *in modo che* CD *sia uguale ad* AF, *sia* CE *uguale ad* AG, *ed infine* DE *sia uguale a* FG.

6) La conclusione di un teorema, dove si ripeta l'enunciato (e nei teoremi Euclide solitamente opera in tal modo, pur se non sempre, soprattutto se procediamo nella serie dei libri), è tradotta con *Dunque,* le parole ingressive dell'enunciato, e la formula in parentesi (*secondo l'enunciato*), mentre Euclide naturalmente lo ripete per intero.

7) Euclide introduce ogni passo di una dimostrazione, o della soluzione di un problema, con la congiunzione « quindi » il più delle volte, dando avvio alla serie dimostrativa o con un « Poiché dunque... », o con « E poiché... », o « Poiché infatti... »; può usare anche il « cosicché » durante la serie dimostrativa, oppure « infatti » semplicemente – ma più di rado –, se in clausola opportuna. Ad evitare gravose ripetizioni traduciamo il *quindi* (ἄρα) ora con *quindi* o con *perciò,* ed ora con *per cui,* collegando in tal caso con la virgola alla frase precedente quanto in greco è invece separato dal punto in alto (cioè, punto e virgola o due punti). Da notare ancora: avendo un *poiché* iniziale, mentre il greco inizia la frase posteriore di nuovo con un *quindi* o *perciò* – « poiché..., quindi... (ἄρα) » –, od anche con un *così, allora* (δή), noi eliminiamo di regola questa seconda parola; lasciamo il termine *dunque,* sempre per l'ἄρα greco, per la *definizione* o *specificazione* (διορισμός), nelle proposizioni, di ciò che si deve dunque dimostrare o si deve dunque fare, in teoremi e problemi rispettivamente, e lo ripetiamo nella *conclusione* delle proposizioni stesse, così da metterlo in rilievo; quando poi si avrà a che fare con proporzioni, per sfuggire – come già detto – alla vicinanza delle lettere maiuscole, si procederà nel modo seguente: prendendo ad esempio la VI, 12, abbiamo in essa « Poiché dunque

si è condotta *GH* parallela ad *EF*, cioè ad uno dei lati del triangolo *DEF*, quindi *DG* sta a *GE* come *DH* sta a *HF* », e nella traduzione: « Poiché dunque... ecc., si ha che *DG* sta... ecc. ». Adopereremo tale formula *si ha che*, od *abbiamo che*, pure in altre occasioni, al posto che riterremo opportuno.

8) Euclide, parlando di una retta, può dire *la retta*, ad esempio la retta *AB*, o parlando di altri enti geometrici, *il punto* B, *il triangolo* ABC, e così via, ma d'ordinario, dopo avere impiegato i termini al completo alla loro prima introduzione, usa la formula ridotta a cui si presta l'articolo greco e che è normale nella pratica geometrica greca: *la retta* AB diviene così *la* AB (sottintendendo retta), *il punto* B diventa *il* B, *il triangolo* ABC dà *lo* ABC, e così via. Tradurremo o col ripetere la determinazione retta, punto, triangolo, ecc., o semplicemente adoperando le lettere, data la facile comprensione di ciò di cui si tratta: *AB* per la retta *AB*, ad esempio *AB* è uguale a *CD*, il punto *B*, in greco il *B*, diventando *B* soltanto, eccetera. Adopereremo talvolta anche il pronome *quello*, *quella*, in casi come: un triangolo *ABC* è uguale ad un altro triangolo, e pure un cert'altro è uguale a quello *ABC*. Così, per le formule nostre il rettangolo $AB \times CD$, il quadrato di *AB*, l'angolo *ABC*, per esempio, Euclide dice per esteso: *il rettangolo compreso dalle* (rette) *AB*, *CD* (secondo la def. I del libro II: *Ogni parallelogrammo rettangolare è detto esser compreso*, vale a dire: Si dice che un parallelogrammo rettangolare qualunque è compreso, *dalle due rette che comprendono l'angolo retto*; ed avremo in tal modo all'enunciato di II, 1: *Se vi sono due linee rette*, cioè: Se si hanno, o si danno, due linee rette, come tradurremo di solito in questi casi,... *il rettangolo compreso dalle due linee rette*, ecc., e subito dopo, alla « definizione »: *dico che il rettangolo compreso dalle* A, BC *è uguale al rettangolo compreso dalle* A, BD). Così Euclide dice *il quadrato descritto su una retta*, secondo l'enunciato di I, 46: *Descrivere un quadrato su una retta data*; ma immediatamente, passando all'indicazione letterale, dirà *il quadrato* (sott. descritto) *sulla* (sott. retta) *AB*, ad es. (da τὸ ἀπὸ τῆς AB εὐθείας – sott. ἀναγεγραμμένον – τετράγωνον passando a τὸ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον), ed infine si ridurrà a *il* (sott. anche quadrato) *sulla* AB (τὸ ἀπὸ τῆς AB). Per il rettangolo avremo, progressivamente riducendo, *il* (sott. rettangolo) *dalle* AB, CD (sott. compreso e rette) – τὸ ὑπὸ τῶν AB, ΓΔ –, e nel caso le rette siano *AB*, *BC* troveremo semplicemente *il dalle* ABC (τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ, dalla partenza originaria

τὸ ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον); quanto all'angolo *ABC*, che sarebbe poi in verità l'angolo compreso dalle rette *AB*, *BC* (cfr. l'enunciato di I, 4, in cui si parla di due triangoli che abbiano un angolo uguale ad un angolo, *quello compreso dalle rette uguali*), esso diviene subito nella I, 4, come di pratica, *l'angolo* (sott. compreso) *da*(lle rette) *BAC*, essendo le rette in quel caso le rette *BA*, *AC*, per poi fare soltanto *lo da* ABC per esempio (ἡ – essendo γωνία, angolo, femminile in greco – ὑπὸ ΑΒΓ). Noi traduciamo: il quadrato di *AB*, l'angolo *ABC*, ed il rettangolo di *AB*, *CD*, delle rette *AB*, *CD*, che è cioè compreso dalle rette *AB*, *CD*.

9) Da ricordare poi che Euclide non adopera mai il termine « somma » (noteremo al luogo opportuno le varie altre espressioni usate da Euclide al riguardo), così come « raggio » ed « arco », a proposito di cerchi, non sono ugualmente ritrovabili in lui: egli chiama il raggio ἡ ἐκ τοῦ κέντρου, la retta dal centro, e quando si tratti di costruire un cerchio (come in I, 1) parla di descrivere un cerchio che abbia per centro un certo punto e per *distanza* (διάστημα, cioè per raggio) una certa retta; quanto all'arco, egli lo chiama « circonferenza », una circonferenza (περιφέρεια, tale e quale come per la circonferenza tutta intera): per esempio III, 26 – « In cerchi uguali angoli uguali insistono su archi uguali (ma Euclide dice: su circonferenze uguali)... », e dopo, sempre III, 26: « Siano *ABC*, *DEF* cerchi uguali, e vi siano in essi angoli uguali, gli angoli al centro *BGC*, *EHF*, e quelli alla circonferenza *BAC*, *EDF*; dico che la circonferenza (cioè, l'arco) *BKC* è uguale alla circonferenza (di nuovo, all'arco) *ELF* ». Useremo in traduzione *arco*, od anche *arco di circonferenza* quando lo si ritenga opportuno, come norma.

10) Manteniamo il termine *uguale* (ἴσος) che è di Euclide, anche quando – oggi – andrebbe usato « equivalente »: ad esempio, che una certa figura sia *uguale* ad un'altra, evidentemente in area, essendo la prima di forma diversa dalla seconda, vale a dire, appunto, essendo l'una equivalente all'altra; oppure, con espressioni che potrebbero risultare alla prima sorprendenti, che (X, 41) si applichi ad una retta razionale *DE* il parallelogrammo, o rettangolo, *DF* « uguale alla somma dei quadrati di *AB*, *BC* », o che (X, 62) si dica: « la somma dei quadrati di *AC*, *CB* è mediale. Ora, essa è uguale al parallelogrammo *DL* »: abbiamo, pure in tali casi, evidente equivalenza d'aree. Manteniamo anche il termine *retta* nel senso euclideo, cioè di retta finita (quanto

Euclide nomina « retta terminata ») mentre oggi diremmo segmento; altri usi euclidei, mantenuti e non collimanti con le abitudini terminologiche odierne, saranno mano a mano segnalati.

11) Adopereremo parentesi quadre e anche tonde: le tonde sono semplicemente esplicative e sono del tutto un intervento nostro, le quadre indicano aggiunte pure di parte nostra, ma che vengono fatte allo scopo di rendere più agevole e più comprensibile la lettura del testo. Vale per le quadre l'avvertenza, già fatta prima in modo più esteso, che appena usate una volta, si intende validificato il loro impiego posteriore senza più la notazione di parentesi. Qualunque eventuale combaciamento con la lezione testuale, se incontrato posteriormente al primo uso della parentesi, sarà segnalato in nota apposita.

12) Indicheremo con « è possibile », « si può », « può », oppure « non è possibile », « non si può », « non può », « non può darsi », le sfumature di possibilità o meno che il greco include nella forma stessa del verbo all'indicativo, quando sia in un certo contesto od indirizzi il senso.

13) Nelle dimostrazioni per assurdo abbiamo così proceduto, dato che Euclide adopera il tempo presente (es. I, 26): « Infatti, se *AB* è disuguale rispetto a *DE*, uno dei lati stessi è maggiore. Sia maggiore *AB*, si ponga *BG* uguale a *DE*, e si tracci la congiungente *GC*. Poiché dunque *BG* è uguale a *DE*, e *BC* ad *EF*, i due lati *BG*, *BC* sono uguali rispettivamente ai due lati *DE*, *EF*; e l'angolo *GBC* è uguale all'angolo *DEF*, per cui la base *GC* è uguale alla base *DF*, il triangolo *GBC* è uguale al triangolo *DEF*, e gli angoli rimanenti del primo, opposti ai lati uguali, saranno uguali ai rispettivi angoli rimanenti del secondo; l'angolo *GCB* è quindi uguale all'angolo *DFE*. Ma l'angolo *DFE* è per ipotesi uguale all'angolo *BCA*; anche l'angolo *BCG* è perciò uguale all'angolo *BCA*, il minore al maggiore: il che è impossibile ». Noi useremo piuttosto il congiuntivo ed il condizionale introducendo l'argomento: in questo caso « Infatti, se *AB* fosse disuguale rispetto a *DE*, uno dei lati stessi sarebbe maggiore », e porremo al condizionale il più spesso possibile il termine della dimostrazione: « Ma l'angolo *DFE* è per ipotesi uguale all'angolo *BCA*; anche l'angolo *BCG* sarebbe perciò uguale all'angolo *BCA*, il minore al maggiore: il che è impossibile »; talvolta invece manterremo il presente, sostenendolo con la formula aggiuntiva *in tal caso*: anche qui, ad es. « per cui la base *GC* è in tal caso uguale alla base *DF* ».

Formando poi un elenco delle *aggiunte* principali, sempre secondo *a*), rileviamo l'introduzione, quando sia stato opportuno, di:

di esso, di essa, di essi, ad esso, ad essa, ecc.;

altro, altra, altri, altre;

certe indicazioni di figure, come *il rettangolo, il triangolo, il parallelogrammo*, ecc., che, come abbiamo visto prima, il greco sottintende nell'articolo;

con vertice, coi vertici (di triangoli) in certe occasioni;

le une e le altre (di rette), *gli uni e gli altri* (di lati), quando si abbiano espressioni come in I, 5: «i due lati *FA*, *AC* sono uguali rispettivamente ai due lati *GA*, *AB*; e comprendono – aggiungiamo noi: gli uni e gli altri – l'angolo *FAG*», oppure si dica che due lati, ad esempio, sono uguali ad altri due e comprendono, cioè gli uni e gli altri comprendono, angoli uguali; l'aggiunta può essere fatta anche in altri casi opportuni;

aggiunte come *il primo, il secondo, l'uno, l'altro, ambedue*, ecc., con i cambi di genere o di numero relativi, per coppie di figure, somme, ecc.;

iniziale, iniziali, posto o *posti inizialmente, posto, posti*, oppure *dato, dati, considerato, considerati, che consideriamo*, e simili;

spesso *fra loro*; *così* od *in tal modo costruito o costruiti, in tal modo contenuto, contenuti*, o *compreso, compresi*;

relativo, relativi, corrispondente, corrispondenti;

di prima, d'altronde, d'altra parte, in questione.

Poniamo al solito in parentesi quadra una qualunque aggiunta la prima volta che la pratichiamo, ma per quelle più di spicco, e qui elencate, tale uso non è neppure necessario – almeno talvolta –, per le altre spesso sarebbe dannoso, in quanto di continuo saremmo costretti a notificare quando il greco adoperi proprio tali parole testualmente; valga allora la semplice avvertenza che simili aggiunte non di rilievo possono anche esser praticate, mentre del resto potranno sempre riconoscersi dall'impiego stesso a clausola ritornante che ne faremo.

Terminiamo con due finali avvertenze: che i criteri sopra enunciati non possono essere che di massima e direzionali; ad es., per quanto riguarda le parentesi, vi sono libri in cui le parentesi soprattutto quadre costituiscono parte essenziale e fanno

persino da commento (il V, il X in primo luogo), e dove quindi non abbiamo tralasciato in nulla di notare e di ripetere di notare qualunque aggiunta - specie per le aggiunte di carattere strettamente matematico, e che a noi non spettano; in generale, anzi, parentetizziamo pure contro il criterio del non rinnovare il segno di parentesi, tutte le volte lo riterremo opportuno. La seconda avvertenza è che le nostre note non hanno, né vogliono avere, o possono, pretesa di ordine storico-filologico particolare e specialistico, cioè approfondito, ma sono dirette esclusivamente alla migliore comprensibilità del testo e ad un minimo di orientamento rispetto ad esso.

Avvisiamo ancora che le indicazioni, poste alla fine delle proposizioni dei vari libri di Euclide, riguardanti sia le altre proposizioni dei libri stessi che la proposizione studiata applica, sia quelle in cui essa è applicata nel corso dell'opera, sono del curatore Prof. Attilio Frajese; così come abbiamo l'obbligo ed il piacere di ringraziare il Prof. Frajese per il suo consiglio, a noi prezioso, che non ci ha abbandonato durante il nostro lavoro.

Infine indichiamo che le note introduttive anteposte in corsivo ai vari Libri sono del prof. Frajese stesso, come pure le note a piè di pagina indicate con un numero e stampate in caratteri più piccoli, mentre le note pure a piè di pagina, ma indicate con una lettera e stampate in caratteri meno piccoli, sono del traduttore.

LAMBERTO MACCIONI

NOTA BIOGRAFICA

Le notizie biografiche su Euclide sono talmente scarse, che perfino la data della *fioritura* e il luogo della nascita (o almeno della residenza) si ricavano soltanto per induzione. Così la data convenzionale del 300 a. C. per la composizione degli *Elementi*, cioè dell'opera fondamentale di Euclide, viene stabilita con sicurezza di buona approssimazione per il fatto che gli *Elementi* stessi presuppongono le opere di Platone e di Aristotele, ma vengono presupposti nelle opere di Archimede.

E che Euclide possa esser detto *di Alessandria* (per nascita o per residenza) si ricava da un passo (di non sicura autenticità, del resto) della *Collezione matematica* di Pappo (VII, p. 678; ed. Ver Eecke, vol. II, p. 507) in cui è detto che Apollonio trascorse lungo tempo insieme con gli scolari di Euclide *in Alessandria*.

Ed è certamente errata l'identificazione del nostro Euclide matematico col filosofo Euclide di Megara, vissuto intorno al 400 a. C.: identificazione che ebbe inizio sostanzialmente con Valerio Massimo (vissuto ai tempi di Tiberio) e che si prolungò attraverso i secoli, fino a Commandino (1572) che la respinse.

Circa la personalità di Euclide, può ricordarsi che Pappo giudica questi uomo assai scrupoloso e aperto verso gli altri cultori di matematica, dei quali non vuole attribuirsi i meriti (VII, 676). E si possono infine ricordare due aneddoti (per i quali rimandiamo all'*Introduzione*): aneddoti che non hanno alcun fondamento storico, e che ci dipingono (evidentemente in base alle opere) un Euclide cultore del rigore scientifico e del carattere assolutamente teorico della sua matematica.

Aggiungiamo poi che, oltre agli *Elementi*, vengono attribuite a Euclide varie altre opere minori: così gli *Pseudaria* (opera perduta), i *Data* (δεδόμενα) accessibili nell'edizione di Heiberg e Menge (vol. VI); il libro sulle *Divisioni delle figure* (περὶ

διαιρέσεων βίβλιον); i tre libri dei *Porismi* (dei quali s'è tentata la ricostruzione); i due libri (perduti) sui *Luoghi di superficie* (τόποι πρὸς ἐπιφανείᾳ); le *Coniche*, opera perduta, eclissata evidentemente da quella di Apollonio sullo stesso argomento (dell'opera euclidea ci parla tuttavia Pappo); l'*Ottica* (edita da Heiberg e Menge, vol. VII), e forse la *Sectio canonis* e l'*Introduzione all'armonia*, ambedue su argomenti riguardanti la musica.

Ma la fama di Euclide è affidata pressoché esclusivamente agli *Elementi*.

NOTA BIBLIOGRAFICA

sugli studi più recenti riguardanti gli Elementi di Euclide.

Questa nota, come già ha avvertito il Traduttore, non ha alcuna pretesa di completezza. Desideriamo soltanto indicare *alcuni* tra gli autori che, a nostro avviso, hanno recato contributi notevoli allo studio degli *Elementi* di Euclide, a partire dalla seconda metà del secolo decimonono.

Va anzitutto avvertito che, come è ovvio, non c'è (può dirsi) opera di storia della matematica che, trattando dell'antichità, non dedichi parte più o meno ampia agli *Elementi* di Euclide. Così, se prendiamo due opere fondamentali della fine del secolo scorso, quella di H. G. Zeuthen e quella di G. Loria, troviamo in esse notevoli contributi alla conoscenza dell'opera euclidea.

Il grande matematico, e storico della matematica, H. G. Zeuthen è, tra l'altro, autore di una pregevolissima *Histoire des mathématiques dans l'antiquité et le moyen age* edita a Copenhagen nel 1893 (la traduzione francese di J. Mascart fu pubblicata a Parigi nel 1902, presso Gauthier-Villars). In essa Zeuthen presenta interpretazioni nuove e suggestive degli *Elementi*: basti citare la famosa teoria sulla dimostrazione di esistenza delle figure geometriche mediante la costruzione (teoria annunziata pure in un congresso internazionale).

L'opera di Gino Loria (*Le scienze esatte nell'antica Grecia*, 1893-1902, 2ª ediz., Milano, Hoepli, 1914) ricca di notizie, dedica naturalmente a Euclide una sua parte. Va notato che per lungo tempo, fino all'inizio dell'attività storica dell'Enriques, il Loria fu considerato all'estero come unico rappresentante degli studi sulla storia della matematica greca in Italia.

Un posto particolare va fatto a T. L. Heath, benemerito cultore della storia della matematica greca. Di lui ricorderemo qui due opere fondamentali. Anzitutto l'edizione in lingua inglese degli *Elementi* di Euclide, con ampie introduzioni e ricchissimi

commenti (*The thirteen books of Euclid's Elements*, Cambridge, 1908; 2ª ediz., 1925: ristampa del 1956, Dover Publications inc., New York). La seconda opera fondamentale di Heath è quella: *A history of Greek Mathematics*, Oxford, 1921, pure con ampia parte dedicata a Euclide.

Ma in Italia un vero risveglio dell'interesse per la matematica greca si ebbe con Federigo Enriques. Di lui ci limiteremo qui a citare l'edizione in lingua italiana degli *Elementi* di Euclide (*Gli «Elementi» di Euclide e la critica antica e moderna*, editi da Federigo Enriques col concorso di diversi collaboratori [vol. I, Roma, ed. Stock, 1924; vol. II, Bologna, Zanichelli, 1930; vol. III, ivi, 1932; vol. IV, ivi, 1935]). I collaboratori per i singoli libri (o gruppi di libri) furono: Maria Teresa Zapelloni (anche traduttrice), Adriana Enriques, Amedeo Agostini, Guido Rietti, Ruth Struik. All'ultimo volume ebbe la ventura di collaborare anche chi scrive.

Tra i predecessori italiani dell'Enriques non vogliamo tacere sull'opera di Giovanni Vacca, il quale già nel 1916 pubblicò a Firenze *Il primo libro degli «Elementi»*: testo greco, versione italiana, introduzione e note.

Tra gli studiosi italiani degli *Elementi*, ci limiteremo a citare, in Italia, E. Carruccio (discepolo dell'Enriques, come chi scrive), il quale dedica a Euclide un capitolo della sua opera: *Matematica e logica nella storia e nel pensiero contemporaneo* (Torino, Gheroni, 1958).

Tra i successori dell'Enriques fuori d'Italia citeremo B. L. van der Waerden (specie per la sua scintillante opera: *Science Awakening*, trad. inglese di A. Dresden, Groningen, 1954) e l'ungherese Árpad Szábó (della sua feconda opera si veda in particolare: *Anfänge des Euklidischen Axiomensystems*, nella raccolta di Oskar Becker: *Zur Geschichte der griechischen Mathematik*, Darmstadt, 1965, pp. 355-461).

È stata anche eseguita recentemente una traduzione degli *Elementi* in lingua russa, con ampie note di commento (particolarmente notevole un volume dedicato ai libri dal settimo al decimo: D. D. Morduchai-Boltovski e I. N. Veselovski, Mosca-Leningrado, 1949).

Ricordiamo inoltre, anche per l'influenza esercitata su studi più recenti, la magnifica rivista «Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik» che in Germania venne pubblicata per alcuni anni precedenti la seconda guerra mondiale e che, dedicata principalmente alla matematica greca, nuova luce gettò anche sull'interpretazione dell'Euclide. Essa fu diretta dai grandi storici O. Neugebauer, J. Stenzel, O. Toeplitz. Il Neugebauer è in America il caposcuola per la

matematica pre-ellenica, e la sua opera, sia pure indirettamente, si riverbera pure sullo studio della formazione degli *Elementi* di Euclide. E tra i cultori dell'Euclide negli Stati Uniti d'America possiamo annoverare K. von Fritz, particolarmente in relazione a questioni connesse col *Teeteto* platonico.

In questi ultimi anni, poi, ha scritto notevoli articoli interpretativi sugli Elementi euclidei E. Stamatis, al quale si deve pure una edizione degli Elementi stessi (si veda inoltre il cenno a p. 22, nella *Premessa del Traduttore*).

Terminiamo (e chiediamo venia per l'assoluta incompletezza di questa nota) ricordando ancora, nel campo delle riviste che a più riprese si occupano di questioni riguardanti l'Euclide, il « Periodico di matematiche » (Bologna, Zanichelli), e « Archimede » (Firenze, Le Monnier), e ricordando infine l'attività svolta da Ludovico Geymonat anche nel campo della storia della matematica greca: in particolare ci piace di ricordare la sua *Storia della matematica* (con interessante trattazione su Euclide) contenuta nel volume I della *Storia delle scienze* edita dalla Utet (coordinata da N. Abbagnano, Torino, 1962).

ATTILIO FRAJESE

LIBRO PRIMO

Il libro primo è uno dei più interessanti fra i tredici che compongono gli Elementi.

E ciò non soltanto perché è uno dei meglio elaborati, nella sequela ininterrotta e incalzante delle sue proposizioni, *legate l'una all'altra in ferrea concatenazione fino a raggiungere la mèta del teorema di Pitagora, ma anche perché è al libro primo che è premessa la più gran parte dei* princìpi, *sui quali tutta l'opera è basata.*

Detti princìpi si dividono, negli Elementi, *in tre categorie: definizioni* (ὅροι = *termini*), *postulati* (αἰτήματα = *richieste*), *nozioni comuni* (κοιναὶ ἔννοιαι).

Nella sistemazione moderna della trattazione geometrica, o più in generale matematica, si parte oggi da alcuni concetti primitivi, *dei quali non viene data in via diretta alcuna esplicita definizione; così, per esempio, punto e retta non vengono oggi definiti. E ciò sembra a noi di palmare evidenza; se definire significa* costruire *un nuovo* concetto *partendo da* concetti *precedenti già definiti, dovremo pure cominciare da qualcosa che non potremo definire, ma che accetteremo come* concetto primitivo. *Di questi concetti primitivi forniremo poi una sorta di implicita definizione, circoscrivendone logicamente il significato attraverso proposizioni (postulati) che li collegano.*

Euclide procede, invece, in modo diverso; egli definisce *tutti gli « enti » geometrici, o aritmetici, dei quali si occuperà nella sua trattazione: definisce quindi anche il punto e la linea.*

È, questo, un errore logico di Euclide? Certamente lo è alla luce di una critica che si svolga in corrispondenza dell'assiomatica moderna; ma non lo è se si considera il comportamento di Euclide sotto l'aspetto storico, inquadrando gli Elementi *nel loro ambiente naturale, cioè nel quadro delle concezioni filosofico-scientifiche che agli* Elementi *sono contemporanee.*

Il modo di concepire una definizione è infatti presso i Greci, in particolare presso Euclide, essenzialmente diverso dal nostro.

Non si tratta per loro di costruire *concetti, quasi di* creare *nel nostro spirito quegli* enti *geometrici che vengono considerati: si tratta invece soltanto di* descriverli, *affinché possano essere facilmente* riconosciuti *attraverso una soddisfacente nomenclatura.*

Quegli enti *geometrici, cioè, esistono già: la definizione ha per Euclide soltanto il senso di individuarli. Ecco perché negli Elementi troviamo all'inizio, al primo posto, proprio quella «definizione» di* punto *alla quale la sistemazione moderna, partendo da altre vedute, ha rinunziato.*

Le definizioni premesse al libro primo sono ben ventitré. La prima, come s'è detto, è quella di punto, l'ultima è quella di rette parallele. La teoria delle rette parallele ha costituito, nella geometria greca e negli sviluppi ulteriori, la vera pietra d'inciampo nella trattazione geometrica, come vedremo.

Ed Euclide, dando la definizione di rette parallele come di rette che, giacendo sullo stesso piano, comunque vengano prolungate all'infinito (εἰς ἄπειρον), *non s'incontrano, anticipa già, in certo modo, la linea che egli seguirà sull'argomento nella sua trattazione.*

I postulati sono proposizioni primitive che si riferiscono agli enti geometrici prima definiti: le Nozioni comuni *sono anch'esse proposizioni primitive che sono intese come* comuni *alla geometria e ad altre scienze: esse corrisponderebbero in certo modo ai cosiddetti* assiomi.

Noi non distinguiamo più i postulati *dagli* assiomi: *li chiamiamo tutti postulati (o tutti, più modernamente,* assiomi) *intendendo che essi sono proposizioni* primitive *che si riferi-*

sono agli enti che vengon considerati: enti definiti e non definiti. Per questi ultimi, ripetiamo, i postulati offrono una sorta di implicita definizione, cioè (nel senso etimologico) di delimitazione, di determinazione.

Per esempio, noi non definiamo punto e retta, ma enunciamo il postulato: «due punti determinano una retta ed una sola». Non siamo ora più liberi di attribuire a punto e retta un significato arbitrario: dobbiamo attribuire loro un significato tale che essi soddisfino a quel postulato (e ad altri seguenti). Questo modo di concepire definizioni e postulati apre modernamente la via alla geometria astratta, *nella quale gli* enti geometrici *non sono più quelli corrispondenti alla nostra immediata intuizione, ma* enti *qualunque, purché soddisfacenti a quel dato sistema di postulati.*

Nulla di tutto questo, naturalmente, in Euclide, per il quale gli enti geometrici sono quelli della nostra intuizione, e son concepiti (ripetiamo) come realmente esistenti al di fuori di noi.

I postulati euclidei sono cinque. Nel primo si chiede *che dati comunque due punti si possa condurre la linea retta che li congiunge. La denominazione «linea retta»* (εὐθεῖα γραμμή) *corrisponde dunque, in Euclide, a quella nostra di «segmento di retta», cioè di* retta limitata, *avente quindi due estremi (come più in generale ci avverte la definizione terza: «Estremi della linea sono i punti»). Ma la retta limitata del postulato primo può essere prolungata quanto si vuole. Ciò è richiesto nel postulato secondo: che una linea retta* terminata *possa essere prolungata continuamente (cioè senza soluzioni di continuità).*

È questo un primo atteggiamento di Euclide (o, più in generale, della matematica greca ufficiale) *rispetto ai problemi dell'infinito.*

La linea retta non viene concepita da Euclide come attualmente *infinita, ma come infinita* potenzialmente: *cioè nel senso che qualunque retta limitata (= segmento di retta) può sempre essere ancora prolungato. In questo senso va intesa anche la dicitura contenuta nella definizione di rette parallele: si tratta*

di rette di un piano che, comunque vengano prolungate (*nel senso del postulato secondo*) *non s'incontrano.*

Ad ogni modo, il postulato secondo attribuisce alla linea retta il carattere di linea aperta, cioè di linea sempre prolungabile senza che si richiuda (*per dir così*) *su sé stessa. Ciò a differenza da quel che accade, ad esempio, sulla superficie sferica per i circoli massimi.*

Il terzo postulato si rivolge ad un altro ente geometrico: il cerchio.

Come appunto vedremo, la geometria elementare *di Euclide è quella della retta e del cerchio: Euclide, cioè, si serve soltanto di rette e di cerchi* (*con determinate limitazioni nell'uso*) *per le sue* costruzioni, *e* (*in definitiva*) *per le sue considerazioni geometriche. Ebbene: il terzo postulato chiede che con qualunque centro e qualunque raggio* (= distanza) *possa tracciarsi un cerchio.*

Innegabilmente i primi tre postulati hanno un chiaro carattere costruttivo: costruzione di linee rette per i primi due, di cerchi per il terzo. Si potrebbe dire che detti postulati rispondano all'uso della riga e del compasso. Ma va a questo punto fatto osservare che Euclide non nomina mai detti strumenti: egli (*come è stato già accennato nell'*Introduzione) *vuol mantenersi in un'atmosfera strettamente e puramente teorica, al di fuori di ogni* contaminazione *con la pratica.*

Il quarto postulato non si riferisce, almeno in modo immediato, ad una costruzione: esso chiede che si ammetta che tutti gli angoli retti siano uguali tra loro.

A scanso di equivoci, va precisato che nella definizione decima Euclide introduce gli angoli retti; quando una retta, innalzata *sopra un'altra, forma con questa angoli uguali, ciascuno di detti angoli è chiamato «angolo retto»* (*e la prima retta è detta* perpendicolare *alla seconda*). *Dunque gli angoli retti sono già uguali per definizione, ma soltanto a due a due quando sono* adiacenti: *non risulta, invece, dalla definizione, che siano uguali tra loro due angoli* retti *situati in modo qualunque sul piano, cioè senza che l'uno sia* adiacente *all'altro. Detta uguaglianza più generale viene pertanto da Euclide postulata: e si vede quindi sùbito che Euclide tende a enunciare*

correttamente come postulati anche «fatti» che sono intuitivamente evidenti. Abbiamo detto che Euclide tende *a far ciò perché, come la critica moderna riconoscerà, egli non esplica fino in fondo tale sua* tendenza, *sicché parecchi postulati risulteranno inespressi, con tacito ricorso all'intuizione.*

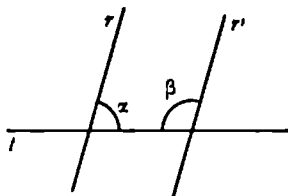
Il quinto, ed ultimo, postulato, rappresenta, invero, la più valida finezza *logica di Euclide, il quale rifiuta qui con massima energia di cedere alle lusinghe dell'intuizione. Si tratta di quel celebre* postulato delle parallele, *noto anche sotto il nome di postulato di Euclide, come a dire «il postulato per eccellenza», il «postulato propriamente detto», di Euclide. Con l'enunciazione di detto postulato Euclide rende rigorosa la sua teoria delle parallele, che viene esposta nel libro primo. Non sembra, quindi, che possa dirigersi contro una teoria quale quella di Euclide la critica di Aristotele contro i geometri del suo tempo: «Coloro che trattano la teoria delle parallele» dice in sostanza Aristotele*[1] *«non si accorgono di commettere una petizione di principio, assumendo ciò che non si potrebbe dimostrare se rette parallele non esistessero».*

E poiché nel breve intervallo di tempo tra Aristotele ed Euclide non si ha alcuna traccia di matematici appena notevoli, si presenta come assai verosimile l'ipotesi che la sistemazione rigorosa della teoria delle parallele contenuta negli Elementi *sia opera personale di Euclide: che quindi a buon diritto si chiami* postulato di Euclide *il quinto postulato degli* Elementi, *e* geometria euclidea *quella che sull'ammissione del postulato è fondata.*

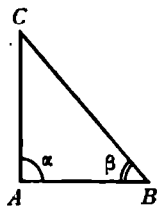
L'attribuzione personale a Euclide della teoria delle parallele è poi confortata dalla particolare elaborazione della teoria stessa nel contesto del libro primo degli Elementi, *sicché è dato quasi di scorgere in detta elaborazione qualcosa di* proprio *di Euclide.*

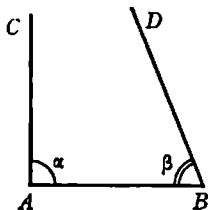
Va subito detto che la teoria delle parallele si compone essenzialmente di due teoremi fondamentali, l'uno inverso dell'altro. Nel primo (che per comodità chiameremo teorema

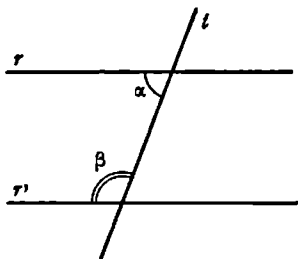
[1] *Anal.*, pr. II, 16, 65 *a*, 4-7. Il testo può anche essere tradotto: «Coloro che disegnano le parallele» ecc. Il senso non cambia di molto per ciò che a noi qui interessa.

diretto *delle parallele) si dimostra l'esistenza di rette parallele, facendo vedere che se due rette soddisfano certe relazioni angolari rispetto ad una terza retta* (trasversale), *le due rette, pur essendo contenute nello stesso piano, non s'incontrano, per quanto vengano prolungate. Le relazioni angolari consistono nel fatto che sono uguali i cosiddetti angoli alterni (interni o esterni), quelli corrispondenti, o che sono supplementari gli angoli coniugati interni (Se gli angoli α, β coniugati interni formati da* r, r′ *con la trasversale* t *dànno, sommati insieme, due angoli retti, le rette* r, r′ *sono parallele). Questo teorema diretto (che è esposto nelle proposizioni 27 e 28 del libro primo degli* Elementi) *viene da Euclide dimostrato soltanto in base ai primi quattro postulati, cioè senza far uso del famoso postulato quinto.*

Ma ora Euclide deve invertire *il teorema, scambiando tra loro ipotesi e tesi; deve cioè dimostrare che se due rette sono parallele, esse, tagliate da una trasversale, soddisfano a quelle certe relazioni angolari, formando (ad esempio) angoli alterni interni uguali, o angoli coniugati interni supplementari. Ma questo «teorema inverso»* resiste *a Euclide, il quale non riesce a darne la dimostrazione. D'altra parte esso è necessario per gli ulteriori sviluppi della teoria: su di esso, ad esempio, si fonda quel teorema importantissimo (la proposizione 32ª del libro primo degli* Elementi) *il quale afferma che la somma dei tre angoli di qualsiasi triangolo è uguale a due retti.*

Euclide, dunque, dopo di aver dato 28 proposizioni fondandole soltanto sui primi quattro suoi postulati, si trova nella necessità di enunciare il teorema inverso come postulato. E ciò egli in sostanza fa: soltanto che apparentemente il «teorema inverso» è presentato come teorema (è la proposizione 29ª): la sua dimostrazione si fonda però sul quinto postulato, che Euclide è costretto a enunciare. Anzi quinto postulato e teorema inverso delle parallele sono logicamente equivalenti («contronominali», secondo la nomenclatura tradizionale): ciascuna delle due proposizioni è derivata dall'altra e coinvolge l'altra.

Per veder meglio di che cosa si tratti, consideriamo un triangolo rettangolo ABC, con l'angolo retto α. Si può facilmente dimostrare che l'angolo β è acuto: infatti Euclide mostra (nella prop. 17 del libro primo) che la somma di due *angoli di un triangolo è sempre minore di due retti, e fornisce tale dimostrazione senza ricorrere al quinto postulato (che, come si è veduto, trova applicazione soltanto a partire dalla prop. 29).*

Proviamo ora a invertire *il teorema: consideriamo cioè due rette perpendicolari* CA, AB, *e dal punto* B *tracciamo, come in figura, una retta* BD *formante con* AB *un angolo* acuto.

Domanda: la BD *così tracciata incontrerà la* AC? *L'intuizione ci suggerisce immediatamente la risposta affermativa – senonché non riesce possibile trovare una dimostrazione di questo fatto intuitivamente evidente: le rette* BD, AC *si vanno, per dir così, avvicinando sempre più l'una all'altra, ma potrebbero essere rette* asintotiche, *che si vadano cioè sempre più avvicinando senza mai incontrarsi (come avviene, ad esempio, per l'iperbole e un suo* asintoto). *Che le rette* AC, BD *s'incontrino viene dunque da Euclide assunto come postulato, dal momento che egli non riesce a fornirne la dimostrazione. Si osservi che le rette* AC, BD *tagliate dalla trasversale, formano angoli* coniugati interni *α, β la cui somma è minore di due retti (essendo uno retto ed uno acuto). Ci si libera facilmente dal caso particolare in cui α sia retto, e si giunge così al quinto postulato, il cui enunciato è essenzialmente il seguente: se due rette, tagliate da una trasversale, formano angoli coniugati interni la cui somma sia minore di due retti, le due rette si incontrano.*

Ne consegue il teorema inverso *delle parallele: cioè le rette parallele* r, r' *devono formare angoli coniugati interni supplementari. Se, infatti, la somma α + β non fosse uguale a due retti, da una delle due parti rispetto alla trasversale* t *detta somma sarebbe minore di due retti: ma allora, per il quinto*

postulato, le due rette r, r' *s'incontrerebbero, contro l'ipotesi del loro parallelismo. E, viceversa, una volta ammesso che due rette parallele* r, r' *formino angoli coniugati supplementari* α, β, *segue che ove fosse* $\alpha + \beta$ *minore di due retti le rette non potrebbero esser parallele, cioè s'incontrerebbero; si deduce cioè il quinto postulato. Dunque da quest'ultimo si ricava il teorema inverso delle parallele e dal teorema inverso delle parallele si ricava il quinto postulato. Cioè il quinto postulato e il teorema inverso delle parallele sono logicamente equivalenti* (= *contronominali*) [2].

Possiamo dunque dire, in conclusione, che Euclide, dopo aver dato 28 proposizioni basate sui primi quattro suoi postulati, deve dare la ventinovesima come postulato, non essendo riuscito a dimostrarla.

Soltanto egli non dà direttamente la prop. 29 come postulato, ma come tale enuncia (nel postulato quinto) una proposizione che alla 29 è logicamente equivalente.

Se il quinto postulato (o il teorema inverso delle parallele) resistette ai tentativi di dimostrazione di Euclide, sappiamo oggi che ciò non torna a disonore del grande geometra, ma anzi costituisce il suo più alto titolo d'onore.

La storia dei tentativi di dimostrazione del quinto postulato attraverso i secoli mostra infatti che i successori di Euclide non fecero altro che sostituire al quinto postulato un altro postulato, più nascosto per dir così, cioè facente ricorso all'intuizione in modo che si potrebbe dire più insidioso.

Si illuse, quindi, chi ritenne di aver dimostrato il suddetto postulato.

Ma Euclide, che è pure giustamente accusato dalla critica moderna di non avere enunciato esplicitamente tutti i postulati

[2] Sono *contronominali* due proposizioni quando ciascuna di esse assume come ipotesi la negazione della tesi dell'altra, e come tesi la negazione dell'ipotesi dell'altra (cfr. nota a I, 17).

occorrenti, ma di averne tacitamente ammesso taluno di particolare valore intuitivo, qui non si lascia trarre in inganno o illudere in alcun modo, nonostante la proposizione da dimostrare abbia il più chiaro contenuto intuitivo: non sostituisce larvatamente postulato a postulato, ma enuncia esplicitamente il suo postulato quinto, quasi lanciando ai suoi successori vicini e lontani una superba sfida: Dove io, Euclide, non son riuscito, non riuscirete neppure voi, *sembra dire.*

E lo sviluppo della storia ha dato ragione a Euclide: nel secolo decimonono, dopo i lunghi infruttuosi tentativi di dimostrazione del quinto postulato svoltisi attraverso i secoli, si giunge ad una conclusione sorprendente: che non è stata trovata la dimostrazione unicamente perché è impossibile trovarla: in altre parole, che il quinto postulato è indimostrabile.

Per vedere come si sia potuti giungere ad una tale dimostrazione di indimostrabilità *occorre domandarsi quale significato avrebbe la dimostrazione del quinto postulato. Ripetiamo che Euclide dà le prime ventotto proposizioni applicando soltanto i primi quattro postulati e senza ricorrere al quinto.*

Questo gli occorre, invece, per dimostrare la proposizione ventinovesima. Euclide, quindi, avrebbe dovuto inserire la sua eventuale dimostrazione tra la 28ª e la 29ª proposizione, cioè avrebbe dovuto far vedere che il suo quinto postulato è conseguenza delle prime 28 proposizioni. In altri termini, il quinto postulato dovrebbe già esser contenuto implicitamente, in nuce, *per dir così, nel sistema delle prime ventotto proposizioni.*

Si è allora proceduto a costituire un nuovo sistema formato ancora dalle prime 28 proposizioni, ma aggiungendo ad esse non già il quinto postulato, ma la sua negazione. *Se il quinto postulato fosse dimostrabile, cioè se fosse conseguenza delle prime 28 proposizioni, l'insieme di dette proposizioni e della negazione del quinto postulato dovrebbe risultare contraddittorio. Nessuna contraddizione, invece, è stata rilevata, né può esser rilevabile, in geometrie di tal genere: fondate cioè sulle prime 28 proposizioni e sulla negazione del quinto postulato.*

Si tratta delle cosiddette geometrie non euclidee, le quali, se pure non corrispondenti alla nostra comune intuizione spaziale, sono tuttavia ineccepibili logicamente.

È appunto la perfetta coerenza delle geometrie non-euclidee che fornisce la prova della indimostrabilità *del quinto postulato di Euclide.*

Secondo il grande matematico e storico danese Zeuthen, i postulati hanno esclusivamente valore costruttivo: corrispondono cioè a costruzioni elementari *di enti geometrici, dei quali in tal modo viene dimostrata l'esistenza. Ciò è evidente per i primi tre postulati (costruzione del segmento di retta, del suo prolungamento, del cerchio). Anche per il quinto postulato si può facilmente rilevare un carattere costruttivo: si tratta infatti delle condizioni affinché due rette si incontrino, ossia perché si possa costruire (ed esista) il loro punto d'intersezione.*

Più difficile è, invece, attribuire un carattere costruttivo al quarto postulato (« tutti gli angoli retti sono uguali tra loro »). Sembra quasi che esso rappresenti una nota stonata, in mezzo agli altri: per quanto esso debba precedere necessariamente il quinto, dove « due retti » (e quindi « un angolo retto ») vengono assunti quasi come unità di misura (di misura assoluta, diremmo noi oggi, cioè invariabile). Ma secondo Zeuthen il quarto postulato trova il suo posto assieme agli altri per il fatto che stabilisce l'univocità del prolungamento della retta richiesto *nel postulato secondo. Se tutti gli angoli retti sono uguali tra loro, risultano uguali anche i loro doppi, cioè quelli che noi chiamiamo angoli piatti. E l'uguaglianza degli angoli piatti porta con sé appunto l'unicità del prolungamento del segmento di retta oltre un suo estremo.*

Senza negare agli argomenti del grande Zeuthen il loro evidente valore, chi scrive sostiene anche una differente interpretazione unitaria dei cinque postulati euclidei [3].

Le figure geometriche, che per Platone dovrebbero essere soprattutto oggetto di contemplazione, sono, invece, per Euclide argomento di studio e di considerazioni geometriche. Ma perché le figure stesse possano divenire oggetto di studio, occorre anzi-

[3] V. A. Frajese, *Sul significato dei postulati euclidei* in: « Scientia », dicembre 1950, pp. 299-305 e: *Sur la signification des postulats euclidiens* in: « Archives internationales d'histoire des sciences », 1951, n. 15, pp. 383-392.

tutto confrontarle tra loro: occorre cioè stabilire un collegamento *tra di esse. Nella matematica moderna, il concetto di corrispondenza mette pure in opera collegamenti, e così gli elementi di un insieme vengono* collegati *tra loro attraverso la* struttura *che l'insieme riceve, mediante operazioni definite con date proprietà.*

Per Euclide il collegamento tra le figure si effettua mediante costruzioni ed altri mezzi che si chiede di poter adoperare: richiesta che verrebbe appunto, secondo la nostra veduta, effettuata nei postulati.

Così nel postulato primo verrebbero collegati, mediante un segmento di retta, due punti qualunque; il prolungamento della retta poi (postulato secondo) permetterebbe di raggiungere (di collegare) *anche le regioni più* lontane *del piano. Un collegamento speciale tra due rette consiste nel loro incontro: le condizioni perché tale incontro avvenga sono stabilite dal postulato quinto.*

Ma in dette condizioni entrano in gioco considerazioni di uguaglianza e di disuguaglianza (confronti che pure collegano *le figure).*

Per riconoscere l'uguaglianza (ed anche la disuguaglianza) tra segmenti provvede il postulato terzo (il cerchio è una figura che permette, ad esempio, di riconoscere che due segmenti sono uguali se sono raggi dello stesso cerchio o riconducibili ad esser tali). Vedremo poi che nelle proposizioni 2 e 3 del libro primo Euclide completa quanto permette il postulato terzo, ed insegna ad effettuare il trasporto *del segmento.*

Per gli angoli, invece, non si può riconoscere in linea generale l'uguaglianza effettuandone costruttivamente il trasporto come è possibile fare per i segmenti. Euclide ricorrerà (sia pure quasi a malincuore e in linea eccezionale) ad una specie di trasporto meccanico (movimento vero e proprio della meccanica) nelle proposizioni 4 e 8 del libro primo. Ma almeno per una specie di angoli (quelli retti) Euclide può fissare in un postulato l'uguaglianza; è ciò che fa nel postulato quarto. Tra gli angoli retti, cioè, ovunque essi siano situati nel piano, si effettua così una specie di collegamento a distanza: si direbbe una specie di collegamento radio, senza fili, *in contrapposizione*

al collegamento con fili (*cioè con rette dei postulati primo e secondo, e con archi di cerchio nel postulato terzo*).

Passiamo ora alle Nozioni Comuni. *Esse erano, nelle edizioni pre-critiche degli* Elementi *di Euclide, ben nove. Ma la implacabile critica del grande « editore » Heiberg ne ha riconosciuti genuini soltanto cinque. Si può dire che queste « nozioni comuni » diano soprattutto una definizione implicita della* uguaglianza. *Così, ad esempio, la prima Nozione comune ne dà la proprietà transitiva: cose uguali ad una stessa sono anche uguali fra loro. E si osservi che l'uso del plurale* (« *cose uguali tra loro* ») *coinvolge anche la proprietà simmetrica dell'uguaglianza.*

L'uguaglianza *della quale Euclide tratta, nelle* Nozioni Comuni *e nelle proposizioni seguenti, è sempre l'uguaglianza riferita alla grandezza. Così per le figure piane corrisponde all'uguaglianza di estensione, che oggi chiamiamo* equivalenza: *analogamente per le figure solide.*

Ciò è desumibile anche soltanto dalle nozioni comuni seconda e terza, che in sostanza stabiliscono che somme (*o differenze*) *di* cose *uguali sono uguali. Queste proposizioni, infatti, valgono soltanto per l'equivalenza, e non per la nostra uguaglianza in senso stretto.*

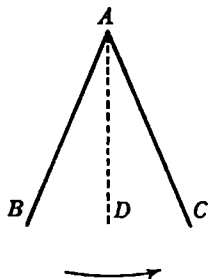
Finalmente nell'ultima Nozione comune (« *il tutto è maggiore della parte* ») *l'Enriques vide un abbozzo di quelle proprietà dell'ordine, che oggi enunciamo come postulati, e che invece risultano non espresse esplicitamente da Euclide.*

L'interpretazione costruttiva *dei postulati data da Zeuthen ben s'inquadra in una concezione più generale del matematico danese. Egli ritiene che i geometri greci risolvessero le questioni esistenziali attraverso la costruzione, basata* (*quest'ultima*) *sulle costruzioni elementari* richieste *nei postulati* [4].

[4] H. G. Zeuthen, *Die geometrische Construction als Existenzbeweis in der antiken Geometrie*, in: « Math. Annalen », 1896, Bd. 47.

Così, ad esempio, Euclide non introduce il quadrato *se prima non ha insegnato (nella I, 46)* [5] *a costruirlo. E possiamo aggiungere che nella I, 5, ossia nel teorema sull'uguaglianza degli angoli alla base del triangolo isoscele, Euclide non si serve di un più semplice processo dimostrativo soltanto perché gli occorrerebbe, per detto processo, la considerazione della bisettrice dell'angolo al vertice, bisettrice che ancora non ha insegnato a costruire (ciò che fa soltanto nella I, 9).*

Si va facendo strada, tuttavia, una tendenza ad attenuare *la portata della teoria di Zeuthen sulla dimostrazione di esistenza attraverso la costruzione: nel senso che Euclide si comporta nel modo indicato* soltanto entro i limiti delle possibilità, *e che di fronte all'impossibilità della costruzione da effettuarsi (con i mezzi indicati dai postulati) egli non esita ad ammettere l'*esistenza *di figure geometriche ricorrendo all'intuizione. Si tratta di un'intuizione di* continuità: *intuizione che i matematici moderni hanno, per dir così, codificato attraverso precise enunciazioni di postulati* [6], *ed hanno posto a base di ogni dimostrazione di carattere esistenziale.*

*Così, per esempio, l'*esistenza *della bisettrice di un angolo, prescindendo dalla costruzione, può essere ammessa in base ad un postulato di continuità. È, del resto, appunto un'intuizione di continuità quella che ci permette di affermare che un lato* AB *di un angolo* BAC, *rotando nel senso della freccia intorno al punto fisso* A *fino a sovrapporsi all'altro lato* AC, *passa necessariamente per una certa posizione intermedia* AD *corrispondente alla bisettrice dell'angolo (cioè tale da formare l'angolo* BAD *uguale all'angolo* DAC).

Fatto sta che lì dove Euclide può ricorrere alle costruzioni dei postulati per mostrare l'esistenza delle figure lo fa senz'altro:

[5] Con la scrittura I, 46 (o I, 46) intendiamo la proposizione 46ª del libro I. E così in ogni altra citazione del genere.

[6] I primi furono, pressoché contemporaneamente e in forme diverse, Riccardo Dedekind (1872) e Giorgio Cantor.

in questi casi la teoria di Zeuthen è perfettamente valida. Ma quando una costruzione del genere non è possibile o conveniente, Euclide ne fa, come si è detto, a meno.

Così per esempio, nel libro XII non esita, nell'applicazione del cosiddetto metodo di esaustione, *ad ammettere sistematicamente l'esistenza della quarta proporzionale dopo tre grandezze date, quarta proporzionale che egli non potrebbe costruire, come ad esempio nella XII, 2 nella quale si ammette l'esistenza della quarta proporzionale dopo due quadrati e un cerchio. Così, ancora a titolo di esempio, nella X, 6 Euclide ammette l'esistenza delle* n*.esima parte (per* n *intero qualunque) di una qualsiasi grandezza, cioè ammette un* postulato della divisibilità *che viene modernamente ricavato come caso particolare del più generale postulato della continuità.*

E nella nota introduttiva al libro quinto ci renderemo conto del fatto che l'atteggiamento più disinvolto (per dir così) di Euclide nei riguardi di questioni esistenziali comincia proprio dopo che all'inizio dello stesso libro quinto Euclide introduce quello che i tardi posteri hanno chiamato postulato di Archimede, *e che rappresenta un primo notevole passo verso il concetto rigoroso di continuità.*

Come si svolge il libro primo, dopo i princìpi, nelle proposizioni (teoremi *e* problemi) *vere e proprie? Abbiamo già accennato al fatto che lo svolgimento del libro primo è assai elaborato, e rappresenta una delle migliori* prestazioni *del trattatista Euclide.*

Possiamo dividere il primo libro in due parti: la prima dall'inizio fino alla proposizione 28ª compresa, la seconda dalla preposizione 29ª fino al termine del libro, cioè fino alla proposizione 48ª, che è l'ultima. Le due parti risultano nettamente caratterizzate da una circostanza fondamentale: per le prime 28 proposizioni Euclide non fa uso del quinto postulato, mentre per le seguenti, dalla 29ª proposizione in poi, di detto postulato (direttamente o indirettamente) fa uso. Potremmo dire che l'insieme delle prime ventotto proposizioni del libro primo costituisca una trattazione di geometria non-euclidea, sicché il primo introduttore di una geometria non-euclidea sarebbe (strano

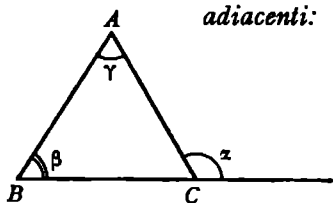
a dirsi) proprio Euclide. Intendiamo geometria non-euclidea in senso (diciamo così) blando: *non si tratta di una geometria (come quella non-euclidea moderna) che* nega *il quinto postulato, ma di una geometria che ne prescinde.*

Dalla composizione del libro primo è visibile lo sforzo di Euclide per ritardare quanto possibile l'uso del quinto postulato: sembra che egli abbia voluto mostrare, moltiplicando le proposizioni, fino a qual punto si possa giungere senza il detto uso.

Così, per esempio, la I, 17 è una proposizione nella quale (senza fare uso, naturalmente, del quinto postulato) si dimostra che la somma di due angoli di qualunque triangolo è sempre minore di due retti (vi abbiamo già prima accennato). Orbene: detta proprietà dei triangoli può ricavarsi come corollario immediato del teorema più generale sulla somma dei tre *angoli di un triangolo uguale a due retti. E questo teorema più generale Euclide lo dà nella I, 32: per dimostrarlo si serve del quinto postulato.*

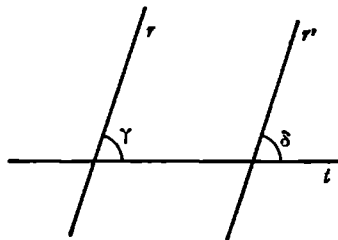
Ma la I, 17 non viene utilizzata nelle proposizioni intermedie tra la 17ª e la 32ª: Euclide avrebbe quindi potuto fare a meno di enunciarla e di dimostrarla, e avrebbe potuto passare direttamente dalla 16ª alla 18ª proposizione. E poiché, come è stato già avvertito, Euclide introduce di regola negli Elementi *soltanto proposizioni che, a guisa di* lemmi, *servono per dimostrare proposizioni che seguono, il lettore è condotto a domandarsi* perché *Euclide abbia voluto introdurre negli* Elementi *la I, 17, proposizione apparentemente inutile. Può trovarsi appunto la spiegazione pensando che Euclide, non potendo giungere (senza fare uso del quinto postulato) al teorema sulla somma dei* tre *angoli del triangolo, abbia voluto tuttavia mostrare che ad un primo* avvicinamento *a detto teorema, con la considerazione di due soli angoli, poteva giungersi senza bisogno del postulato stesso. In tal modo viene distinto, sceverato, in un vero* esprit de finesse, *quanto dal quinto postulato dipende e quanto non dipende. Così, tanto per citare un esempio, il fatto che in un triangolo non possano esistere due angoli retti è diretta conseguenza della I, 17, e quindi risulta indipendente dal postulato quinto.*

Ad una funzione del genere adempie anche la proposizione I, 16 (della quale la I, 17 è un semplice corollario). Si tratta del teorema che per brevità chiameremo teorema dell'angolo esterno maggiore: *in ogni triangolo un angolo esterno è maggiore di ciascuno degli angoli interni non adiacenti:*

$$\alpha > \beta \ ; \ \alpha > \gamma$$

Questo teorema è, può dirsi, contenuto anch'esso nella I, 32, nella quale, insieme al fatto che la somma dei tre angoli di un triangolo è uguale a due retti, si dimostra anche quello che per brevità chiameremo teorema dell'angolo esterno somma: *in ogni triangolo un angolo esterno è uguale alla somma dei due angoli interni non adiacenti:*

$$\alpha = \beta + \gamma$$

(*se ne ricava sùbito che* α *è maggiore di ciascun addendo* β, γ). *Ma la I, 16, cioè il teorema dell'angolo esterno maggiore, è tutt'altro che inutile: esso serve, tra l'altro, per dimostrare il teorema fondamentale I, 27-28, cioè il cosiddetto* teorema diretto delle parallele: *ad esempio che se due rette, tagliate da una trasversale, formano angoli corrispondenti uguali, esse sono parallele.*

È opportuno, anzi, mostrare subito come il teorema diretto delle parallele I, 27-28 sia conseguenza immediata del teorema dell'angolo esterno maggiore I, 16.

Possiamo infatti interpretare quest'ultimo teorema nel modo seguente. Son date due rette BA, CA *che si incontrano nel punto* A, *e che quindi* non sono parallele. *Esse, tagliate dalla trasversale* BC, *formano gli angoli* corrispondenti *disuguali* α, β. *L'incontro delle rette porta cioè sempre come conseguenza la disuguaglianza degli angoli corrispondenti. Sicché, se gli*

angoli corrispondenti γ, δ *formati con una trasversale* t *da due rette* r, r' *sono uguali, le rette stesse sono necessariamente parallele* (*infatti se si incontrassero darebbero luogo alla relazione di disuguaglianza tra gli angoli corrispondenti, in base al teorema dell'angolo esterno maggiore*).

Risulta così dimostrato, applicando la I, 16 (*proposizione utile quanto mai*) *il teorema diretto sulle parallele: I, 27-28.*

Diamo ora qualche cenno sulla seconda parte del libro primo (*dalla 29ª alla 48ª proposizione*).

In essa viene anzitutto (*I, 29*) dimostrato *il teorema inverso sulle parallele: se due rette sono parallele, esse, tagliate da una trasversale, formano angoli coniugati interni* (*supplementari* (*o, ciò che fa lo stesso, angoli alterni interni o corrispondenti uguali, ecc.*).

Come è stato già detto, questo teorema inverso è logicamente equivalente al quinto postulato: ne è la proposizione contronominale, come verrà più minutamente mostrato nella nota alla relativa proposizione I, 29 (*ed in quella alla I, 17*).

Dunque il quinto postulato entra senz'altro nel sistema delle proposizioni, per la dimostrazione *del teorema inverso sulle parallele.*

È poi su questa I, 29 che si appoggeranno la già nominata I, 32 sulla somma dei tre angoli di un triangolo e sull'angolo esterno somma, e inoltre tutti i seguenti teoremi sui parallelogrammi. Come applicazione di questi verrà poi dimostrato il cosiddetto teorema di Pitagora *sul triangolo rettangolo, col quale il libro primo si chiude* (*I, 47, più la I, 48 che ci dà il teorema inverso*).

A. F.

Si avverte che nel corso dei singoli libri le note a piè di pagina, richiamate con numero progressivo per ciascun libro, sono del curatore A. Frajese, mentre le note filologiche richiamate, proposizione per proposizione, con lettere dell'alfabeto, sono del traduttore L. Maccioni.

DEFINIZIONI

(TERMINI, ὅροι) [a].

I. Punto è ciò che non ha parti [1].

II. Linea è lunghezza senza larghezza [2].

a. In greco ὅρος significa appunto termine, linea o segno di confine.

[1] È, questa del punto, la più celebre definizione di Euclide. Essa viene comunemente interpretata nel senso che il punto, non avendo parti, non ha neppure estensione alcuna: Euclide introdurrebbe in tal modo, nella sua prima definizione, il punto quale ente idealizzato, cioè il punto privo di dimensioni della *geometria di precisione*.

Chi scrive lascia naturalmente libero il lettore di associarsi a tale *communis opinio*: tuttavia osserva che la prima definizione si riferisce tanto al punto quanto all'unità, la quale viene pure definita come *non avente parti* (cfr. PLATONE, *Sofista*, 245 *a*, *Repubblica*, 526 *a*, ecc.). Già Proclo, del resto, nel suo *Commento al primo libro degli Elementi di Euclide*, nota l'identità delle due definizioni, distinguendo tuttavia, con i Pitagorici, il punto come *unità avente posizione* (ed. Friedlein, pp. 95, 21-96, Ver Eecke, pp. 85-96).

L'assimilazione del punto all'unità, secondo vedute pitagoriche, farebbe pensare non già ad un punto quasi evanescente, privo di dimensioni, ma ad un punto esteso, che (per dir così) abbia dimensioni *unitarie*. Nella sua prima definizione, dunque, Euclide avrebbe, a guisa di lapidario frontespizio, lasciato un ricordo, una traccia, dell'antica geometria pitagorica, riecheggiandone la dottrina fondamentale. Si osservi, infine, che la def. I non viene mai usata nel séguito: potrebbe esser tolta senza alcun danno per l'economia generale dell'opera. Infatti il punto (senza dimensioni) viene di nuovo definito nella def. III (cfr. A. FRAJESE, *Attraverso la storia della matematica*, 2ª ediz., Firenze, Le Monnier, 1969, pp. 92-95).

[2] Qui siamo in piena atmosfera di enti geometrici idealizzati: la linea (quindi anche la retta, che è una particolare linea) è completamente *priva di larghezza* (ἀπλατές): è lunghezza *pura*.

III. Estremi di una linea sono punti [3].

IV. Linea retta è quella che giace ugualmente rispetto ai punti su essa (cioè, ai suoi punti) [a] [4].

V. Superficie è ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza [b].

a. Di discutibile traduzione e non facile intelligibilità. In greco ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται. Ora, ἐξ ἴσου significa: « in condizione di uguaglianza », ma esso si riferisce a « rispetto ai punti su essa », τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις – nel qual caso si intende « giace ugualmente rispetto ai punti su essa », ossia i punti vanno intesi come « posti ugualmente », senza che siano inclinati in un senso o nell'altro –, oppure si riferisce a κεῖται, « giace »? Allora dovremmo intendere: « la retta che, nei punti – o: mediante i punti – posti su essa, giace ugualmente (o: uniformemente) », cioè la retta che, data la posizione dei punti, non presenta deviazioni. Insomma, nel primo caso, se verifichiamo la linea rispetto ai punti abbiamo una linea come *distanza* fra punti (anche due, per es.), nel secondo, verificando la posizione dei punti rispetto alla linea, abbiamo una linea come *direzione*. Non possiamo dire altro, filologicamente, se non che la dizione è passabilmente oscura, pur se l'idea fondamentale di Euclide sembra esser quella di una linea che presenta la stessa forma rispetto a tutti i suoi punti. Manteniamo così la significazione tradizionale.

b. Euclide e più tardi scrittori usano il termine greco ἐπιφάνεια per superficie in generale, ed invece, come vedremo, ἐπίπεδον

[3] Il punto viene qui definito nuovamente: essendo *estremo* di una linea risulta privo di dimensioni. Questa definizione si ricollega alla sesta, che definisce le linee come estremi della superficie, ed alla seconda del libro decimoprimo, che definisce la superficie come estremo, limite, del solido (στερεοῦ πέρας) cioè con gli stessi termini usati da Platone nel *Menone* (76 *a*) per definire la figura bidimensionale. Per questa coincidenza, e per un accenno di Aristotele (*Metafisica*, I, 992 *a*) al fatto che Platone preferiva chiamare il punto *principio di linea* (ἀρχὴ γραμμῆς) sorge l'idea di collegare a Platone l'insieme delle definizioni euclidee che dal solido discendono alla superficie, dalla superficie alla linea, dalla linea al punto (cfr. A. FRAJESE, *Attraverso* cit., pp. 94-95, ed ancora: A. FRAJESE, *Platone e la matematica nel mondo antico*, Roma, Studium, 1963, pp. 93 segg.). Va infine osservato che la linea è considerata come terminata, cioè avente estremi: qui e costantemente (salvo rarissima eccezione) negli *Elementi*.

[4] Definizione oscura, per la quale ogni traduzione appare incerta. Sembra che con essa Euclide voglia intendere che sulla retta non vi sono punti privilegiati, così come sul piano (def. VII) non vi sono rette privilegiate.

VI. Estremi di una superficie sono linee.

VII. Superficie piana è quella che giace ugualmente rispetto alle rette su essa (cioè, alle sue rette)[a].

VIII. Angolo piano è l'inclinazione reciproca di due linee su un piano, le quali si incontrino fra loro e non giacciano in linea retta[5].

IX. Quando le linee che comprendono l'angolo sono rette, l'angolo si chiama rettilineo.

X. Quando una retta innalzata su una [altra] retta forma[b] gli angoli adiacenti uguali fra loro, ciascuno dei due angoli uguali è retto, e la retta innalzata

(aggettivo sostantivato) per superficie *piana* (come specie del genere, dunque); quanto appunto ad Euclide, egli usa un'unica volta ἐπιφάνεια intendendo un piano, invece di ἐπίπεδον, nella definizione XI del libro undicesimo.

a. Con le opportune mutazioni, si segue esattamente la definizione IV di linea retta; non ci è così permesso, ovviamente, di risolvere in modo definitivo le oscurità di quella stessa definizione (sempre, dal punto di vista filologico).

b. Letteralmente è piuttosto *fa, produce.*

[5] La definizione euclidea di angolo appare tautologica: essa infatti sostituisce al concetto di angolo quello, non definito, di inclinazione. Quest'ultima parola (κλίσις), tuttavia, è di uso familiare nel linguaggio comune, sicché la definizione adempie ancora al compito « descrittivo ».

Va osservato, del resto, che il concetto di angolo viene solo modernamente chiarito. Piuttosto si osservi che Euclide non considera senz'altro due rette che s'incontrino in un punto (vertice dell'angolo), ma più in generale due « linee ». È soltanto nella definizione seguente (n. IX) che si definisce quell'angolo particolare (detto *angolo rettilineo*) che è compreso da linee rette (e che è l'unica specie di angolo che noi oggi di solito consideriamo). Questo modo di definire più in generale l'angolo come compreso tra linee qualunque, costituisce una delle pochissime tracce che nell'opera euclidea si trovano della più antica teoria degli angoli curvilinei. Rinviamo per questa alla nota alla proposizione XVI del libro terzo.

Si noti, infine, che viene da Euclide esplicitamente escluso che i due lati dell'angolo giacciano in linea retta: viene cioè escluso l'angolo piatto. Quest'ultimo è per noi un angolo vero e proprio in base alla nostra concezione di angolo come parte di piano; sorge inoltre per considerazioni di continuità, pensando, ad esempio, alla rotazione di una ipotetica lancetta di un orologio. Ma, come s'è già accennato nella Nota introduttiva al libro primo, considerazioni esplicite di continuità vengono, almeno fino ad un certo punto della trattazione, evitate nella geometria greca.

si chiama perpendicolare [a] a quella su cui è innalzata.

XI. Angolo ottuso è quello maggiore di un retto.

XII. Angolo acuto è quello minore di un retto.

XIII. Termine è ciò che è estremo di qualche cosa.

XIV. Figura è ciò che è compreso da uno o più termini [6].

XV. Cerchio è una figura piana compresa da un'unica linea [che si chiama circonferenza] tale che tutte le rette, le quali cadano sulla [stessa] linea[, cioè sulla circonferenza del cerchio,] a partire da un punto fra quelli che giacciono internamente alla figura, sono uguali fra loro [b].

XVI. Quel punto si chiama centro del cerchio.

XVII. Diametro del cerchio è una retta condotta per il centro e terminata da ambedue le parti dalla circonferenza del cerchio, la quale retta taglia [c] anche il cerchio per metà.

XVIII. Semicerchio è la figura compresa dal diametro e dalla circonferenza [d] da esso tagliata. E centro del

a. L'aggettivo κάθετος di una retta, appunto *perpendicolare*, significa letteralmente « lasciata, o fatta cadere »; insomma, è l'idea del filo a piombo lasciato cadere sul terreno.

b. Malgrado i Mss. le contengano, Heiberg espunge le parole (meno *stessa*, che è nostra) poste fra parentesi quadre, del resto omesse da altre antiche fonti nel riportare la definizione. L'espunzione di Heiberg trovò poi conferma nel papiro Ercolanense n. 1061, successivamente scoperto (cfr. HEIBERG, *Hermes*, XXXVIII, 1903, p. 47).

c. Cioè: divide.

d. Euclide usa la parola περιφέρεια, circonferenza, per una parte della circonferenza, vale a dire un arco della circonferenza di un cerchio. Quanto alle parole « E centro del semicerchio, ecc. », esse appaiono nel commentario di Proclo *In primum Euclidis elementorum librum*, ed. Friedlein, e non nei Mss.; tuttavia, Proclo

[6] La figura è quindi, per Euclide, essenzialmente *finita*. Così, per esempio, la retta considerata da Euclide è ciò che noi chiamiamo « segmento di retta ». Si parla quindi, negli *Elementi*, di *prolungamento* di una retta: anzi il postulato II chiede appunto che una retta possa esser sempre prolungata. Si tratta quindi di una retta potenzialmente, ma non attualmente, infinita.

semicerchio è quello stesso che è anche centro del cerchio.

XIX. Figure rettilinee sono quelle comprese da rette, vale a dire: figure trilatere quelle comprese da tre rette, quadrilatere quelle comprese da quattro, e multilatere quelle comprese da più di quattro rette [a].

XX. Delle figure trilatere, è triangolo equilatero quello che ha i tre lati uguali, isoscele quello che ha soltanto due lati uguali, e scaleno quello che ha i tre lati disuguali [b].

XXI. Infine, delle figure trilatere, è triangolo rettangolo quello che ha un angolo retto, ottusangolo quello che ha un angolo ottuso, ed acutangolo quello che ha i tre angoli acuti.

XXII. Delle figure quadrilatere, è quadrato quella che è insieme equilatera ed ha gli angoli retti [c], rettangolo [d]

nota ad un certo punto (ed. Friedlein, p. 160), anche assurdamente, che il semicerchio è la sola figura piana ad avere il centro sul proprio perimetro, e questo fa piuttosto propendere a che le parole in questione siano genuine.

a. È probabile, a quanto risulta, che siano proprio di Euclide le parole *trilatere* (τρίπλευρα, cioè τρίπλευρα σχήματα, figure di tre lati), *quadrilatere* (τετράπλευρα, di quattro lati) e *multilatere* (πολύπλευρα, di molti lati); si distinguono così le varie figure comprese nella classe delle figure rettilinee, anzi, col suo uso di τετράπλευρον, quadrilatero, Euclide pare voglia eliminare un certo uso ambiguo della parola τετράγωνον ad indicare una figura di quattro lati, mentre egli la restringe formalmente al solo quadrato.

b. Per curiosità filologica, ad uso del lettore: isoscele, ἰσοσκελής, significa « con gambe (gamba, σκέλος) uguali », scaleno poi, σκαληνός, di un triangolo che non abbia due lati uguali, è parola da Proclo (*op. cit.*, pp. 168, 24) connessa con « zoppicare », σκάζειν, da altri riferita a σκολιός, « curvo, incurvato, di sghembo ».

c. Letteralmente: « equilatera e rettangola », ὀρθογώνιον (σχῆμα, cioè figura rettangolata).

d. Rettangolo è qui detto ἑτερομήκες, *oblungo*, cioè con lati di differente lunghezza, termine ritenuto pitagorico; sempre per curiosità del lettore, notiamo che *rombo*, il quale verrà dopo, viene probabilmente da ῥέμβειν, « girare intorno di continuo », « volgersi e rivolgersi », e fra le altre cose significa una « trottola »;

quella che ha gli angoli retti, ma non è equilatera, rombo quella che è equilatera, ma non ha gli angoli retti, romboide quella che ha i lati e gli angoli opposti uguali fra loro, ma non è equilatera né ha gli angoli retti. E le figure quadrilatere oltre a queste si chiamino trapezi [7].

XXIII. Parallele sono quelle rette che, essendo nello stesso piano e venendo prolungate illimitatamente[a] dall'una e dall'altra parte, non si incontrano fra loro da nessuna delle due parti [8].

romboide, poi, è il rombo-foggiato. Euclide non usa nei suoi *Elementi* né oblungo, né rombo, né romboide; è probabile quindi che avere introdotto le definizioni di tali figure corrisponda ad un uso ancora a lui circostante, proveniente da più antichi libri di testo, e che egli riporta nella sua trattazione. *Trapezio*, infine, τραπέζιον, significa « piccola tavola ».

a. Traduciamo ordinariamente « all'infinito », ma il senso esatto di εἰς ἄπειρον è « senza limite », *illimitatamente* – e non è la stessa cosa, in quanto la nozione di infinito come un limite a cui si tenda non è proprio qui presente.

[7] Come si vede, il termine « trapezio » (τραπέζιον) è usato da Euclide in senso diverso dal nostro. E va detto che i nostri « trapezi » non vengono, del resto, mai considerati in modo autonomo negli *Elementi*. Si osservi, in questa definizione, la discontinuità tra quadrato e rettangolo. Il quadrato non viene qui considerato come uno speciale rettangolo avente tutti i lati uguali, ma come una figura che dal rettangolo è essenzialmente diversa: è infatti specificato che il rettangolo non può essere equilatero (οὐκ ἰσόπλευρον). Esso viene infatti indicato col termine ἑτερόμηκες, cioè: *avente lati disuguali*. Sorge spontaneo il collegamento con la famosa lista pitagorica dei contrari (Aristotele, *Metafisica*, I, 986 *a*), nella quale una coppia è costituita dal quadrato e dall'*eteromèco* (= rettangolo) in antitesi tra loro. La discontinuità osservata costituirebbe un'altra traccia, di carattere storico, dell'antica geometria pitagorica negli *Elementi*: ciò tanto più se si pone mente al fatto che nel séguito dell'opera al termine pitagorico ἑτερόμηκες (usato in questa definizione) Euclide preferisce quello ὀρθογώνιον (= con angoli retti: cfr. libro II, def. I, prop. I e seguenti).

[8] Per la definizione di rette parallele, si veda quanto in proposito è detto nella Nota introduttiva al libro primo.

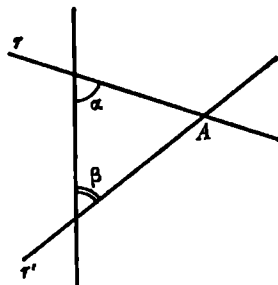
POSTULATI (αἰτήματα) [1]

I. Risulti postulato: che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto [a].

II. E che una retta terminata (= finita) [b] si possa prolungare continuamente in linea retta.

III. E che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro ed ogni distanza (= raggio) [c].

IV. E che tutti gli angoli retti siano uguali fra loro.

V. E che, se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti (= tali che la loro somma sia minore di due retti), le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti (= la cui somma è minore di due retti) [2].

a. Letteralmente: « da ogni punto ad ogni punto ». Insomma, noi diremmo da un qualsiasi punto fra tanti, il greco dice piuttosto da ogni punto fra tutti i possibili.

b. Discutibile se tradurre πεπερασμένην greco con *limitata*, *terminata*, una linea retta cioè che ha termini, fini, confini, o con *finita*, poiché « terminata » potrebbe non indicare, magari, a sufficienza che si tratta di una linea retta avente *due* estremità, due termini, ossia di un segmento rettilineo.

c. Euclide dice: παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι, « con ogni centro e distanza », al solito intendendosi « con un centro ed una distanza, cioè un raggio, qualunque ». I Greci non avevano parola per *raggio*; dovendo parlare di raggi, usavano – come vedremo – l'espressione αἱ ἐκ τοῦ κέντρου, « le (rette condotte) dal centro ».

[1] Sul significato dei postulati si veda quanto in proposito è detto nella Nota introduttiva al libro primo.

[2] È, questo, il celebre postulato quinto, o postulato delle parallele, o postulato di Euclide propriamente detto. Oltre a quanto in proposito

è stato detto nella nota introduttiva al libro primo, facciamo osservare che la forma sotto la quale Euclide enuncia il suo quinto postulato (che cioè s'incontrano due rette formanti con una trasversale angoli coniugati interni la cui somma sia minore di due retti) non è quella più comunemente adottata nelle moderne trattazioni elementari. Più comune è la forma dell'*unicità*: « Per un punto fuori di una retta passa una sola parallela alla retta stessa ». Dal postulato sotto forma euclidea si passa alla forma dell'unicità, ad esempio attraverso la I, 30 di Euclide (proprietà transitiva del parallelismo), come viene spiegato nella nota a detta proposizione. Inversamente dalla forma dell'unicità si passa a quella euclidea con facili considerazioni.

La forma dell'unicità è certo assai intuitiva: alla nostra intuizione sembra impossibile che per uno stesso punto passino più parallele ad una retta data. Ma, come s'è detto nella Nota introduttiva al libro primo, le geometrie non euclidee, cioè quelle che partono dalla negazione del quinto postulato, se pure non rispondono, è vero, alla nostra intuizione spaziale, sono tuttavia logicamente coerenti. Così nella geometria non euclidea detta *iperbolica*, o di Lobacevski, passano per un punto due parallele ad una retta data (o anche infinite, secondo la definizione che di parallelismo venga data), mentre nessuna ne passa nella geometria non euclidea detta *ellittica*, o di Riemann.

Altri enunciati del quinto postulato sono anche i seguenti:

1) non esistono rette asintotiche (cfr. Nota introduttiva al libro primo);

2) per tre punti non allineati passa la circonferenza di un cerchio;

3) dato un triangolo, ne esiste uno simile al dato e grande a piacere (Wallis, Saccheri);

4) esistono rette equidistanti.

Finalmente, da un punto di vista strettamente stilistico, va osservato che Euclide evita sempre un termine equivalente a quello nostro *somma*. Così in questo quinto postulato non è detto che le due rette devono formare angoli interni dalla stessa parte (= coniugati interni) aventi somma minore di due retti, ma è detto che le due rette formano angoli (interni dalla stessa parte) *minori di due retti*.

NOZIONI COMUNI (κοιναὶ ἔννοιαι) [a] [1]

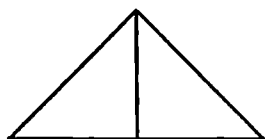
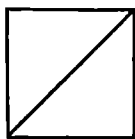
I. Cose che sono uguali ad una stessa sono uguali anche fra loro.

II. E se cose uguali sono addizionate a cose uguali, le totalità sono uguali [2].

a. Assai discussa è la questione se le Nozioni comuni siano di Euclide, tutte o soltanto le prime tre, o – addirittura – se non siano affatto di Euclide, neppure nel termine di nozioni comuni. Tuttavia non si può dire che vi siano stati fino ad oggi argomenti decisivi, e magari ci si trova dinanzi il contrario, cioè degli argomenti a favore, per opporsi alle « Nozioni comuni » come termine euclideo; anzi, sulla base delle varie argomentazioni (fra cui il commentario di Proclo al I libro, pp. 196, 15, che riconosce le cinque Nozioni comuni da noi date, e critica la indebita pretesa di Erone, Erone di Alessandria – il massimo ingegnere e professore di ingegneria alessandrino, di riconoscerne come autentiche solo tre, ossia le tre prime), possiamo concludere che in libri di testo precedenti a quello euclideo la presenza

[1] Sulle *Nozioni comuni* in linea generale, si veda quanto è stato detto nella Nota introduttiva al libro primo. Su tutto l'argomento dei princìpi (e delle Nozioni comuni in particolare) sono assai notevoli i recentissimi studi dell'ungherese Árpad Szábó. Si veda, per esempio, la sua memoria: *Anfänge des Euklidischen Axiomensystems*, in: « Archive for History of Exact Sciences » (I, 1960), pubblicato anche nella raccolta: *Zur Geschichte der griechischen Mathematik*, edita da Oskar Becker (Darmstadt, 1965, pp. 355-461).

[2] Questa Nozione comune, così come la terza, mostra che per Euclide il termine « uguale » (ἴσος) si riferisce all'uguaglianza di grandezza. Così ad esempio per i poligoni non si tratta dell'uguaglianza in senso stretto, cioè dell'uguaglianza completa di tutti gli elementi (detta da noi anche *congruenza*), ma dell'uguaglianza di estensione (detta da noi anche *equivalenza*). Infatti somme di poligoni uguali in senso stretto non sono uguali nello stesso senso, ma soltanto equivalenti.

Così, le due figure qui riportate (un quadrato e un triangolo) sono somme di figure uguali in senso stretto, ma non sono uguali nello stesso senso, bensì equivalenti (hanno la stessa estensione = area).

III. E se da cose uguali sono sottratte cose uguali, i resti sono uguali.
VII. E cose che coincidono[a] fra loro sono fra loro uguali[3].
VIII. Ed il tutto è maggiore della parte[b][4].

di più di un assioma della specie delle Nozioni comuni sembra accertabile e che almeno le prime tre Nozioni comuni erano contenute nel testo euclideo originario (cfr. per questo, F. ENRIQUES, *Per la Storia della Logica*, Bologna, Zanichelli, 1922, cap. I, e *Gli elementi*, di Enriques e vari collaboratori, vol. I, pp. 47-48; HEATH, *The thirteen books of Euclid's Elements*, pp. 221-234 e la nota 1 successiva).

a. Secondo sia usato all'attivo o al passivo, quale termine geometrico, ἐφαρμόζειν ha un diverso significato: al passivo, ἐφαρμόζεσθαι, significa «essere applicato a», senza una qualche implicazione che la figura applicata venga esattamente a coincidere, e debba coincidere, con la figura cui è applicata; all'attivo, ἐφαρμόζειν – e qui è usato all'attivo –, significa intransitivamente «convenire, adattarsi esattamente, coincidere con».

b. A questo punto, i Mss. riportano quattro nozioni, dello stesso tipo delle I-III, tre delle quali sono date da Heiberg in parentesi e corrispondono alla IV, V, e VI nostre; la quarta poi, che si trova posta fra IV e V, è da Heiberg omessa del tutto; essa dice: «E se cose uguali sono sottratte da cose disuguali, i resti sono disuguali». Tutte queste nozioni, per genuinità più che dubitevoli, appaiono in realtà non necessarie e, in vista del principio che gli assiomi non dovrebbero essere con facilità moltiplicati, sarebbe opportuno che fossero omesse. Quanto alla IX, che è data pure da buoni Mss. come da collocarsi dopo il postulato V (e difatti essa spetta alla geometria in particolare, come

[3] Come si vedrà meglio nella nota alla I, 4, Euclide si serve del movimento intuitivo della meccanica solo tre volte in tutta l'opera, per sovrapporre una figura ad un'altra. Se, come risultato della sovrapposizione, si ha la completa coincidenza, Euclide sente il bisogno di enunciare un postulato per poter affermare che le due figure sono in tal caso uguali (solo nel senso di uguaglianza di estensione da lui inteso).

[4] Che il tutto sia maggiore della parte, è caratteristica degli insiemi finiti, cioè di quelli contenenti un numero finito di elementi. Per gli insiemi infiniti non vale più: anzi il fatto che non valga è, nella moderna teoria degli insiemi, proprietà caratteristica della *infinità* dell'insieme. La relativa antinomia, o paradosso che dir si voglia, si presentò a Galileo nel confronto tra i numeri ed i loro quadrati (*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, Giornata prima: *Opere*, VIII, 78-79; cfr. anche l'edizione a cura di A. Carugo e L. Geymonat, Torino, Boringhieri, 1958,

[IV. E se cose uguali sono addizionate a cose disuguali, le totalità sono disuguali] [5].

[V. E doppi di una stessa cosa sono uguali fra loro].

[VI. E metà di una stessa cosa sono uguali fra loro].

dice Proclo, *op. cit.*, pp. 196, 21, e non alle scienze in generale), è senz'altro da ritenersi interpolazione. E difatti l'assioma non è necessario, poiché quanto esso stabilisce è già incluso nel significato del postulato I; deriva probabilmente dal passo in I, 4, in cui Euclide afferma che « se ... la base BC non coincidesse con la base EF, due rette verrebbero a comprendere uno spazio: il che è impossibile » (cfr. per questo Heath, *op. cit.*, vol. I, p. 232).

pp. 44-45). Ma già forse nel *Carmide* di Platone si trovano tracce di difficoltà del genere: Euclide taglia corto ad esse con questa sua Nozione comune ottava (cfr. A. Frajese, *Platone* cit., pp. 74 segg.).

[5] Le Nozioni comuni 4, 5, 6, 9, pur essendo implicitamente o esplicitamente applicate negli *Elementi*, vengono da Heiberg riconosciute come interpolate e quindi non sono da lui inserite nel testo. Del resto, la quinta Nozione comune, ad esempio, può ricavarsi sostanzialmente dalla seconda.

PROPOSIZIONI

PROPOSIZIONE 1.

Su una retta terminata data costruire un triangolo equilatero [1].

Sia AB la retta terminata data.

Si deve dunque costruire sulla retta AB un triangolo equilatero.

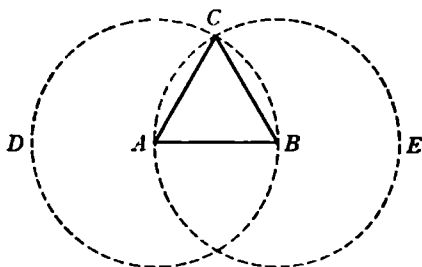
[1] È stato fin dall'antichità osservato che Euclide, in questa proposizione, tralascia di dimostrare che i due cerchi, che vengono descritti, si tagliano tra loro. Non viene, cioè, dimostrata l'esistenza del punto di intersezione C, e quindi neppure quella del triangolo equilatero. A questo proposito osserviamo:

a) per tutte le questioni riguardanti intersezioni di rette e cerchi, o di cerchi tra loro, neppure oggi forniamo una vera dimostrazione, ma introduciamo postulati, che costituiscono casi particolari di quello più generale della continuità. Euclide non dà l'esplicita enunciazione di detti postulati, ma si assicura che valgano le condizioni di applicazione dei postulati stessi. Per maggiori notizie, rinviamo il lettore alle note alle proposizioni I, 12 e I, 22, così pure all'articolo: A. FRAJESE, *Il sesto postulato di Euclide*, in « Periodico di matematiche », 1968, n. 1-2 (pp. 150-159);

b) la costruzione del triangolo equilatero di I, 1 è un caso particolare della costruzione di un triangolo, dati i suoi tre lati, che viene fornita nella I, 22. In quest'ultima proposizione Euclide si assicura, mediante condizioni cui devono soddisfare le tre *rette* date, che effettivamente i cerchi si incontrino. Ma le stesse condizioni (essere la somma di due *rette*, comunque scelte, maggiore della terza) sono automaticamente verificate nel caso del triangolo equilatero;

c) come vedremo anche per qualche altro libro degli *Elementi*, le prime proposizioni del libro primo hanno indubbio carattere introduttivo: potremmo dire anzi che le prime quattro proposizioni costituiscano una specie di *prolungamento* dei postulati. Così, infatti, contiene (come s'è visto) un nuovo

Con centro A e raggio AB risulti descritto[a] il cerchio BCD (post. III), di nuovo risulti descritto, con centro B e raggio BA, il cerchio ACE (id.), e dal punto C, in cui i cerchi si tagliano fra loro, risultino tracciate ai punti A, B le rette congiungenti CA, CB (post. I).

Ora, poiché il punto A è centro del cerchio CDB, si ha che AC è uguale ad AB (def. XV); di nuovo, poiché il punto B è centro del cerchio CEB, si ha che BC è uguale a BA (id.). Ma fu dimostrato che pure CA è uguale ad AB; quindi ciascuna delle due rette CA, CB è uguale alla retta AB. Ma cose che sono uguali ad una stessa sono uguali anche fra loro (noz. com. I): sono perciò uguali anche CA, CB[b]; quindi le tre rette CA, AB, BC sono uguali fra loro.

Dunque, il triangolo ABC è equilatero. Ed è stato costruito sulla retta terminata data AB. – C.D.F.[c]

È APPLICATA IN: I, 2, 9, 10, 11.

a. Abbiamo già detto nella premessa che il tempo greco, il perfetto, adoperato di regola nella costruzione, e spesso anche altrove, almeno in certe occasioni, sembra non avere altro senso che quello di un «risultare», di uno stato di fatto. Ne manteniamo esempio nelle prime tre proposizioni, riservandoci in séguito, per non appesantire o render difficile la traduzione, di far uso del presente, come consuetudine.

b. Letteralmente: «quindi è uguale anche CA a CB». Il modo di tradurre adottato sarà usato spesso, successivamente, non solo per rette, ma per angoli, somme di angoli, e per qualunque altro termine si riterrà opportuno.

c. In greco, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι, «ciò che appunto bisognava fare, si doveva fare»; usiamo la formula tradizionale C.D.F., *come dovevasi fare* e, dopo, la formula C.D.D., *come dovevasi dimostrare.*

postulato il procedimento costruttivo della I, 1: invece nelle due seguenti proposizioni I, 2 e I, 3 viene precisato il significato del postulato terzo. Infine nella I, 4 viene introdotto, in modo non rigoroso, il movimento mec-

PROPOSIZIONE 2.

Applicare ad un punto dato una retta uguale ad una retta data [2].

Siano A il punto dato e BC la retta data; si deve dunque applicare con un estremo nel punto A una retta che sia uguale alla retta data BC.

Infatti, risultino: dal punto A al punto B tracciata la congiungente AB (post. I), costruito su essa il triangolo equilatero DAB (I, 1), ottenute le rette AE, BF prolungando in linea retta DA, DB (post. II) [a], con centro B e raggio BC descritto il cerchio CGH (post. III), e, di nuovo, con centro D e raggio DG, descritto il cerchio GKL (id.).

a. Letteralmente: « risultino prolungate per diritto a, in (linea) retta a DA, DB le rette AE, BF ». Da rilevare che, usando tali espressioni, di rette prolungate per diritto ad altre date, Euclide parla in sostanza di *continuare* tali rette, mentre, formalmente, indica piuttosto che le rette da « prolungare » non sono le rette originarie (qui DA, DB), ma le porzioni prolungate di esse.

canico, sicché la proposizione stessa, come vedremo, può esser considerata come un postulato. Risulta così in certo modo giustificata la costruzione della I, 1, se pure essa non può avere valore esistenziale nel senso della teoria di Zeuthen sulla dimostrazione di esistenza presso i Greci mediante la costruzione (cfr. *Nota introduttiva* al libro primo): sembra piuttosto che i due cerchi si incontrino perché il triangolo equilatero già esiste per Euclide, anziché il fatto inverso.

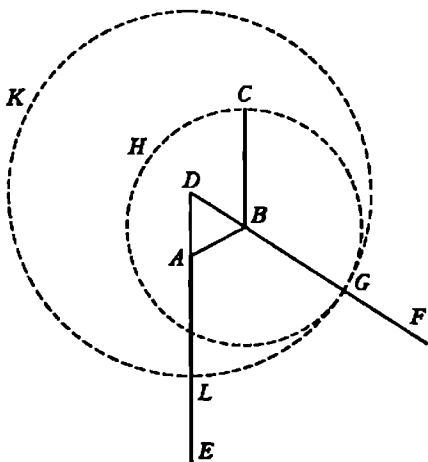
[2] Questa proposizione permette di eseguire il *trasporto del segmento*, cioè permette di costruire un segmento di retta uguale ad un segmento dato, ed avente un estremo in un punto qualunque del piano. Nella seguente I, 3 si completa il *trasporto*, con una ulteriore rotazione, in modo che il segmento « trasportato » venga ad avere anche una direzione prefissata. Questa proposizione I, 2 non si trova, di solito, nei moderni testi scolastici, nei quali il trasporto del segmento viene postulato, oppure viene inquadrato nella teoria del movimento.

Essa precisa in qual modo vada intesa la portata del postulato III: quest'ultimo richiede che possa eseguirsi la costruzione del cerchio soltanto quando il raggio è, per dir così, *attaccato* al centro, ossia quando ha un estremo nel centro: al resto pensano le proposizioni seconda e terza. È stato detto felicemente che il compasso di cui (pur senza nominarlo) si serve Euclide, si richiude immediatamente non appena venga sollevato dal foglio. Appunto a questo *inconveniente* (relativo alla restrizione della richiesta del post. III) rimedia la I, 2.

Poiché dunque il punto *B* è centro del cerchio *CGH*, si ha che *BC* è uguale a *BG*. Di nuovo, poiché il punto *D* è centro del cerchio *GKL*, si ha che *DL* è uguale a *DG*. Ora, di queste rette le parti *DA*, *DB* sono uguali; perciò la parte che rimane dell'una, *AL*, è uguale a quella che rimane dell'altra, *BG* (noz. com. III)[a]. Ma fu dimostrato che pure *BC* è uguale a *BG*; ciascuna delle due rette *AL*, *BC* è quindi uguale alla retta *BG*. Ma cose che sono uguali ad una stessa sono pure uguali fra loro (noz. com. I); anche *AL*, *BC* sono perciò uguali.

Dunque, la retta *AL* uguale alla retta data *BC* viene a trovarsi con un estremo nel punto dato *A*. – C.D.F.

APPLICA: I, 1.

È APPLICATA IN: I, 3.

PROPOSIZIONE 3.

Date due rette disuguali, togliere dalla maggiore una retta uguale alla minore[3].

Siano *AB*, *C* le due rette disuguali date, delle quali *AB* sia maggiore; si deve dunque togliere dalla maggiore *AB* una retta uguale alla minore *C*.

a. Letteralmente: e di queste rette la retta *DA* è uguale alla retta *DB*; quindi la retta *AL* che rimane è uguale alla rimanente *BG*.

[3] Come s'è detto nella nota precedente, questa proposizione completa l'operazione di trasporto del segmento. Essa permette, infatti, una volta *trasportato* un dato segmento nella posizione *AD* con un estremo in un punto *A*, di costruire il segmento *AE* ad esso uguale, ma avente non soltanto lo stesso estremo, bensì anche una direzione prefissata *AB*.

Dipinto raffigurante probabilmente il matematico Euclide

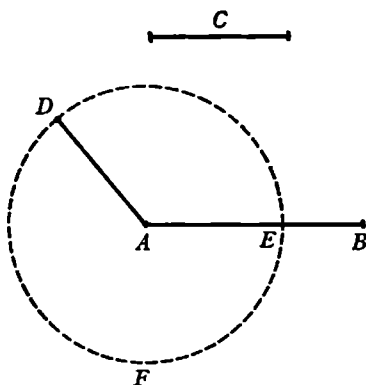
(Wolfenbüttel, Herzog August Bibliothek,
Cod. Guelferbytanus 2403, Aug. 2°, f. 36.23, 69 v.).

Si applichi con un estremo nel punto A la retta AD uguale alla retta C (I, 2); e con centro A e raggio AD risulti descritto il cerchio DEF (post. III).

Ora, poiché il punto A è centro del cerchio DEF, si ha che AE è uguale ad AD (def. XV); ma pure C è uguale ad AD. Quindi ciascuna delle due rette AE, C è uguale alla retta AD, cosicché anche AE, C sono uguali (noz. com. I).

Dunque, date le due rette disuguali AB, C, dalla maggiore AB è stata tolta AE uguale alla minore C. – C.D.F.

APPLICA: I, 2.

È APPLICATA IN: I, 5, 6, 9, 11, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 46; II, 1, 8, 9, 10; IV, 1; VI, 1, 9, 11, 12, 13, 16, 28, 29; lemma al X, 14; XII, 15; XIII, 14. Tuttavia per molte di queste proposizioni sarebbe stato sufficiente il postulato terzo.

PROPOSIZIONE 4.

Se due triangoli hanno due lati rispettivamente uguali a due lati ed hanno uguali gli angoli compresi fra i lati uguali[a], *avranno anche la base*[b] *uguale alla base, il triangolo sarà*

a. Letteralmente: « l'angolo compreso dalle rette uguali uguale all'angolo corrispondente ». Gli enunciati in Euclide sembrano talvolta mancare di assoluta chiarezza e precisione: così, parlando nell'enunciato dei due triangoli, soltanto di uno dice « quello compreso dalle rette uguali », sottintendendo che questa determinazione si riferisca anche all'altro; sempre nell'enunciato di cui trattiamo parla dapprima di « lati », e poi degli angoli compresi dalle « rette » uguali, non da « lati » (forse, ritiene HEATH, *op. cit.*, vol. I, p. 248, per aderire alla fraseologia della definizione di angolo), come ugualmente in I, 5, per aderire al post. II si parlerà del prolungamento delle « rette uguali ».

b. La parola *base*, τὴν βάσιν, è qui usata per la prima volta; Proclo (*op. cit.*, pp. 236, 12-15) spiega che la parola indica, quando

uguale al triangolo, e gli angoli rimanenti [del primo], opposti ai lati uguali[a], *saranno uguali ai rispettivi angoli rimanenti [del secondo]*[4].

due lati sono già stati menzionati, il terzo lato di un triangolo, ed anche quando nessun lato di un triangolo è stato prima menzionato, il lato al livello della vista. Così, negli enunciati ad es. di I, 37 ecc. il termine è usato di triangoli posti sulla stessa base o su basi uguali, ed in I, 35 ecc. il termine è usato per le basi di parallelogrammi.

a. Letteralmente: a cui si sottendono i lati uguali.

[4] In questa proposizione, che è comunemente indicata come *primo criterio di uguaglianza dei triangoli*, viene fatto uso del movimento, inteso nel senso meccanico, intuitivo. Essa non ha quindi alcun vero valore dimostrativo, ma sembra debba considerarsi come un postulato. Occorre dire a questo proposito:

a) ciò è in armonia con quanto è stato detto nella nota alla I, 2: essere le prime quattro proposizioni come un *prolungamento* dei postulati, costituendo esse un'introduzione alle proposizioni vere e proprie;

b) del movimento Euclide si serve assai raramente: ciò ancora in I, 8 e in III, 24;

c) l'uso che Euclide fa di questa I, 4 è, come si vede dall'elenco dato, assai frequente. Va però osservato che il modo di «invocarla» è, come vedremo, assai caratteristico: proprio come se la I, 4 fosse un postulato, da accettare *in blocco*.

A questo proposito, richiamiamo anzitutto l'attenzione del lettore sull'enunciato di questa proposizione. Noi enunciamo il primo criterio nel modo seguente: «Se due triangoli hanno due lati e l'angolo tra essi compreso rispettivamente uguali, essi sono uguali». Infatti con l'affermazione (*tesi* del teorema) che i due triangoli sono uguali, intendiamo che essi sono uguali in senso stretto, cioè che hanno tutti i loro elementi (lati ed angoli) ordinatamente uguali, e non già che siano soltanto di estensione uguale, cioè che siano *equivalenti*. Ma siccome il termine «uguale» (ἴσος), applicato ai poligoni, ha per Euclide il nostro significato di *equivalente*, l'enunciato della I, 4 non può limitarsi alla tesi che i due triangoli sono uguali: Euclide aggiunge, infatti, che i due triangoli hanno anche uguali le *basi* (cioè i terzi lati), ed ordinatamente uguali i rimanenti due angoli: quelli opposti ai lati uguali. L'uguaglianza in senso stretto si presenta dunque per Euclide proprio come uguaglianza ordinata di tutti i lati e tutti gli angoli dei due triangoli, ossia di tutti gli elementi che compongono le due figure che vengono confrontate: che poi i triangoli (più in generale le due figure) siano anche di estensione uguale è cosa che Euclide ricava, in base alla Nozione comune VII, per il fatto che le figure stesse vengono portate a coincidere.

Fatto sta, ora, che molte volte, quando Euclide applica la I, 4, cioè questo primo criterio di uguaglianza dei triangoli, enuncia in modo completo la tesi, *anche per la parte che non gli serve*. Così, tanto per citare un esempio, nella I, 16 l'applicazione del primo criterio serve soltanto per dedurne l'ugua-

Siano ABC, DEF due triangoli aventi i due lati AB, AC uguali rispettivamente[a] ai due lati DE, DF, cioè AB uguale a DE ed AC uguale a DF, e l'angolo BAC[b] uguale all'an-

a. Letteralmente: «ciascuno dei due a ciascuno dei due»; ma tradurre così, oppure «ciascuno a ciascuno», può risultare equivoco, quasi fossero uguali fra loro tutti e quattro i lati (due in ogni triangolo), mentre solo uno dei due lati del primo triangolo è uguale al rispettivo dei due lati del secondo, e pure l'altro lato del primo triangolo è uguale solo al rispettivo del secondo.

b. L'espressione originaria intera è «l'angolo compreso dalle rette BA, AC», o indicate con qualsiasi altra lettera di cui una comune (ἡ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ περιεχομένη γωνία), poi nella pratica geometrica, sottintendendosi *compreso*, l'angolo BAC sarà dapprima l'angolo (compreso) dalle BAC, cioè BA, AC, quindi l'angolo (compreso) da BAC (ἡ ὑπὸ τῶν ΒΑΓ γωνία, e poi ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία), ed infine lo (angolo compreso) da BAC (ἡ ὑπὸ ΒΑΓ) come normale in Euclide. Cfr. anche Premessa.

glianza di una coppia di angoli, ma invece (come il lettore potrà subito vedere) si enuncia tutta la tesi, anche per la parte «inutile»: si dice ivi, quindi, che sono uguali le due basi, che sono uguali i due triangoli, e finalmente che sono ordinatamente uguali le due coppie di angoli *restanti*.

In alcuni casi, poi, ad esempio, in I, 34 e in VI, 5, il carattere di postulato della I, 4 (come apparirà dalle relative note) è ancora più marcato.

Per chi volesse persuadersi del fatto che sul movimento meccanico, ingenuamente inteso, non possa venir fondata una definizione rigorosa dell'uguaglianza (in senso stretto) delle figure geometriche, ricordiamo che detto movimento non deve in alcun modo *deformare* le figure, cioè deve mantenere le figure *uguali* a sé stesse. Sicché si definirebbero come uguali due figure quando l'una possa essere portata a coincidere con l'altra mediante un movimento che lasci *uguale* la figura che viene mossa. Si commetterebbe dunque una evidente petizione di principio.

Per rendere rigorosa la definizione di uguaglianza (in senso stretto) tra due figure geometriche, si sono allora seguite due vie:

a) quella di Hilbert, adottata da Enriques e Amaldi, consistente nell'assumere come concetti primitivi l'uguaglianza tra due segmenti e quella tra due angoli, e nel definire l'uguaglianza di due figure (ad esempio di due triangoli) attraverso l'uguaglianza ordinata di tutti i loro elementi (ad esempio: lati ed angoli). In questa via occorre però *postulare* il primo criterio di uguaglianza dei triangoli. La via di Hilbert è assai vicina a quella seguita da Euclide, se si considera (s'è già detto) la I, 4 come un postulato;

b) quella che considera il movimento come una trasformazione, cioè tale da stabilire una corrispondenza (soggetta a determinate condizioni) tra gli elementi delle due figure che si considerano. Tale via si inquadra nel famoso *programma di Erlangen* del Klein.

golo EDF. Dico che anche la base BC è uguale alla base EF, che il triangolo ABC sarà uguale al triangolo DEF, e che gli angoli rimanenti del primo, opposti ai lati uguali, saranno uguali ai rispettivi angoli rimanenti del secondo: l'angolo ABC uguale all'angolo DEF e l'angolo ACB uguale all'angolo DFE.

Infatti, se il triangolo ABC è sovrapposto al triangolo DEF ed il punto A viene a coincidere col[a] punto D e la retta AB con la retta DE, anche il punto B verrà a coincidere col punto E essendo AB uguale a DE; coincidendo dunque AB con DE, anche la retta AC coinciderà con la retta DF essendo l'angolo BAC uguale all'angolo EDF, cosicché pure il punto C coinciderà col punto F essendo, nuovamente, uguale AC a DF. Tuttavia anche B ha coinciso con E, cosicché la base BC verrà a coincidere con la base EF.

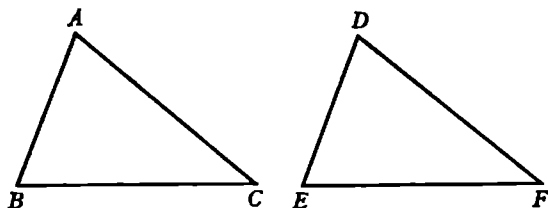
[Se difatti, mentre B coincide con E e C con F, la base BC non coincidesse con la base EF, due rette verrebbero a comprendere uno spazio: il che è impossibile]. Quindi la base BC coinciderà con la base EF[b] e sarà ad essa uguale (noz. com. VII); cosicché anche tutto quanto il triangolo ABC coinciderà con tutto quanto il triangolo DEF e sarà ad esso uguale, e gli angoli rimanenti dell'uno coincideranno con gli angoli rimanenti dell'altro e saranno ad essi uguali: l'angolo ABC uguale all'angolo DEF e l'angolo ACB uguale all'angolo DFE.

Dunque, se due triangoli... (secondo l'enunciato). – C.D.D.[c]

a. Letteralmente: si viene a porre sul...

b. Heiberg (*Paralipomena zu Euklid*, in *Hermes*, XXXVIII, 1903, p. 56) ritiene interpolazione tutta l'espressione in parentesi quadre, eseguita da commentatori per presuntive ragioni di chiarezza e consolidamento; e senza dubbio è interpolazione, e presumibilmente a questa contemporanea, il postulato – in séguito posto fra le nozioni comuni – che « Due rette non possono comprendere, o racchiudere, uno spazio ».

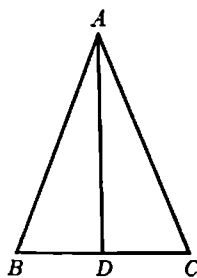
c. In greco ὅπερ ἔδει δεῖξαι, « ciò che appunto si doveva dimostrare ».

È APPLICATA IN: I, 5, 6, 10, 16, 24, 25, 26, 33, 34, 35, 47; III, 7, 8, 17, 25, 26, 29, 30, 33; IV, 5, 6, 13; VI, 5, 6; XI, 4, 6, 8, 20, 22, 23, 24, 26, 29, 35, 38; XII, 3, 16; XIII, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 18 lemma.

PROPOSIZIONE 5.

Nei triangoli isosceli gli angoli alla base sono uguali fra loro, e venendo prolungati i lati uguali[a] *gli angoli sotto la base saranno [pure] uguali fra loro*[5].

Sia ABC un triangolo isoscele avente il lato AB uguale al lato AC, e si prolunghino per diritto i lati AB, AC in

a. Letteralmente: «le rette uguali»; cfr. I, 4, nota *a*.

[5] Da questo punto comincia una serie concatenata di teoremi e problemi, dopo le prime quattro proposizioni le quali (come s'è detto) rappresentano una specie di *prolungamento* dei postulati: unico ritorno, per dir così, all'atmosfera delle prime quattro proposizioni è dato dalla I, 8, nella quale si fa ancora uso del movimento.

Questo è dunque il primo vero teorema che Euclide ci offre. Ci attenderemmo che, mosso da intenti didattici, Euclide ci desse una dimostrazione breve e semplice. Al contrario, essa è lunga e complicata. Ma Euclide non ha voluto servirsi della facile e breve dimostrazione fondata sulla considerazione della bisettrice AD dell'angolo al vertice: bisettrice che divide il triangolo isoscele ABC in due triangoli ABD, ACD uguali per la I, 4 (primo criterio) con l'immediata conseguenza dell'uguaglianza degli angoli alla base.

La scelta anti-didattica di Euclide è quindi un *pezzo forte* in favore della teoria di Zeuthen sulla dimostrazione di esistenza, presso i Greci, mediante la costruzione: ancora non è stata data, infatti, la costruzione della bisettrice di un angolo (che si trova soltanto in I, 9).

Nessuno scrupolo sorgerebbe invece per noi oggi: basterebbe anticipare il postulato della continuità soltanto per il caso particolarissimo dell'esistenza della bisettrice.

BD, *CE*[a]; dico che l'angolo *ABC* è uguale all'angolo *ACB*, e l'angolo *CBD* uguale all'angolo *BCE*.

Infatti, si prenda su *BD* un punto a piacere *F*, dalla retta maggiore *AE* si sottragga la retta *AG* uguale alla minore *AF* (I, 3) e si traccino le congiungenti *FC*, *GB* (post. I).

Poiché dunque *AF* è uguale ad *AG*, ed *AB* è uguale ad *AC*, i due lati *FA*, *AC* sono uguali rispettivamente ai due lati *GA*, *AB*; e comprendono [gli uni e gli altri] l'angolo *FAG* comune [ai due triangoli], per cui la base *FC* è uguale alla base *GB*, il triangolo *AFC* sarà uguale al triangolo *AGB*, e gli angoli rimanenti del primo saranno uguali ai rispettivi angoli rimanenti del secondo, quelli cioè opposti ai lati uguali: l'angolo *ACF* uguale all'angolo *ABG*, e l'angolo *AFC* uguale all'angolo *AGB* (I, 4).

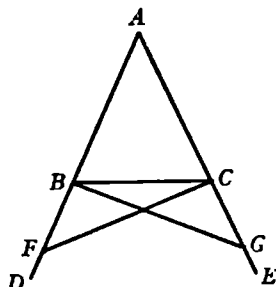
Ora, poiché tutto quanto il lato *AF* è uguale a tutto quanto il lato *AG*, e di essi la parte *AB* è uguale alla parte *AC*, le parti restanti, cioè *BF*, *CG*, sono uguali[b] (noz. com. III). Ma fu dimostrato che pure *FC*, *GB* sono uguali; i due lati *BF*, *FC* sono così uguali rispettivamente ai due lati *CG*, *GB*; e l'angolo *BFC* è uguale all'angolo *CGB*, e *BC* è loro base comune, per cui anche il triangolo *BFC* sarà uguale al triangolo *CGB*, e gli angoli rimanenti del primo saranno uguali ai rispettivi angoli rimanenti del secondo, quelli cioè opposti ai lati uguali: l'angolo *FBC* è quindi uguale all'angolo *GCB* e l'angolo *BCF* è uguale all'angolo *CBG* (I, 4).

E poiché fu dimostrato che tutto quanto l'angolo *ABG* è uguale a tutto quanto l'angolo *ACF*, e di essi la parte *CBG* è uguale alla parte *BCF*, le parti restanti, cioè gli angoli *ABC*, *ACB* che sono angoli alla base del triangolo *ABC*, sono uguali (noz. com. III). Ma fu dimostrato che

a. Letteralmente la formula tecnica è quella di I, 2; cfr. nota al proposito.

b. Cfr. nota *a* (p. 80) alla prop. 2; la nota vale da qui ad innanzi anche per altri termini, ad es. gli angoli, appunto subito contemplati.

anche gli angoli *FBC*, *GCB* sono uguali; e sono angoli sotto la base.

Dunque, nei triangoli isosceli... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 3 (o post. III) e I, 4.

È APPLICATA IN: I, 7, 18, 19, 20, 24; II, 4, 9, 10; III, 2, 3, 16, 20, 31; IV, 10, 15; VI, 3, 7; XIII, 7, 8, 9, 10.

PROPOSIZIONE 6.

Se in un triangolo due angoli sono uguali fra loro, anche i lati opposti[a] *agli angoli uguali saranno uguali fra loro*[6].

Sia *ABC* un triangolo avente l'angolo *ABC* uguale all'angolo *ACB*; dico che anche il lato *AB* è uguale al lato *AC*.

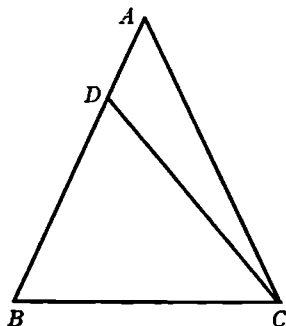
Infatti, se *AB* fosse disuguale rispetto ad *AC*, uno dei lati sarebbe maggiore. Sia maggiore *AB*, dal lato maggiore *AB* si sottragga *DB* uguale al lato minore *AC* (I, 3), e si tracci la congiungente *DC*[b].

Poiché dunque *DB* è uguale ad *AC* e *BC* è comune, i due lati *DB*, *BC* sono uguali in tal caso rispettivamente ai

a. Letteralmente: «che si sottendono agli angoli uguali», come in I, 4.

b. Da questo punto in poi non sarà ripetuta più la notazione del post. I riguardo al tracciare rette congiungenti. Lo stesso avviene in seguito, secondo opportunità, per altre definizioni, postulati e nozioni comuni.

[6] Il teorema è inverso rispetto al precedente, ossia ne scambia tra loro l'ipotesi e la tesi. Quindi un triangolo isoscele ha due angoli uguali, e inversamente se un triangolo ha due angoli uguali esso è isoscele. È questa la prima dimostrazione che negli *Elementi* di Euclide adopera il procedimento di riduzione all'assurdo: procedimento che, secondo l'Enriques (*Sul procedimento di riduzione all'assurdo*; «Bollettino della Mathesis», Bologna, aprile 1919) risale verosimilmente alla scuola di Elea.

due lati AC, CB, e l'angolo DBC è uguale all'angolo ACB; quindi la base DC è uguale alla base AB, ed il triangolo DBC sarà uguale al triangolo ACB (I, 4), il minore al maggiore: il che è assurdo (noz. com. VIII); AB non è quindi disuguale rispetto ad AC, e perciò è uguale.

Dunque, se in un triangolo due angoli sono uguali fra loro... (secondo l'enunciato) [a]. – C.D.D.

APPLICA: I, 3 e I, 4.

È APPLICATA IN: II, 4, 9, 10; III, 25; IV, 9, 10; VI, 3; XIII, 7, 8.

PROPOSIZIONE 7.

Su una retta data e da ciascun suo estremo si conducano due rette che si incontrino in un punto; non è possibile costruire con gli stessi estremi e dalla stessa parte altre due rette rispettivamente uguali a quelle prima costruite ed aventi un diverso punto d'incontro [b].

Infatti, se possibile, si costruiscano sulla stessa retta AB le due rette AC, CB con estremi in A, B e che si incontrino

a. La proposizione è quanto vien detto il *reciproco* (l'*inverso*, l'*opposto*, ἀντίστροφος, la *reciprocità* ἀντιστροφή), della precedente I, 5, e qui Euclide usa per la prima volta il metodo di prova mediante *reductio ad absurdum*. Cfr. nota 6 proposizione precedente.

b. Letteralmente (e già con l'aderenza massima ottenibile): Sulla stessa retta, date su essa due rette, non si verranno a costruire (cioè, non si potranno costruire) alle stesse, a punti diversi dalla stessa parte ed avendo gli stessi estremi delle rette prese in principio, altre due rette rispettivamente uguali.

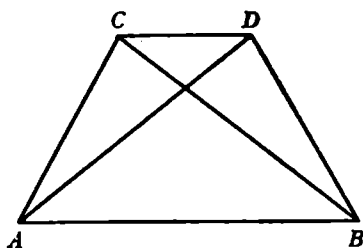
Infatti, se possibile, sulla stessa retta AB, date su essa le due rette AC, CB, si costruiscano alle stesse altre due rette AD, DB rispettivamente uguali, a punti diversi, cioè C e D, dalla stessa parte ed avendo gli stessi estremi, così che CA sia uguale a DA avendo il suo stesso estremo, cioè A, e CB sia uguale a DB avendo il suo stesso estremo, cioè B, e risulti... ecc.

nel punto *C*, ed altre due rette *AD*, *DB* uguali rispettivamente ad *AC*, *CB*, dalla stessa parte ed aventi gli stessi estremi *A*, *B*, ma che si incontrino in un punto [*D*] diverso da *C*; e risulti tracciata la congiungente *CD*.

Poiché dunque *AC* è uguale ad *AD*, anche l'angolo *ACD* è uguale in tal caso all'angolo *ADC* (I, 5), per cui l'angolo *ADC* è maggiore dell'angolo *DCB* (noz. com. VIII); l'angolo *CDB* è quindi molto maggiore dell'angolo *DCB* (id.). Di nuovo, poiché *CB* è uguale a *DB*, anche l'angolo *CDB* è uguale all'angolo *DCB* (I, 5). Ma fu dimostrato che è pure molto maggiore di esso: il che è impossibile.

Dunque, su una retta data e da ciascun suo estremo... (secondo l'enunciato). - C.D.D.

Applica: I, 5.

È applicata in: I, 8.

Proposizione 8.

Se due triangoli hanno due lati rispettivamente uguali a due lati, ed hanno anche la base uguale alla base, avranno uguali anche gli angoli compresi dai lati uguali [7].

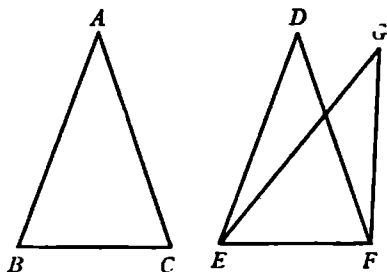
Siano *ABC*, *DEF* due triangoli aventi i due lati *AB*, *AC* uguali rispettivamente ai due lati *DE*, *DF*, cioè *AB* uguale

[7] Come è stato avvertito, anche in questa proposizione si fa uso del movimento (come già nella I, 4 e ancora nella III, 24). Si tratta di quello che oggi chiamiamo terzo criterio di uguaglianza dei triangoli, e che invece in Euclide appare al secondo posto (gli altri due criteri in I, 4 e in I, 26). Si osservi che nella tesi del teorema non è contenuta l'uguaglianza dei due triangoli, e neppure quella di tutti gli angoli, bensì soltanto l'uguaglianza degli angoli di una sola coppia. Finalmente va ricordato che in trattazioni scolastiche oggi in uso non si ricorre a questa dimostrazione, basata sul lemma costituito dalla precedente proposizione I, 7, ma si trasporta uno dei triangoli in modo che cada da parte opposta dell'altro rispetto al lato comune. Il lemma I, 7 riesce infatti, come osserva l'Enriques, difficile per un principiante, in quanto fa «riferimento ad una figura impossibile».

Per quanto riguarda, infine, l'enunciato di questa proposizione, che distingue due lati dal terzo lato («base») si veda la nota alla I, 25.

a *DE* ed *AC* uguale a *DF*; ed abbiano pure la base *BC* uguale alla base *EF*; dico che anche l'angolo *BAC* è uguale all'angolo *EDF*.

Infatti, se si sovrappone il triangolo *ABC* al triangolo *DEF*, ed il punto *B* viene a coincidere col punto *E* e la retta *BC* con la retta *EF*, anche il punto *C* coinciderà col punto *F* essendo *BC* uguale ad *EF*; venendo quindi *BC* a coincidere con *EF*, pure *BA*, *CA* coincideranno rispettivamente con *ED*, *DF*. Se la base *BC* non coincidesse difatti con la base *EF*, ed i lati *BA*, *AC* non coincidessero coi lati *ED*, *DF*, ma venissero ad incontrarsi in un punto *G* diverso da *D* come [fanno] *EG*, *GF* [a], si sarebbero costruite su una stessa retta due rette *EG*, *GF* uguali rispettivamente ad altre due rette *ED*, *DF*, dalla stessa parte rispetto alla retta *EF*, ed aventi gli stessi estremi *E*, *F*, ma punti d'incontro *D*, *G* diversi [b]. Ma non è possibile costruirle (I, 7); qualora perciò si sovrapponga la base *BC* alla base *EF*, anche i lati *BA*, *AC* non potranno non coincidere rispettivamente coi lati *ED*, *DF*. Essi quindi coincideranno; cosicché anche l'angolo *BAC* coinciderà con l'angolo *EDF* e sarà ad esso uguale (noz. com. VII).

Dunque, se due triangoli... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 7.

È APPLICATA IN: I, 9, 11, 12, 23, 48; III, 1, 3, 9, 28, 37; IV, 9, 12; VI, 5; XI, 4, 6, 8, 10, 23, 29, 35; XIII, 7, 17.

a. Letteralmente: Se... i lati *BA*, *AC* non coincideranno coi lati *ED*, *DF*, ma verranno a cadere presso di essi (παραλλάξουσιν) come *EG*, *GF*.

b. Il greco dirà naturalmente; a punti diversi dalla stessa parte avendo gli stessi estremi.

PROPOSIZIONE 9.

Dividere per metà un angolo rettilineo dato[8].

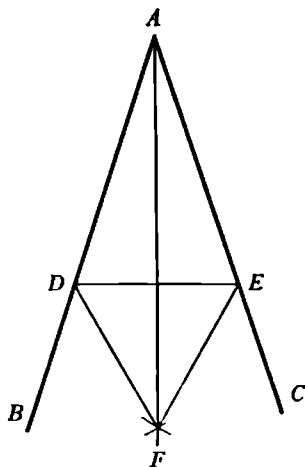
Sia BAC l'angolo rettilineo dato. Si deve dunque dividerlo per metà.

Si prenda su AB un punto a piacere D, da AC si sottragga AE uguale ad AD (I, 3), e si tracci la congiungente DE; si costruisca inoltre su DE il triangolo equilatero DEF (I, 1), e si tracci la congiungente AF; dico che l'angolo BAC è stato diviso per metà dalla retta AF.

Infatti, poiché AD è uguale ad AE, ed AF è comune, i due lati[a] DA, AF sono uguali rispettivamente ai due lati EA, AF. Ma la base DF è uguale alla base EF; l'angolo DAF è quindi uguale all'angolo EAF (I, 8).

Dunque, l'angolo rettilineo dato BAC è stato diviso per metà dalla retta AF. – C.D.F.

APPLICA: I, 1, 3, 8.

È APPLICATA IN: I, 10; IV, 4, 11, 13, 14.

a. Euclide non specifica letteralmente che si tratta di lati, come nemmeno dice in forma esplicita che sian rette; abbiamo già visto che, nel corso di una stessa proposizione, le indicazioni « lato » e « retta » possono trovarsi alternate con una certa indifferenza, e qui non ne abbiamo nessuna: il greco, col semplice articolo ἡ (πλευρά, lato, e così per εὐθεῖα, retta) lascia sottintendere se si indica preferibilmente l'uno o l'altra.

[8] Nella costruzione viene citato il procedimento costruttivo della I, 3, ma basterebbe applicare soltanto il postulato III.

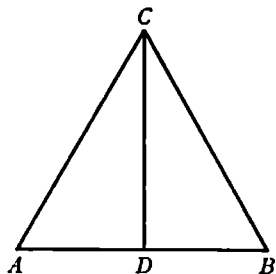
Di solito non viene oggi usato il triangolo equilatero, ma si costruisce il punto F come intersezione di due cerchi di centri D, E e di raggio uguale convenientemente scelto. Ma Euclide preferisce usare il triangolo equilatero, come fosse un pezzo complesso *prefabbricato*, nelle sue costruzioni. Non vuole,

PROPOSIZIONE 10.

Dividere per metà una retta terminata data.

Sia AB la retta terminata data; si deve dunque dividere per metà la retta terminata AB.

Si costruisca su essa il triangolo equilatero ABC (I, 1), e l'angolo ACB sia diviso per metà dalla retta CD (I, 9); dico che la retta AB è stata divisa per metà nel punto D.

Infatti, poiché AC è uguale a CB, e CD è comune, i due lati AC, CD sono uguali rispettivamente ai due lati BC, CD; e l'angolo ACD è uguale all'angolo BCD; la base AD è quindi uguale alla base BD (I, 4).

Dunque, la retta terminata data AB è stata divisa per metà in D. – C.D.F.

APPLICA: I, 1, 4, 9.

È APPLICATA IN: I, 12, 16, 42; II, 11, 14; III, 1, 9, 10, 14, 15, 25, 30, 33; IV, 5, 8; VI, 28, 29; X, 33, 34, 35, 59 lemma, 60, 100; XIII, 1.

PROPOSIZIONE 11.

Su una retta data, da un punto dato su essa, innalzare una linea retta perpendicolare[a].

Sia AB la retta data e C il punto dato su essa; si deve dunque innalzare sulla retta AB dal punto C una linea retta perpendicolare.

a. Letteralmente: alla retta data dal punto su essa dato condurre ad angoli retti una linea retta.

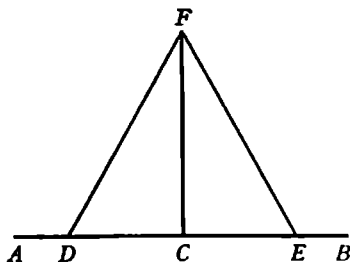
evidentemente, rimettere in gioco questioni riguardanti intersezioni di cerchi, tutte le volte che può usare il triangolo equilatero, per la costruzione del quale (I, 1) tali questioni si sono già presentate. Avviene così che, esaminando la figura, in questa proposizione e nelle due seguenti I, 10 e I, 11, non si vedono tracciamenti di cerchi: il triangolo equilatero assume appunto quella che, in senso evidentemente metaforico, abbiamo chiamato *funzione di pezzo prefabbricato*.

Si prenda su *AC* un punto a piacere *D*, si ponga *CE* uguale a *CD* (I, 3), su *DE* si costruisca il triangolo equilatero *FDE* (I, 1), e si tracci la congiungente *FC*; dico che sulla retta data *AB* dal punto *C* dato su essa è stata innalzata la linea retta perpendicolare *FC*.

Infatti, poiché *DC* è uguale a *CE*, e *CF* è comune, i due lati *DC*, *CF* sono uguali rispettivamente ai due lati *EC*, *CF*; e la base *DF* è uguale alla base *FE*, per cui l'angolo *DCF* è uguale all'angolo *ECF* (I, 8); e sono adiacenti. Ma quando una retta innalzata su un'altra retta produce gli angoli adiacenti uguali fra loro, ciascuno dei due angoli uguali è retto (def. X); quindi ciascuno dei due angoli *DCF*, *FCE* è retto.

Dunque, sulla retta data *AB* è stata innalzata dal punto *C* su essa dato la linea retta perpendicolare *CF*. – C.D.F.

APPLICA: I, 1, 8.

È APPLICATA IN: I, 13, 46, 48; II, 1, 9, 10; III, 1, 10, 15, 17, 19, 25, 30, 32, 33; IV, 3, 5, 6, 7; VI, 13, 16, 31; lemma di X, 14; XI, 11, 19.

PROPOSIZIONE 12.

Ad una data retta illimitata[a], *da un punto dato ad essa esterno*[b], *condurre una linea retta perpendicolare*[c] [9].

Sia *AB* la retta illimitata data, e *C* il punto dato, ad essa esterno: si deve dunque condurre alla retta illimitata

a. L'aggettivo greco ἄπειρος che significa appunto illimitato, senza confine, o, come di solito diciamo, infinito, e che preferiamo tradurre *illimitato* per le ragioni viste alla definizione XXIII.

b. Letteralmente: che non è su essa.

c. Qui si parla esattamente di una linea retta perpendicolare, κάθετος εὐθεῖα γραμμή, nell'intera espressione, cioè senza sottin-

[9] Questa proposizione si trova collocata nel libro primo unicamente per ragioni di simmetrica completezza: dopo la costruzione della perpendicolare

data AB, dal punto dato C ad essa esterno, una linea retta perpendicolare.

tendere nulla, mentre alla 11 si è parlato di una retta condotta ad angoli retti in quanto innalzata, laddove, come sappiamo, in κάθετος εὐθεῖα è l'idea del filo a piombo lasciato cadere sul terreno.

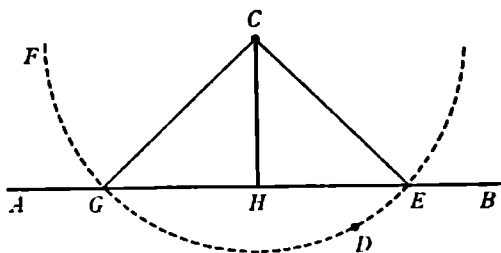
ad una retta per un punto su di questa (data nella I, 11) non poteva mancare la costruzione della perpendicolare *abbassata* da un punto esterno alla retta. Ma la proposizione stessa non viene utilizzata né nel resto del libro primo né nel libro secondo: essa viene applicata per la prima volta soltanto per dimostrare la III, 14. Sicché essa potrebbe senza danno alcuno essere spostata al libro terzo, dove troverebbe la sua collocazione più naturale fra la tredicesima e la quattordicesima proposizione, o anche, per ragioni di simmetria espositiva, subito dopo la seconda dello stesso libro, della quale costituisce in certo senso la proposizione inversa (cfr. nota alla III, 2).

Effettivamente la I, 12 si riferisce a proprietà del cerchio (le quali vengono appunto trattate nel libro terzo), e più precisamente si ricollega a questioni riguardanti le intersezioni di cerchio e retta. La precauzione usata da Euclide nella costruzione (di prendere un punto D situato da parte opposta di C rispetto alla retta AB) assicura che la retta AB passa per un punto interno al cerchio che vien tracciato: tale sarebbe il punto K intersezione della congiungente CD con la retta AB. Che la CD tagli la AB in un punto K proviene dall'avere scelto D da parte opposta di C rispetto ad AB: che K sia interno al cerchio risulta per il fatto che la distanza CK dal centro è minore del raggio CD. Ma la retta AB è infinita (ἄπειρος): cosa insolita in Euclide, che considera sempre rette limitate, cioè segmenti (soltanto nella I, 22 considera una semiretta, infinita da una parte). Dunque sulla retta AB, oltre ad un punto K interno al cerchio, si troverà certamente un punto L distante da C più del raggio, quindi esterno al cerchio. Si vede dunque che Euclide dispone le cose in modo che un segmento KL di AB abbia un estremo K interno al cerchio ed uno L esterno, sicché egli ammette tacitamente quel postulato (caso particolare del postulato della continuità) che noi enunciamo di solito così: « Se un segmento di retta ha un estremo interno ed uno esterno ad un cerchio, esso taglia la circonferenza in un punto ». Quindi KL taglia la circonferenza nel punto E: similmente la AK taglia la circonferenza nel punto G dall'altra parte di K.

In definitiva, Euclide qui, più che aver tralasciato una dimostrazione, ha omesso l'enunciazione di un postulato: si è però garantito che risul-

Si prenda difatti dall'altra parte della retta AB un punto a piacere D, con centro C e raggio CD si descriva il cerchio EFG (post. III), si divida la retta EG per metà in H (I, 10) e si traccino le congiungenti CG, CH, CE; dico che CH è la perpendicolare condotta alla retta illimitata AB dal punto dato C ad essa esterno.

Infatti, poiché GH è uguale a HE, e HC è comune, i lati GH, HC sono uguali rispettivamente ai lati EH, HC; e la base CG è uguale alla base CE, per cui l'angolo CHG è uguale all'angolo EHC (I, 8). Ed essi sono adiacenti. Ma quando una retta innalzata su un'altra retta forma gli angoli adiacenti uguali tra loro, ciascuno dei due angoli uguali è retto, e la retta innalzata si chiama perpendicolare a quella su cui è innalzata (def. X).

Dunque, alla retta illimitata AB, dal punto dato C ad essa esterno, è stata condotta la perpendicolare CH. – C.D.F.

APPLICA: I, 8, 10.

È APPLICATA IN: III, 14, 15, 16, 35, 36; IV, 4, 13; XI, 11.

tassero verificate le condizioni perché il «postulato» stesso fosse applicabile.

Proclo, nel suo *Commento* (Ed. Friedlein, p. 283, 7-10, trad. Ver Eecke, p. 243) ci dice, a proposito di questa proposizione I, 12: «Questo problema lo investigò per primo Enopide, ritenendolo utile per l'astronomia. Egli designa la perpendicolare con l'antica denominazione *secondo lo gnomone*, poiché anche lo gnomone forma angoli retti con l'orizzonte» (per il termine «gnomone» cfr. nota alla I, 43). Una seconda attribuzione ad Enopide troviamo pure in Proclo nel commento alla proposizione I, 23. A questa, ed alla nota relativa alla I, 22, rinviamo per l'interpretazione unitaria delle due attribuzioni a Enopide (cfr. FRAJESE, *Il cerchio nella geometria di Enopide di Chio*, in «Archimede», dicembre 1967, pp. 285-294).

PROPOSIZIONE 13.

Se una retta innalzata su un'altra retta forma degli angoli, essa verrà a formare o due angoli retti od angoli la cui somma è uguale a due retti [10].

Infatti, una retta *AB* innalzata sulla retta *CD* formi gli angoli *CBA*, *ABD*; dico che gli angoli *CBA*, *ABD* o sono due retti od angoli la cui somma è uguale a due retti.

Ora, se l'angolo *CBA* è uguale all'angolo *ABD*, essi sono due retti (def. X). Se questo invece non è, si innalzi dal punto *B* su *CD* la retta perpendicolare *BE* (I, 11), per cui sono due angoli retti *CBE*, *EBD*; e poiché l'angolo *CBE* è uguale alla somma dei due angoli *CBA*, *ABE*, si aggiunga in comune [all'uno e all'altra] l'angolo *EBD* [a]; la somma degli angoli *CBE*, *EBD* è quindi uguale alla somma dei tre angoli *CBA*, *ABE*, *EBD* (noz. com. II). Di nuovo, poiché l'angolo *DBA* è uguale alla somma dei due angoli *DBE*, *EBA*, si aggiunga in comune all'uno e all'altra l'angolo *ABC*; la somma degli angoli *DBA*, *ABC* è perciò uguale alla somma dei tre angoli *DBE*, *EBA*, *ABC* (noz. com. II). Ma fu dimostrato che pure la somma degli angoli *CBE*, *EBD* è uguale alla somma di quegli stessi tre angoli; e cose che sono uguali ad una stessa sono uguali anche fra loro (noz. com. I); sono quindi uguali pure la somma degli angoli *CBE*, *EBD* e quella degli angoli *DBA*, *ABC*; ma la somma degli angoli

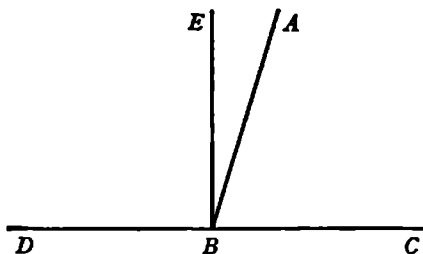
a. Espressione caratteristica nella geometria greca, ma di non facile resa letterale: « si aggiunga l'angolo *EBD* comune » sarebbe una traduzione inesatta, poiché l'angolo non è comune prima di essere aggiunto, mentre nel caso della sottrazione, κοινὴ ἀφῃρήσθω (invece di κοινὴ προσκείσθω, per la somma), « risulti sottratto l'angolo comune » sarebbe resa meno insoddisfacente, ma neanche esatta; abbiamo preferito aggiungere qualche parola.

[10] Questa proposizione è per noi evidente, dato che tra gli angoli consideriamo anche quello piatto. Euclide non considera, invece, detto angolo (come è stato spiegato nella nota alla def. VIII) e quindi egli deve *dimostrare* che la somma di due angoli adiacenti è uguale a due retti.

CBE, EBD è uguale a due retti, per cui anche la somma degli angoli *DBA, ABC* è uguale a due retti.

Dunque, se una retta innalzata... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 11.

È APPLICATA IN: I, 14, 15, 17, 28, 29, 32; III, 32; IV, 3, 15; VI, 7.

PROPOSIZIONE 14.

Se per un punto di una retta, da parti opposte rispetto ad essa, si tracciano due altre rette, e queste formano con la prima angoli adiacenti la cui somma sia uguale a due retti, esse saranno per diritto fra loro[a] [11].

Infatti, per il punto *B* della retta *AB* si traccino le due rette *BC, BD*, da parti opposte rispetto al punto *B*, e formino con *AB* gli angoli adiacenti *ABC, ABD*, la cui somma sia uguale a due retti; dico che *BD, CB* sono per diritto [, cioè sulla stessa retta,] fra loro.

Se *BD* non fosse difatti in linea retta con *BC*, [supponiamo che] sia *BE* in linea retta con *CB*.

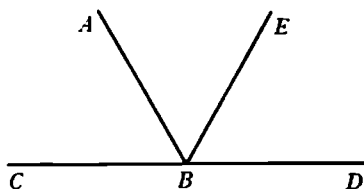
a. Letteralmente: se con una retta ed in un punto su essa due rette che non giacciano dalla stessa parte producono gli angoli adiacenti uguali a due retti, le rette saranno per diritto, in retta, fra loro.

[11] Questa proposizione può dirsi inversa della precedente. In quella (I, 13) si stabilisce che la somma di due angoli adiacenti è uguale a due retti: in questa (I, 14) si afferma che se la somma di due angoli consecutivi è uguale a due retti, gli angoli sono adiacenti, cioè i loro lati non comuni sono per diritto.

Zeuthen osserva che in questa proposizione si fa tacito uso del postulato quarto (che tutti gli angoli retti sono uguali tra loro), e interpreta la proposizione stessa nel senso che è unico il prolungamento di una retta (non potrebbe *CB* avere altro prolungamento che *BD*).

Poiché dunque [in tal caso] la retta *AB* risulta innalzata sulla retta *CBE*, la somma degli angoli *ABC*, *ABE* è uguale a due retti (I, 13); ma anche la somma degli angoli *ABC*, *ABD* è uguale a due retti, per cui la somma degli angoli *CBA*, *ABE* sarebbe uguale alla somma degli angoli *CBA*, *ABD* (post. IV e noz. com. I). Si sottragga da ambedue le somme l'angolo *CBA* [a]; l'angolo rimanente *ABE* sarebbe perciò uguale all'altro angolo rimanente *ABD* (noz. com. III), il minore al maggiore: il che è impossibile (noz. com. VIII). Perciò *BE* non è in linea retta con *CB*.

Similmente potremo dimostrare che nessun'altra retta lo è, eccetto *BD*; quindi *CB* è in linea retta con *BD*.

Dunque, se per un punto di una retta... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

Applica: I, 13.

È applicata in: I, 45, 47; VI, 14, 15, 23, 25, 32; X, 25; XI, 38.

Proposizione 15.

Se due rette si tagliano fra loro, formano gli angoli opposti al vertice[b] *tra loro uguali*[12].

Infatti, le due rette *AB*, *CD* si taglino fra loro nel punto *E*; dico che l'angolo *AEC* è uguale all'angolo [opposto al ver-

a. Letteralmente: In comune risulti sottratto l'angolo *CBA*.
b. αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι, « gli angoli al vertice », ossia gli angoli « a modo di vertice », « secondo vertice » o « aventi verticalmente relazione », vale a dire gli angoli opposti verticalmente, così come Proclo (*op. cit.*, pp. 298, 14-24) spiega di preciso la dif-

[12] Il teorema sull'uguaglianza degli angoli opposti al vertice è per noi, che consideriamo tra gli angoli l'angolo piatto, di estrema semplicità. Euclide è costretto, invece, a servirsi della I, 13, che stabilisce essere uguale a due retti la somma di due angoli adiacenti. In tale senso può parlarsi di una « rigorizzazione » della dimostrazione per opera di Euclide, e nello stesso

tice] *DEB*, e l'angolo *CEB* uguale all'angolo [opposto al vertice] *AED*.

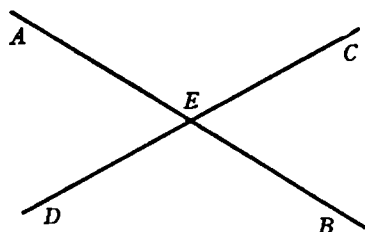
Poiché difatti la retta *AE* è innalzata sulla retta *CD* così da formare gli angoli *CEA*, *AED*, la somma di [tali] angoli *CEA*, *AED* è uguale a due retti (I, 13). Di nuovo, poiché la retta *DE* è innalzata sulla retta *AB* così da formare gli angoli *AED*, *DEB*, la somma di tali angoli è pure uguale a due retti (id.). Ma fu dimostrato che pure la somma degli angoli *CEA*, *AED* è uguale a due retti; quindi la somma degli angoli *CEA*, *AED* è uguale alla somma degli angoli *AED*, *DEB* (post. IV e noz. com. I). Si sottragga da ambedue le somme l'angolo *AED*; l'angolo rimanente *CEA* è perciò uguale all'altro angolo rimanente *BED* (noz. com. III). Similmente potremo dimostrare che anche gli angoli *CEB*, *DEA* sono uguali[a].

ferenza tra gli angoli adiacenti – αἱ ἐφεξῆς γωνίαι – e gli angoli al vertice – αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι –: i primi, nel caso in cui una retta incontra un'altra in un punto che non è né l'uno né l'altro degli estremi, né è essa stessa prolungata al di là del punto di contatto, per cui gli angoli prodotti dalle due rette sono adiacenti; i secondi, quando la prima retta essendo prolungata, le due rette – che si attraversano allora nel punto di contatto – producono due coppie di angoli al vertice, opposti verticalmente, e così chiamati perché da opposte direzioni convergono ad un punto, cioè l'intersezione delle linee, come vertice (κορυφή).

a. Tale, anche letteralmente, la formula greca.

senso può intendersi la testimonianza di Proclo (Friedlein, p. 298, 1-5, Ver Eecke, p. 255) che risulterebbe altrimenti pressoché incomprensibile: « Questo teorema, come dice Eudemo, fu trovato per primo da Talete, e ritenuto degno di una dimostrazione scientifica (ἐπιστημονικῆς ἀποδείξεως) dall'autore degli *Elementi* » (Euclide). Potrebbe infatti sembrare assurdo che un teorema tanto semplice dovesse attendere più di due secoli, da Talete che lo avrebbe intuito e sperimentato, ad Euclide che lo avrebbe (per primo) dimostrato « scientificamente ».

Per quanto riguarda il corollario, del resto di dubbia autenticità, va osservato che attraverso il teorema degli angoli opposti al vertice esso raddoppia, per dir così, la portata della I, 13. In detta proposizione s'è mostrato che la somma di due angoli adiacenti è uguale a due retti: in questo corollario si fa vedere che quel che noi chiamiamo « angolo giro » equivale a quattro retti.

Dunque, se due rette si tagliano fra loro... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 13.

È APPLICATA IN: I, 16, 28, 29, 44; II, 10; IV, 15; XI, 4, 33, 38.

COROLLARIO (πόρισμα).

È da ciò evidente che se due rette si tagliano fra loro, esse formeranno al punto di incontro angoli[a] uguali complessivamente a quattro retti[b].

PROPOSIZIONE 16.

In ogni triangolo[c], *se si prolunga uno dei lati, l'angolo esterno è maggiore di ciascuno dei due angoli interni ed opposti*[13].

a. Letteralmente: esse produrranno gli angoli alla sezione... ecc., vale a dire *al punto* in cui si tagliano, trattandosi di due linee; e dovrebbe intendersi *la linea* di sezione, se si trattasse di due superficie, pur avendo a che fare con la sola parola *sezione*, τομή. È l'uso regolare del termine.

b. La genuinità del corollario sembra però dubitevole (cfr. HEATH, *op. cit.*, vol. I, p. 278, ed *Euclid in Greek*, p. 186; ENRIQUES e collaboratori, *op. cit.*, I, 80).

c. Il greco dice di regola « ciascun, ogni triangolo », dove noi diciamo « un (ossia, un qualunque) triangolo »; manteniamo *ogni* come aderenza traduttiva possibile.

[13] Questo teorema, che possiamo chiamare *teorema dell'angolo esterno maggiore*, è una delle proposizioni più importanti del libro primo degli *Elementi*. E poiché rappresenta una proposizione-chiave per la teoria delle parallele (che si ha motivo di ritenere sistemata da Euclide) risulta assai verosimile l'attribuzione a Euclide stesso del suo processo dimostrativo, e del suo posto particolare nella trattazione. Diciamo « del suo processo dimostrativo » perché senza dubbio la proposizione era ben nota prima di Euclide, costituendo un semplice corollario del *teorema dell'angolo esterno somma*

Sia *ABC* un triangolo, ed un suo lato *BC* sia stato prolungato oltre *C* sino a *D*[a]; dico che l'angolo esterno *ACD* è maggiore di ciascuno dei due angoli interni ed opposti *CBA*, *BAC*.

Si divida *AC* per metà in *E* (I, 10); tracciata la congiungente *BE* la si prolunghi oltre *E* e sul prolungamento si ponga *EF* uguale a *BE* (I, 3), si tracci la congiungente *FC*, e si prolunghi *AC* oltre *C* sino a *G* (post. II).

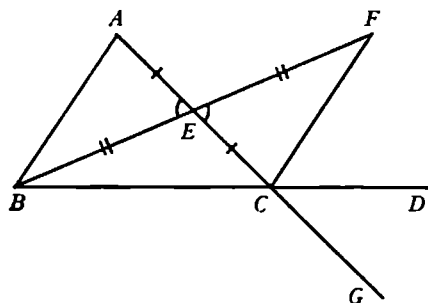
Poiché dunque *AE* è uguale ad *EC*, e *BE* è uguale ad *EF*, i due lati *AE*, *EB* sono uguali rispettivamente ai due lati *CE*, *EF*; e l'angolo *AEB* è uguale all'angolo *FEC* – essi sono difatti angoli opposti al vertice (I, 15) –, per cui la base *AB* è uguale alla base *FC*, il triangolo *ABE* è uguale al triangolo *FEC*, e gli angoli rimanenti del primo, opposti ai lati uguali, sono uguali ai rispettivi angoli del secondo (I, 4); l'angolo *BAE* è perciò uguale all'angolo *ECF*. Ma l'angolo *ECD* è maggiore dell'angolo *ECF* (noz. com. VIII); quindi l'angolo *ACD* è maggiore dell'angolo *BAE*. Similmente, divisa per metà *BC*, si potrà dimostrare che anche l'angolo *BCG*, vale a dire quello *ACD* (I, 15), è maggiore pure dell'angolo *ABC*.

a. Letteralmente: « un suo lato *BC* sia stato prolungato sino a *D* » (cioè, sino al punto *D*); e pure dopo si avrà: « e dopo che fu tracciata la congiungente *BE*, risulti essa prolungata per diritto sino a *F*, e si ponga *EF* uguale a *BE* ». Abbiamo, vale a dire, adottato formule opportune alla comprensione.

(I, 32): se, infatti un angolo esterno è uguale alla somma dei due angoli interni non adiacenti, è evidentemente maggiore di ciascuno di essi.

La I, 16 si distingue per l'estrema semplicità dei mezzi impiegati (soltanto il primo criterio di uguaglianza dei triangoli e l'uguaglianza degli angoli opposti al vertice). Presuppone tuttavia l'indefinita prolungabilità della retta (post. II) dato che il segmento *BE*, qualunque esso sia, *va prolungato di altrettanto* in *EF*: il teorema dell'angolo esterno maggiore non varrebbe, ad esempio, per triangoli sferici.

Il significato della I, 16 in relazione alla teoria delle parallele è il seguente: se due rette *BA*, *CA* si incontrano in un punto *A*, cioè se due rette di un piano non sono parallele, esse, tagliate dalla trasversale *BD*, formano angoli corrispondenti (*ABC* e *ACD*) disuguali. Segue perciò che quando gli angoli corrispondenti sono uguali, le rette sono necessariamente parallele, cioè segue il cosiddetto *teorema diretto sulle parallele* (I, 27-28).

Dunque, in ogni triangolo, se si prolunga uno dei lati... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 4, 10, 15.

È APPLICATA IN: I, 17, 18, 21, 26, 27; III, 2, 23.

PROPOSIZIONE 17.

In ogni triangolo la somma di due angoli, comunque presi [a], *è minore di due retti* [14].

Sia ABC un triangolo; dico che nel triangolo ABC la somma di due angoli, comunque presi, è minore di due retti.

a. Si dice naturalmente *i due angoli sono minori di due retti*, ma il *comunque presi assieme* è letterale. Si potrebbe veder qui la forza dell'articolo definito greco: αἱ δύο γωνίαι, i due angoli, vuol dire di preciso «i due angoli che possono esser presi, qualunque essi siano» (e noi diciamo semplicemente, di solito, «due angoli»); ed il testo poi determina πάντῃ μεταλαμβανόμενοι, cioè comunque presi assieme, comunque sommati.

[14] Questa proposizione, come si vede dalla sua dimostrazione, è un corollario immediato del teorema I, 16 dell'angolo esterno maggiore. Si tratta di un importante risultato, che permette di classificare i triangoli secondo i loro angoli. Infatti, se la somma di due angoli di un triangolo deve essere minore di due retti, non possono esistere in un triangolo due angoli retti, o due ottusi, o un retto ed un ottuso (DANTE, *Paradiso*, canto XVII, v. 15: *Non capere in triangol due ottusi*). Necessariamente, dunque, almeno due angoli di un triangolo sono acuti (e segue la distinzione in triangoli rettangoli, ottusangoli, acutangoli).

La I, 17 potrebbe anche ricavarsi come conseguenza del teorema sulla somma di tutt'e tre gli angoli del triangolo uguale a due retti (la somma di due angoli sarebbe certamente minore), e ciò in quanto la I, 17 non viene utilizzata per le proposizioni intermedie tra di essa e la I, 32, nella quale appunto Euclide dimostra la proprietà fondamentale sulla somma dei tre angoli di un triangolo. Così pure, come s'è visto, la I, 16 (teorema

Infatti, si prolunghi BC oltre C sino a D (post. II).

E poiché nel triangolo ABC l'angolo ACD è esterno, esso è maggiore dell'angolo interno ed opposto ABC (I, 16).

dell'angolo esterno maggiore) può ricavarsi come conseguenza della stessa I, 32 che dà anche il teorema dell'angolo esterno somma. Ma la I, 16 viene applicata per proposizioni intermedie: non così la I, 17 che viene applicata per la prima volta soltanto nel libro terzo. La proposizione I, 17 è dunque inutile per l'economia generale degli *Elementi*. Perché, dunque, Euclide l'ha data?

La spiegazione più ovvia consiste nel rilevare che la I, 17, come la sua collocazione mostra (è compresa tra le prime ventotto proposizioni del libro primo!), è indipendente dal quinto postulato, o postulato di Euclide propriamente detto. La I, 32 dipende invece da detto postulato (attraverso la I, 29). Euclide ha dunque voluto mostrare fin dove si poteva giungere senza applicare il postulato quinto: questa separazione netta tra proposizioni che applicano detto postulato (dalla I, 29 in poi) e quelle che non l'applicano (le prime ventotto proposizioni del libro primo) è negli *Elementi* assai evidente, e costituisce uno dei motivi fondamentali del libro primo.

Questa *separazione* rappresenta una *finezza* di Euclide, il quale vuole adoperare soltanto postulati strettamente necessari: vi si può anche scorgere una specie di esitazione di Euclide di fronte all'uso di quel quinto postulato, che resistette ai suoi tentativi di dimostrazione.

Ma un'altra considerazione può farsi nei riguardi dello *scopo* dell'inserzione della I, 17, apparentemente inutile. Va anzitutto avvertito che Euclide ama considerare quelli che possiamo chiamare *quadrilateri* di proposizioni (ad esempio in V, 7, 8, 9, 10 ed in X, 9), cioè gruppi di quattro proposizioni legate tra loro da uno speciale vincolo logico: proposizione diretta, inversa, contraria, contronominale.

Se rappresentiamo la *diretta* schematicamente con:

$$I \rightarrow T$$

(dall'ipotesi I segue la tesi T)

l'inversa è: $T \rightarrow I$

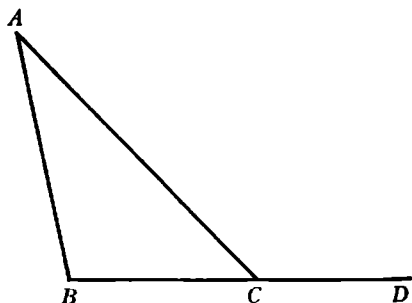
la contraria è: $-I \rightarrow -T$

(dalla negazione di I segue la negazione di T)

e la contronominale è $-T \rightarrow -I$

(dalla negazione di T segue la negazione di I).

La cosiddetta contronominale è, come si vede, l'inversa della contraria, o, ciò che fa lo stesso, la contraria dell'inversa, ed è sempre *valida* insieme alla diretta, alla quale è logicamente equivalente (ciascuna di esse si ricava dall'altra). Per esempio, dalla diretta $I \rightarrow T$ segue subito la contronominale se si ammette il *principio del terzo escluso*. Infatti la $-T \rightarrow -I$ può esser subito dimostrata per assurdo partendo dalla diretta. Se da $-T$ non seguisse $-I$ ne seguirebbe I. Ma siccome da I (per la *diretta*) segue T, da $-T$ seguirebbe T, ciò che è assurdo. Ebbene: se dagli *Elementi* si

Si aggiunga in comune l'angolo *ACB*; quindi la somma degli angoli *ACD*, *ACB* è maggiore della somma degli angoli *ABC*, *BCA* (noz. com. IV)[a]. Ma la somma degli angoli *ACD*, *ACB* è uguale a due retti (I, 13); la somma degli angoli *ABC*, *BCA* è quindi minore di due retti. Similmente potremo dimostrare che anche la somma degli angoli *BAC*, *ACB* è minore di due retti e così, infine, quella degli angoli *CAB*, *ABC*.

Dunque, in ogni triangolo la somma di due angoli... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 13, 16.

È APPLICATA IN: III, 16, 31; VI, 3, 4, 7; XI, 14.

a. È fra le nozioni comuni espunte da Heiberg. Ricordiamo ancora che esse sono la IV, V e VI.

togliesse l'apparentemente inutile I, 17, verrebbe a mancare uno dei *lati* di un quadrilatero di proposizioni fondamentali per la teoria delle parallele. Prendendo infatti come proposizione diretta il quinto postulato, la I, 17 ne costituisce l'inversa, mentre la I, 27-28 ne costituisce la contraria e la I, 29 la contronominale. Per le ultime due proposizioni, rimandiamo il lettore alle note ad esse relative: che la I, 17 sia l'inversa del postulato quinto, si vede poi subito osservando che in quest'ultimo l'ipotesi è che la somma di due angoli sia minore di due retti, mentre questa è la tesi della I, 17: la tesi del postulato quinto è che due rette s'incontrino, mentre questa è l'ipotesi della I, 17 (cioè che esista un triangolo, ossia che due rette s'incontrino, mentre il terzo lato del triangolo è costituito dalla cosiddetta « trasversale »).

Va finalmente osservato che Legendre (seguendo anche un certo corso di idee di Saccheri) dimostra che dalla I, 17 può ricavarsi che la somma di tutt'e tre gli angoli di un triangolo non può superare due retti: ciò applicando anche la X, 1 di Euclide (cfr. nota a detta prop.). Il notevolissimo risultato di Saccheri-Legendre rappresenta il massimo al quale possa giungersi, senza applicare il quinto postulato, in materia di somma dei tre angoli di un triangolo. Ad esso si collega un secondo risultato, che possiamo pure chiamare « di Saccheri-Legendre », secondo il quale se in un solo triangolo la somma dei tre angoli è uguale a due retti, lo stesso si verifica per qualunque altro triangolo.

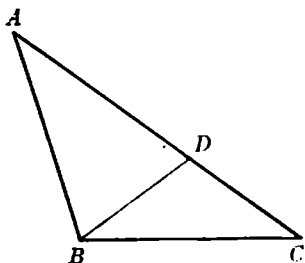
PROPOSIZIONE 18.

In ogni triangolo, a lato maggiore è opposto angolo maggiore [a] [15].

Infatti, sia ABC un triangolo avente il lato AC maggiore del lato AB; dico che anche l'angolo ABC è maggiore dell'angolo BCA.

Poiché AC è difatti maggiore di AB, si ponga AD uguale ad AB (I, 3), e si tracci la congiungente BD.

E poiché nel triangolo BCD l'angolo ADB è esterno, esso è maggiore dell'angolo interno ed opposto DCB (I, 16); ma l'angolo ADB è uguale all'angolo ABD, poiché sono pure uguali il lato AB ed il lato AD (I, 5); anche l'angolo ABD è quindi maggiore dell'angolo ACB, per cui l'angolo ABC è molto maggiore dell'angolo ACB (noz. com. VIII).

Dunque, in ogni triangolo, a lato maggiore... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 3 (o anche post. III), 5, 16.

È APPLICATA IN: I, 19.

a. Letteralmente: il lato maggiore sottende l'angolo maggiore.

[15] È questa, nella sua classica semplicità, una delle più belle dimostrazioni degli *Elementi*. Oseremmo dire che mai essa sia stata variata attraverso i secoli.

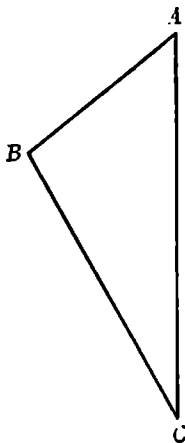
Effettivamente è una dimostrazione eseguita, per dir così, con grande larghezza, col ricorso alla «più forte ragione»: si deve dimostrare che l'angolo ABC è maggiore di quello BCA, e si riesce a dimostrare che già è maggiore di BCA una sola parte (ABD) di ABC.

Si osservi che la dimostrazione è fondata sul teorema dell'angolo esterno maggiore I, 16: ove questo non avesse una dimostrazione autonoma, ma si ricavasse come corollario del teorema I, 32 dell'angolo esterno somma, potrebbe credersi che il nostro teorema I, 18 dipendesse dal postulato quinto: invece Euclide mostra, con vero *esprit de finesse*, che esso ne è indipendente. Così per il teorema inverso (I, 19) che segue immediatamente. Sicché i due teoremi fondamentali sulle disuguaglianze tra lati ed angoli di un triangolo risultano indipendenti dal quinto postulato.

PROPOSIZIONE 19.

In ogni triangolo, ad angolo maggiore è opposto lato maggiore[a] [16].

Sia ABC un triangolo avente l'angolo ABC maggiore dell'angolo BCA; dico che anche il lato AC è maggiore del lato AB.

Infatti, se non lo fosse, AC sarebbe o uguale ad AB o minore; ora, AC non è uguale ad AB: difatti anche l'angolo ABC sarebbe in tal caso uguale all'angolo ACB (I, 5); ma non lo è, per cui AC non è uguale ad AB. Tuttavia, AC non è neppure minore di AB; in tal caso anche l'angolo ABC sarebbe difatti minore dell'angolo ACB (I, 18), e non lo è; quindi AC non è minore di AB. Ma fu dimostrato che non è nemmeno uguale ad esso. Perciò AC è maggiore di AB.

Dunque, in ogni triangolo, ad angolo maggiore... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 5, 18.

È APPLICATA IN: I, 20, 24; III, 2, 16, 18.

a. Letteralmente: all'angolo maggiore si sottende il lato maggiore.

[16] Questa proposizione è l'inversa della precedente, della quale si serve per la dimostrazione. È, questo, uno dei più eleganti esempi di dimostrazione per assurdo. È poi superfluo richiamare l'attenzione sull'importanza del teorema, in base al quale (tanto per citare un esempio) si ricava che in ogni triangolo rettangolo l'ipotenusa è maggiore di ciascuno dei cateti.

PROPOSIZIONE 20.

In ogni triangolo la somma di due lati, comunque presi, è maggiore del lato rimanente [17].

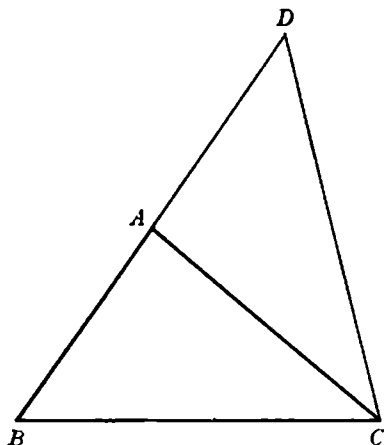
Infatti, sia ABC un triangolo; dico che la somma di due suoi lati, comunque presi, è maggiore del lato rimanente, cioè che la somma di BA, AC è maggiore di BC, la somma di AB, BC è maggiore di AC, e la somma di BC, CA è maggiore di AB.

Si prolunghi difatti BA oltre A, [sul prolungamento] si ponga AD uguale a CA (I, 3), e si tracci la congiungente DC.

Poiché dunque DA è uguale ad AC, anche l'angolo ADC è uguale all'angolo ACD (I, 5); l'angolo BCD è quindi maggiore dell'angolo ADC (noz. com. VIII); e poiché DCB è un triangolo che ha l'angolo BCD maggiore dell'angolo BDC e ad angolo maggiore è opposto lato maggiore (I, 19), DB è maggiore di BC. Ma DA è uguale ad AC; perciò la somma di BA, AC è maggiore di BC. Similmente potremo dimostrare che anche la somma di AB, BC è maggiore di CA, e quella di BC, CA è maggiore di AB.

Dunque, in ogni triangolo... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 3, 5, 19.

È APPLICATA IN: I, 21; III, 7, 8, 11, 12, 15; XI, 20, 22.

[17] Anche questa proposizione è una delle più importanti sui triangoli, e la sua dimostrazione è una di quelle che son rimaste classicamente invariate attraverso i secoli. È opportuno richiamare l'attenzione sul fatto che essa non dipende dal postulato quinto.

Il suo significato più generale è che la linea retta rappresenta il minimo percorso tra due punti, se paragonato a spezzate rettilinee: sarà

PROPOSIZIONE 21.

Se su uno dei lati di un triangolo, a partire dagli estremi, si costruiscono due rette che si incontrino internamente al triangolo stesso, le rette così costruite, sommate assieme[a], *saranno [complessivamente] minori dei due rimanenti lati del triangolo pure sommati assieme, ma verranno a comprendere un angolo maggiore*[18].

Infatti, nel triangolo ABC si costruiscano su uno dei lati BC, a partire dagli estremi B, C, le due rette BD, DC

a. Sia il « così » del *così costruite*, come il *sommate assieme*, ed il *pure sommati assieme* dei lati del triangolo, posteriormente, non esistono nel testo greco.

poi Archimede a postulare tale proprietà di minimo anche rispetto alle linee curve.

A proposito di questo teorema I, 20, Proclo ci riporta (Friedlein, p. 322, 4-14, Ver Eecke, p. 275) la curiosa notizia che secondo gli Epicurei esso è evidente anche ad un asino: infatti se si pone del foraggio ad un estremo di un lato di un triangolo, l'asino, che ha fame, partendo dall'altro estremo, percorre un solo lato e non due!

Euclide non aggiunge la proprietà che in ogni triangolo un lato è maggiore della differenza degli altri due, perché (date le tre disuguaglianze riguardanti la somma) se ne possono, per tutti i casi possibili, ricavare le disuguaglianze riguardanti la differenza: disuguaglianze che non offrirebbero dunque alcun nuovo elemento.

[18] Per rendere più facile la lettura riassumiamo il testo usando il simbolo > (maggiore di):

Per i lati del triangolo ABE vale la relazione:

$$AB + AE > BE$$

da cui: $$AB + AE + EC > BE + EC$$

cioè: $$AB + AC > BE + EC \quad (*)$$

Ma: $$CE + ED > CD$$

da cui: $$CE + ED + DB > CD + DB$$

ossia: $$CE + EB > CD + DB$$

ossia ancora (alterando l'ordine al primo membro):

$$BE + EC > CD + DB$$

e confrontando con la (*):

$AB + AC > CD + DB$ come si doveva dimostrare.

Così per gli angoli: $BDC > CEB$

che si incontrano internamente ad esso; dico che la somma di *BD*, *DC* è minore della somma dei due rimanenti lati *BA*, *AC* del triangolo, ma che *BD*, *DC* comprendono un angolo maggiore, cioè che *BDC* è maggiore di *BAC*.

Si prolunghi difatti *BD* oltre *D* sino ad *E*. Poiché in ogni triangolo la somma di due lati è maggiore del lato rimanente, nel triangolo *ABE* la somma dei due lati *AB*, *AE* è maggiore di *BE* (I, 20); si aggiunga *EC* in comune [alla somma dei due lati ed al terzo lato]; la somma di *BA*, *AC* è quindi maggiore della somma di *BE*, *EC* (noz. com. IV). Di nuovo, poiché nel triangolo *CED* la somma dei due lati *CE*, *ED* è maggiore di *CD*, si aggiunga *DB* in comune [alla somma dei due lati ed al terzo lato]; la somma di *CE*, *EB*[a] è perciò maggiore della somma di *CD*, *DB*. Ma fu dimostrato che la somma di *BA*, *AC* è maggiore della somma di *BE*, *EC*; quindi la somma di *BA*, *AC* è molto maggiore della somma di *BD*, *DC*.

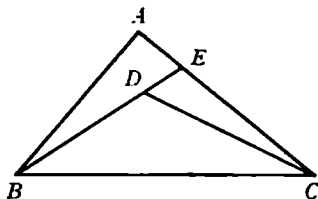
Di nuovo, poiché in ogni triangolo l'angolo esterno è maggiore dell'angolo interno ed opposto (I, 16), nel triangolo *CDE* l'angolo esterno *BDC* è maggiore dell'angolo *CED*. E per la stessa ragione, anche nel triangolo *ABE* l'angolo esterno *CEB* è maggiore dell'angolo *BAC*. Ma fu dimostrato che l'angolo *BDC* è maggiore dell'angolo *CEB*, per cui l'angolo *BDC* è molto maggiore dell'angolo *BAC*.

a. Così in greco; si tratta di *BE*, *EC*, evidentemente, come è detto dopo.

Ma: $CEB > BAC$

quindi: $BDC > BAC$

Per quanto riguarda i segmenti, il procedimento dimostrativo consiste nel dimostrare un caso particolare più semplice (quello nel quale il punto *D* coincida con *E*, cioè si trovi sul lato *AC*): questo stesso caso particolare viene poi applicato una seconda volta nel triangolo *BCE* (dato che il punto *D* di *CD* si trova sul lato *BE*).

Dunque, se su uno dei lati di un triangolo... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 16, 20.

È APPLICATA IN: III, 8.

PROPOSIZIONE 22.

Con tre rette uguali a tre rette date, costruire un triangolo: occorre dunque che la somma di due di esse, comunque prese, sia maggiore della rimanente (I, 20) [a][19].

Siano A, B, C tre rette date, e la somma di due di esse, comunque prese, sia maggiore della rimanente, cioè la somma

a. L'enunciato prosegue con le parole seguenti, che costituiscono probabilmente una glossa e sono una mera, ed anche inutile, ripetizione dell'enunciato di I, 20: « dato che pure, in ogni triangolo, la somma di due lati comunque presi è maggiore del lato rimanente ». Nell'enunciato stesso, da *occorre dunque* in poi, abbiamo lo stabilimento di un διορισμός, ossia della condizione che è necessaria perché la soluzione del problema sia possibile, ed è questo negli *Elementi* il primo caso di διορισμός in tal senso, cioè come condizione generale; la formula che lo introduce, il δεῖ δή, è la medesima che introduce il διορισμός nell'altro senso di ciò che va effettuato quale condizione particolare per ottenere ciò che ricerchiamo in generale (ad es., in I, 10: tagliare in due parti uguali la retta terminata AB).

[19] Questa proposizione presuppone, per l'effettiva possibilità della costruzione in essa eseguita, una proposizione che Euclide non esprime esplicitamente, e che possiamo dire in certo senso inversa della I, 20. In quest'ultima si dimostra che i tre lati di ogni triangolo sono *rette* tali che la somma di due di esse, in qualunque modo prese, supera la terza (ciò vale quanto dire che ciascun lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza). Qui, invece, si vuol « dimostrare » che se dette condizioni di disuguaglianza fra tre rette si verificano, con le tre rette si può costruire un triangolo. Abbiamo posto tra virgolette la parola

di A, B sia maggiore di C, la somma di A, C sia maggiore di B, ed infine quella di B, C sia maggiore di A; si deve dunque costruire un triangolo i cui lati siano tre rette rispettivamente uguali ad A, B, C.

Si assuma una retta DE terminata in D ed illimitata dalla parte di E, e si ponga DF uguale ad A, sia posta FG uguale a B, e si ponga GH uguale a C (I, 3). Con centro F e raggio FD si descriva il cerchio DKL (post. III); di nuovo,

«dimostrare», perché effettivamente una vera dimostrazione Euclide non ce la dà, né poteva darla se anche oggi, per noi, questa proposizione inversa della I, 20 va riguardata come un postulato (che taluno chiama appunto *postulato del triangolo*). Si tratta di questioni riguardanti le intersezioni di due circonferenze, e più precisamente si tratta di ammettere che se determinate condizioni si verificano (che la distanza dei centri sia minore della somma dei raggi e maggiore della loro differenza) le due circonferenze sono secanti.

Noi ricorriamo per questo (s'è detto) ad un caso particolare del postulato della continuità, postulando che se un arco di cerchio ha un estremo interno ed uno esterno ad un secondo cerchio, l'arco taglia la seconda circonferenza in un punto. Similmente facciamo per le intersezioni tra cerchio e retta, come è stato esposto nella nota alla I, 12.

Euclide, come già appunto nella I, 12, non enuncia esplicitamente il postulato, ma si pone proprio nelle condizioni occorrenti affinché il postulato stesso, da lui evidentemente intuìto, sia applicabile. Ecco dunque che egli già nell'enunciato di questa I, 22 espone quale sia la condizione di risolubilità, dando in sostanza il cosiddetto *diorisma* (cioè la distinzione tra i casi di possibilità e quelli di impossibilità nella risoluzione di un problema). Ma per maggiori notizie sul *diorisma* rinviamo alla nota alla VI, 27.

La proposizione I, 22 della quale ci stiamo occupando rappresenta la premessa essenziale per il problema seguente (I, 23) che richiede di effettuare la costruzione di un angolo uguale ad un angolo dato. Si tratta di un problema (quello della costruzione dell'angolo) assai più importante: la sua risoluzione, però, è fondata sulla costruzione del triangolo, della quale è una semplicissima conseguenza. Questo fatto permette di attribuire a Enopide di Chio la costruzione del triangolo della I, 22 (così come la costruzione della perpendicolare da un punto esterno ad una retta, esposta nella I, 12). Ma sull'attribuzione in questione si veda la nota alla proposizione seguente I, 23.

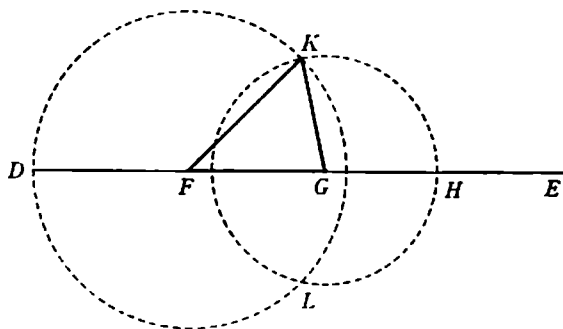
Va infine notato che in questa proposizione I, 22 viene considerata una semiretta, cioè una *retta* delimitata da una parte, illimitata dall'altra. E, come s'è veduto, nella I, 12 si considera una retta illimitata dalle due parti. Le costruzioni effettuate in queste due proposizioni (I, 22 e I, 12) richiedono effettivamente tale infinità (parziale o totale): ma in ogni altro caso Euclide considera sempre rette terminate dalle due parti (segmenti), postulandone tuttavia la prolungabilità.

con centro G e raggio GH si descriva il cerchio KLH (id.), e si traccino le congiungenti KF, KG; dico che con tre rette uguali ad A, B, C è stato costruito il triangolo KFG.

Infatti, poiché il punto F è centro del cerchio DKL, si ha che FD è uguale a FK; ma FD è uguale ad A, per cui pure KF è uguale ad A (noz. com. I). Di nuovo, poiché il punto G è centro del cerchio LKH, si ha che GH è uguale a GK; ma GH è uguale a C: anche KG è quindi uguale a C. Ed è uguale a B la retta FG; perciò le tre rette KF, FG, GK sono uguali alle tre A, B, C.

Dunque, con le tre rette KF, FG, GK che sono uguali alle tre rette date A, B, C, è stato costruito il triangolo KFG. - C.D.F.

APPLICA: I, 3.

È APPLICATA IN: I, 23.

PROPOSIZIONE 23.

Costruire su una retta data, e [con vertice] in un [dato] punto di essa, un angolo rettilineo uguale ad un angolo rettilineo dato[20].

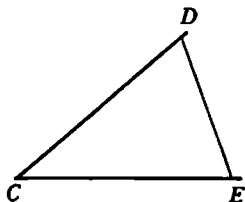
Siano AB la retta data, A il punto [dato] su essa, e DCE l'angolo rettilineo dato; si deve dunque costruire sulla retta

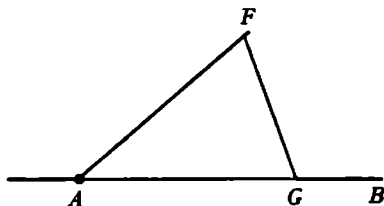
[20] Questo problema è di grande importanza nell'economia generale degli *Elementi*, come il lettore potrà vedere anche dal numero delle propo-

data AB, e [con vertice] nel suo punto A, un angolo rettilineo uguale all'angolo rettilineo dato DCE.

Si prendano a piacere su ciascuna delle due rette CD, CE i punti [rispettivi] D, E, si tracci la congiungente DE, e con tre rette, uguali alle tre rette CD, DE, CE, si costruisca il triangolo AFG, in modo che CD sia uguale ad AF, sia CE uguale ad AG, ed infine DE sia uguale a FG (I, 22).

Quindi, poiché i due lati DC, CE sono uguali rispettivamente ai due lati FA, AG, e la base DE è uguale alla base FG, l'angolo DCE è uguale all'angolo FAG (I, 8).

Dunque, sulla retta data AB, e con vertice nel punto A di essa, è stato costruito l'angolo rettilineo FAG uguale all'angolo rettilineo dato DCE. – C.D.F.

APPLICA: I, 8, 22.

È APPLICATA IN: I, 24, 31, 42; III, 7, 8, 25, 27, 33, 34; IV, 2, 3; VI, 5, 6, 7, 18; XI, 26, 31.

sizioni seguenti nelle quali esso trova applicazione. Una testimonianza di Proclo (Ed. Friedlein, p. 333, 1, Ver Eecke, p. 284) ci fa sapere che, secondo Eudemo, la sua invenzione (εὕρημα) è dovuta a Enopide di Chio, matematico e astronomo del V secolo avanti Cristo. Tale attribuzione che, per l'esplicita citazione di Eudemo, acquista una particolare attendibilità, va accoppiata all'altra già veduta per la costruzione della perpendicolare ad una retta per un punto ad essa esterno, esposta nella I, 12 (si veda la nota a detta proposizione). Si tratta di due costruzioni (della perpendicolare e dell'angolo) molto elementari, e sembra strano che il merito della loro «invenzione» venga dato ad un matematico del V secolo, pressoché contemporaneo di Anassagora, di Ippocrate di Chio (suo conterraneo), di Archita di Taranto.

Si osserva, tuttavia, che la costruzione dell'angolo consiste essenzialmente nella costruzione del triangolo, sicché le due proposizioni da attribuire effettivamente ad Enopide sono la I, 12 e la I, 22. E queste due proposizioni hanno un elemento comune: si tratta nella prima di determi-

PROPOSIZIONE 24.

Se due triangoli hanno due lati uguali rispettivamente a due lati, ma hanno l'angolo compreso dai lati uguali[a] *maggiore dell'angolo corrispondente, avranno anche la base maggiore della base.*

Siano *ABC*, *DEF* due triangoli aventi i due lati *AB*, *AC* uguali rispettivamente ai due lati *DE*, *DF*, cioè *AB* uguale a *DE* ed *AC* uguale a *DF*, e l'angolo con vertice in *A* sia maggiore dell'angolo con vertice in *D*; dico che anche la base *BC* è maggiore della base *EF*.

Infatti, poiché l'angolo *BAC* è maggiore dell'angolo *EDF*, si costruisca sulla retta *DE*, e col vertice nel punto *D* di essa, l'angolo *EDG* uguale all'angolo *BAC* (I, 23), si ponga *DG* uguale all'una o all'altra [indifferentemente] delle rette *AC*, *DF* (I, 3, o post. III), e si traccino le congiungenti *EG*, *FG*.

Poiché dunque *AB* è uguale a *DE*, ed *AC* a *DG*, i due lati *BA*, *AC* sono uguali rispettivamente ai due lati *ED*, *DG*; e l'angolo *BAC* è uguale all'angolo *EDG*, per cui la base *BC* è uguale alla base *EG* (I, 4). Di nuovo, poiché *DF* è uguale a *DG*, anche l'angolo *DGF* è uguale all'angolo *DFG* (I, 5); quindi l'angolo *DFG* è maggiore dell'angolo *EGF* (noz. com. VIII); l'angolo *EFG* è perciò molto maggiore di quello *EGF* (id.). E poiché *EFG* è un triangolo che ha l'angolo *EFG* maggiore dell'angolo *EGF*, e ad angolo

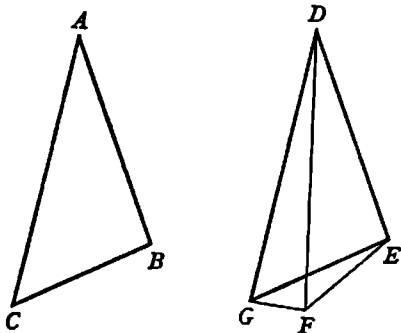
a. Letteralmente: « dalle rette uguali », secondo l'alternanza già prima vista.

nare le condizioni perché siano secanti un cerchio ed una retta, mentre nella seconda si tratta delle condizioni perché due cerchi siano secanti. Da questo punto di vista, che lo sviluppo di questo interessante capitolo della geometria (retta secante un cerchio, cerchi secanti tra loro) venga attribuito ad un matematico del v secolo è perfettamente spiegabile: ed un merito non piccolo risale all'autore delle relative teorie. Per maggiori notizie cfr. A. FRAJESE, *Il cerchio nella geometria di Enopide di Chio*, in « Archimede », n. 6, dicembre 1967, pp. 285-294.

maggiore è opposto lato maggiore (I, 19), anche il lato *EG* è maggiore del lato *EF*. Ma *EG* è uguale a *BC*; quindi anche *BC* è maggiore di *EF*.

Dunque, se due triangoli hanno due lati... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 3, 4, 5, 19, 23.

È APPLICATA IN: I, 25; III, 7, 8, 15; XI, 22.

PROPOSIZIONE 25.

Se due triangoli hanno due lati uguali rispettivamente a due lati, ma hanno la base maggiore della base, avranno anche l'angolo compreso dai lati uguali maggiore dell'angolo corrispondente [21].

Siano *ABC*, *DEF* due triangoli aventi i due lati *AB*, *AC* uguali rispettivamente ai due lati *DE*, *DF*, cioè *AB* uguale

[21] Questa proposizione è l'inversa della precedente I, 24. In ambedue le proposizioni, così come in altre precedenti, Euclide si riporta alla nomenclatura da lui usata per i due criteri di uguaglianza dei triangoli già considerati (I, 4 e I, 8). Così, dovendo considerare il caso di due triangoli aventi i tre lati rispettivamente uguali, vengono considerati dapprima due lati di un triangolo che sono uguali a due lati dell'altro: il terzo lato, poi, nell'uno e nell'altro triangolo, viene chiamato *base* (βάσις).

Perché questa *dissimmetria* nel considerare i tre lati di un triangolo, che, d'altra parte, risultano *simmetricamente* uguali a due a due? Una risposta può esser data se si osserva che, con enunciati di tal genere, le quattro proposizioni I, 4; I, 8; I, 24; I, 25 vengono a formare un *quadrilatero* di proposizioni (cfr. nota alla I, 17), sia pure con qualche adattamento. Una volta ammessa l'ipotesi (comune alle quattro proposizioni) che due lati a, b di un primo triangolo sono rispettivamente uguali a due lati a', b' di un secondo triangolo, la I, 4 aggiunge l'ipotesi supplementare dell'uguaglianza degli angoli compresi $\gamma = \gamma'$, e ne deduce l'uguaglianza dei terzi lati, o *basi* ($c = c'$). La I, 8, invece, parte dall'ipotesi dell'uguaglianza dei terzi lati o *basi* $c = c'$ e ne deduce l'uguaglianza degli angoli compresi tra i primi due lati ($\gamma = \gamma'$): si presenta, cioè, come l'inversa

a DE ed AC uguale a DF, ma la base BC sia maggiore della base EF; dico che anche l'angolo BAC è maggiore dell'angolo EDF.

Infatti, se non lo fosse, sarebbe o uguale ad esso o minore; ora, l'angolo BAC non è uguale all'angolo EDF: in tal caso difatti anche la base BC sarebbe uguale alla base EF (I, 4), ma non lo è. Perciò l'angolo BAC non è uguale all'angolo

della I, 4. E la I, 24, se si prescinde dal senso della disuguaglianza, è la *contraria* della I, 4: cioè dalla disuguaglianza degli angoli compresi deduce la disuguaglianza delle basi. Finalmente, sempre prescindendo dal senso della disuguaglianza, la I, 25 è l'inversa della contraria (ovvero, ciò che fa lo stesso, la contraria dell'inversa), cioè la cosiddetta *contronominale* della I, 4: se le basi sono disuguali, dice infatti la I, 25, gli angoli compresi sono disuguali. Tutto ciò risulta più evidente attraverso il seguente quadro sinottico:

Ipotesi comune: $a = a'$; $b = b'$

	Ipotesi supplementare	Tesi
I, 4	$\gamma = \gamma'$	$c = c'$
I, 8	$c = c'$	$\gamma = \gamma'$
I, 24	$\gamma \neq \gamma'$	$c \neq c'$
I, 25	$c \neq c'$	$\gamma \neq \gamma'$

È, questo, il secondo *quadrilatero* di proposizioni che troviamo negli *Elementi* (il primo è costituito dal postulato V, dalla I, 17, dalla I, 27-28 e dalla I, 29).

Ma anche un altro *quadrilatero* è dato di scorgere tra le proposizioni del libro primo finora vedute: quello costituito (pure con qualche adattamento) dalle I, 5; I, 6; I, 18; I, 19.

Più precisamente, la I, 5, che assumiamo come proposizione iniziale, parte dall'uguaglianza di due lati di un triangolo e ne deduce l'uguaglianza di due angoli: la I, 6 ne è l'inversa: inoltre, prescindendo dal senso della disuguaglianza, la I, 18 ne è la contraria, e la I, 19 ne è la contronominale. Abbiamo così:

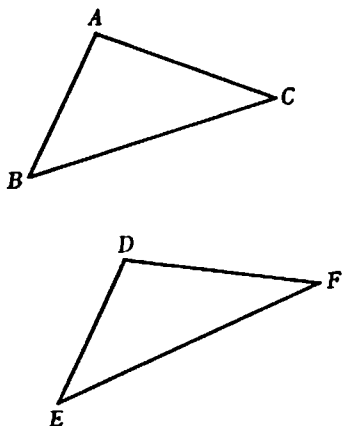
	I quadrilatero	II quadrilatero	III quadrilatero
diretta $I \rightarrow T$	post. V	I, 4	I, 5
inversa $T \rightarrow I$	I, 17	I, 8	I, 6
contraria $-I \rightarrow -T$	I, 27-28	I, 24	I, 18
contronominale $-T \rightarrow -I$	I, 29	I, 25	I, 19

Si vede così che se si prescinde dai problemi e da un lemma, la maggioranza delle prime 29 proposizioni del libro primo è ordinata in *quadrilateri*. Ed altri quadrilateri troveremo nel séguito: Euclide ama porre in evidenza tale relazione tra quattro proposizioni, ed ama enunciare tutte e quattro le proposizioni anche quando per taluna di esse ciò non è strettamente necessario: ad esempio per la I, 17.

EDF; e neppure, tuttavia, l'angolo *BAC* è minore dell'angolo *EDF*: difatti in tal caso anche la base *BC* sarebbe minore della base *EF* (I, 24), ma non lo è; quindi l'angolo *BAC* non è minore dell'angolo *EDF*. Ma fu dimostrato che non è nemmeno uguale, per cui l'angolo *BAC* è maggiore dell'angolo *EDF*.

Dunque, se due triangoli hanno due lati... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 4, 24.

È APPLICATA IN: XI, 20, 23.

PROPOSIZIONE 26.

Se due triangoli hanno due angoli uguali rispettivamente a due angoli ed un lato uguale ad un lato, o quello [adiacente] agli angoli uguali o quello che è opposto ad uno degli angoli uguali, essi avranno anche i lati rimanenti uguali rispettivamente ai lati rimanenti, e l'angolo rimanente uguale all'angolo rimanente[22].

Siano *ABC*, *DEF* due triangoli aventi i due angoli *ABC*, *BCA* uguali rispettivamente ai due angoli *DEF*, *EFD*, cioè

[22] Questa proposizione è comunemente detta oggi «secondo criterio di uguaglianza dei triangoli»: negli *Elementi*, invece, questo «criterio» occupa il terzo posto (dopo la I, 4 e la I, 8).

Come si vede, Euclide tratta di séguito i due casi: quello del lato adiacente ai due angoli uguali e quello del lato opposto ad uno di detti angoli. Il secondo caso viene trattato applicando il teorema I, 16 dell'angolo esterno maggiore, sicché anch'esso è indipendente dal postulato quinto. Qualche testo di geometria non introduce il teorema dell'angolo esterno maggiore in modo autonomo, ma lo deduce da quello dell'angolo esterno somma (I, 32). In questo modo il secondo caso del criterio di uguaglianza che stiamo considerando si deduce dal primo caso in base al teorema sulla somma dei tre angoli di un triangolo. Infatti, applicando detto teorema, si vede che se due triangoli hanno due angoli rispettivamente uguali a due angoli, essi hanno anche uguali i *terzi angoli*, dato che la somma dei tre angoli è costantemente uguale a due retti. Sicché è la introduzione

ABC uguale a *DEF* e *BCA* uguale ad *EFD*, ed abbiano anche un lato uguale ad un lato: dapprima, quello adiacente agli angoli uguali, cioè *BC* uguale ad *EF*; dico che essi avranno anche i lati rimanenti uguali ai lati rimanenti, cioè *AB* uguale a *DE* ed *AC* uguale a *DF*, e l'angolo rimanente uguale all'angolo rimanente, cioè *BAC* uguale ad *EDF*.

Infatti, se *AB* fosse disuguale rispetto a *DE*, uno dei lati stessi sarebbe maggiore. Sia maggiore *AB*, si ponga *BG* uguale a *DE* (I, 3), e si tracci la congiungente *GC*.

Poiché dunque *BG* è uguale a *DE*, e *BC* ad *EF*, i due lati *BG*, *BC* sono uguali rispettivamente ai due lati *DE*, *EF*; e l'angolo *GBC* è uguale all'angolo *DEF*, per cui la base *GC* è in tal caso uguale alla base *DF*, il triangolo *GBC* è uguale al triangolo *DEF*, e gli angoli rimanenti del primo, opposti ai lati uguali, saranno uguali ai rispettivi angoli rimanenti del secondo (I, 4); l'angolo *GCB* è quindi uguale all'angolo *DFE*. Ma l'angolo *DFE* è per ipotesi uguale all'angolo *BCA*; anche l'angolo *BCG* sarebbe perciò uguale all'angolo *BCA* (noz. com. I), il minore al maggiore: il che è impossibile (noz. com. VIII). Quindi *AB* non è disuguale rispetto a *DE*, e perciò è uguale [a]. Ma anche *BC*, *EF* sono uguali fra loro: i due lati *AB*, *BC* sono così uguali rispettivamente ai due lati *DE*, *EF*; l'angolo *ABC* è inoltre uguale all'angolo *DEF*; dunque la base *AC* è uguale alla base *DF*, e l'angolo rimanente *BAC* è uguale all'angolo rimanente *EDF* (I, 4).

Ma, di nuovo, sia adesso il caso in cui sono uguali i lati opposti agli angoli uguali, cioè sia *AB* uguale a *DE* [b]; dico

a. Nel testo abbiamo: «... non è disuguale rispetto a *DE*. Quindi è uguale». Traduciamo con *e perciò*, *e dunque*, od espressioni vicine, in questo e nei casi più o meno simili.

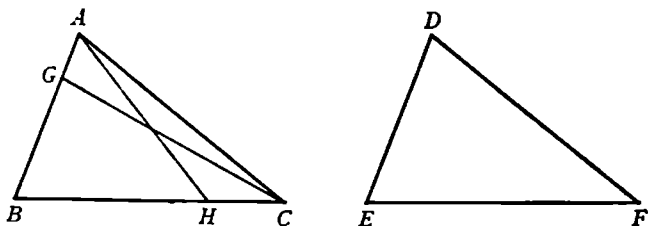
b. Letteralmente: come [nel caso di] *AB* rispetto a *DE*.

delle I, 16 (teorema dell'angolo esterno maggiore) che permette di mostrare che anche il secondo caso del nostro secondo criterio di uguaglianza dei triangoli è indipendente dal quinto postulato.

Si osservi infine che nell'enunciato della I, 26 (come in quello della I, 8) la *tesi* è ridotta al minimo: non è in essa compresa, ad esempio, l'uguaglianza dei due triangoli (equivalenza) che segue soltanto dalla I, 4 (primo criterio) la quale esplicitamente la menziona.

nuovamente che pure i lati rimanenti [del primo triangolo] saranno uguali ai lati rimanenti [del secondo], cioè *AC* uguale a *DF* e *BC* uguale ad *EF*, e che infine l'angolo rimanente *BAC* del primo è uguale all'angolo rimanente *EDF* del secondo.

Infatti, se *BC* fosse disuguale rispetto ad *EF*, uno dei lati stessi sarebbe maggiore. Sia maggiore *BC*, se possibile, si ponga *BH* uguale ad *EF* (I, 3), e si tracci la congiungente *AH*. Ora, poiché *BH* è uguale ad *EF* ed *AB* a *DE*, i due lati *AB*, *BH* sono uguali rispettivamente ai due lati *DE*, *EF*; e gli uni e gli altri comprendono angoli uguali, per cui la base *AH* è uguale in tal caso alla base *DF*, il triangolo *ABH* è uguale al triangolo *DEF*, e gli angoli rimanenti del primo, opposti ai lati uguali, saranno uguali ai rispettivi angoli rimanenti del secondo (I, 4); quindi l'angolo *BHA* è uguale all'angolo *EFD*. Ma l'angolo *EFD* è uguale all'angolo *BCA*; perciò nel triangolo *AHC* l'angolo esterno *BHA* sarebbe uguale a quello interno ed opposto *BCA* (noz. com. I): il che è impossibile (I, 16). Quindi *BC* non è disuguale rispetto ad *EF*, e dunque è uguale. Ma anche *AB*, *DE* sono uguali fra loro. I due lati *AB*, *BC* sono così uguali rispettivamente ai due lati *DE*, *EF*; e gli uni e gli altri comprendono angoli uguali, per cui la base *AC* è uguale alla base *DF*, il triangolo *ABC* è uguale al triangolo *DEF*, e l'angolo rimanente *BAC* del primo è uguale all'angolo rimanente *EDF* del secondo (I, 4).

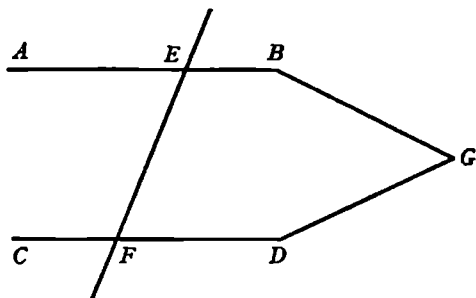
Dunque, se due triangoli hanno due angoli... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 3, 4, 16.

È APPLICATA IN: I, 34; III, 3; IV, 4, 12, 13; XI, 4, 35, 38; XII, 7; XIII, 10.

PROPOSIZIONE 27.

Se una retta che venga a cadere su altre due rette forma gli angoli alterni uguali fra loro, le due rette saranno fra loro parallele[23].

Infatti, la retta *EF*, cadendo sulle due rette *AB*, *CD*, formi gli angoli alterni *AEF*, *EFD* uguali fra loro; dico che *AB* è parallela a *CD*.

Se difatti non lo fosse, le rette *AB*, *CD*, prolungate, si incontrerebbero dalla parte di *B*, *D*, o da quella di *A*, *C*. Si prolunghino e vengano ad incontrarsi dalla parte di *B*, *D* nel punto *G*. Dunque, nel triangolo *GEF* l'angolo esterno *AEF* è in tal caso uguale all'angolo interno ed opposto *EFG*: il che è impossibile (I, 16); quindi *AB*, *CD*, prolungate, non potranno incontrarsi dalla parte di *B*, *D*. Similmente si potrà dimostrare che non verranno ad incontrarsi neppure dalla parte di *A*, *C*; ma rette che non si incontrano da nessuna delle due parti sono parallele (def. XXIII), per cui *AB* è parallela a *CD*.

Dunque, se una retta che venga a cadere... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 16.

È APPLICATA IN: I, 28, 30, 31, 33.

[23] Questa proposizione, insieme alla seguente I, 28, che si riferisce (anziché agli angoli alterni) agli angoli corrispondenti ed agli angoli coniugati interni, costituisce il cosiddetto *teorema diretto sulle parallele*, il quale, da determinate relazioni tra certe coppie di angoli formati da due rette quando son tagliate da una trasversale, deduce il parallelismo delle due rette stesse. Se ci si riferisce agli angoli corrispondenti, allora la I, 27-28 viene a costituire la contronominale della I, 16, cioè del teorema dell'angolo esterno maggiore. Infatti in quest'ultima proposizione l'ipotesi è che due rette s'incontrino, cioè che non siano parallele, e la tesi è che (a prescindere dal senso della disuguaglianza) gli angoli corrispondenti sono disuguali.

Quindi la I, 27-28 assume come ipotesi la negazione della tesi della I, 16 ed assume come tesi la negazione dell'ipotesi di quella. Le due proposizioni sono quindi contronominali, e pertanto logicamente equivalenti.

PROPOSIZIONE 28.

Se una retta che cada su due rette forma l'angolo esterno uguale all'angolo interno ed opposto e che è dalla stessa parte, oppure angoli interni, dalla stessa parte, la cui somma sia uguale a due retti, le rette saranno parallele fra loro.

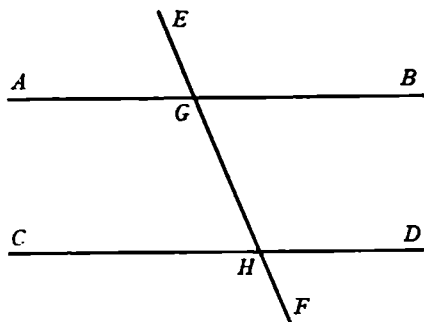
Infatti, la retta *EF* venendo a cadere sulle due rette *AB*, *CD* formi l'angolo esterno *EGB* uguale all'angolo interno ed opposto *GHD*, oppure gli angoli interni *BGH*, *GHD*, dalla stessa parte, la cui somma sia uguale a due retti; dico che *AB* è parallela a *CD*.

Poiché l'angolo *EGB* è difatti uguale all'angolo *GHD*, ma l'angolo *EGB* è uguale a quello *AGH* (I, 15), pure gli angoli *AGH*, *GHD* sono uguali (noz. com. I); ed essi sono angoli alterni: quindi *AB* è parallela a *CD* (I, 27).

Di nuovo, supponiamo che la somma degli angoli *BGH*, *GHD* sia uguale a due retti: poiché[a] anche la somma degli angoli *AGH*, *BGH* è uguale a due retti (I, 13), la somma di *AGH*, *BGH* è uguale a quella di *BGH*, *GHD* (noz. com. I); si sottragga da ambedue le somme l'angolo *BGH*; l'angolo *AGH* che rimane della prima è perciò uguale all'altro angolo rimanente *GHD* (noz. com. III); ed essi sono angoli alterni: quindi *AB* è parallela a *CD* (I, 27).

Dunque, se una retta che cada su due rette... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 13, 15, 27.

È APPLICATA IN: IV, 7; VI, 4; XI, 6, 18.

a. Letteralmente: di nuovo, poiché gli angoli *BGH*, *GHD* sono uguali a due retti, ma anche gli angoli...

PROPOSIZIONE 29.

Una retta che cada su rette parallele forma gli angoli alterni uguali fra loro, l'angolo esterno uguale all'angolo interno ed opposto, ed angoli interni dalla stessa parte la cui somma è uguale a due retti[24].

Infatti, la retta *EF* venga a cadere sulle rette parallele *AB*, *CD*; dico che essa forma gli angoli alterni *AGH*, *GHD* uguali, l'angolo esterno *EGB* uguale all'angolo interno ed opposto *GHD*, e gli angoli interni *BGH*, *GHD*, dalla stessa parte, la cui somma è uguale a due retti.

Se l'angolo *AGH* fosse difatti disuguale rispetto all'angolo *GHD*, uno di essi sarebbe maggiore. Sia maggiore l'angolo *AGH*; si aggiunga in comune l'angolo *BGH*; la somma degli angoli *AGH*, *BGH* è quindi maggiore della somma degli angoli *BGH*, *GHD* (noz. com. IV). Ma la somma di *AGH*, *BGH* è uguale a due retti (I, 13). La somma di *BGH*, *GHD* è perciò minore di due retti. Ma rette che vengano prolungate illimitatamente a partire da angoli la cui somma sia minore di due retti, si incontrano (post. V); quindi *AB*, *CD*, prolungate illimitatamente, si incontreranno; ma non si incontrano invece, poiché per ipotesi sono parallele; l'angolo *AGH* non è perciò disuguale rispetto all'angolo *GHD*, e dunque è uguale. Ma l'angolo *AGH* è uguale all'angolo *EGB* (I, 15); quindi sono uguali pure gli angoli *EGB*, *GHD* (noz. com. I). Si aggiunga in

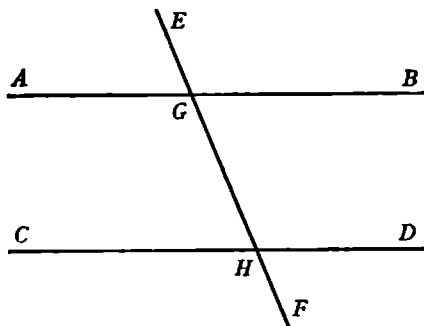
[24] È, questo, il cosiddetto *teorema inverso* delle parallele (inverso della prop. 27-28. Qui dall'ipotesi del parallelismo si deducono le note relazioni angolari. In verità il teorema non viene *dimostrato*, ma viene introdotto come postulato. Si tratta per l'appunto del famoso postulato quinto, contronominale di questa prop. 29. Sicché la *dimostrazione* della prop. 29 si riduce a questo: se le rette sono parallele gli angoli coniugati interni sono supplementari: infatti, se non lo fossero, da una delle due parti la somma di detti angoli sarebbe minore di due retti, e quindi, per il quinto postulato, le due rette s'incontrerebbero, contro l'ipotesi del loro parallelismo.

È con questa prop. 29 che ha inizio la geometria euclidea vera e propria, cioè la geometria che si fonda sul quinto postulato, o postulato di Euclide propriamente detto.

comune [ad essi] l'angolo *BGH*; la somma di *EGB*, *BGH* risulta allora uguale alla somma di *BGH*, *GHD*. E poiché la somma degli angoli *EGB*, *BGH* è uguale a due retti (I, 13), anche la somma degli angoli *BGH*, *GHD* è uguale a due retti (noz. com. I).

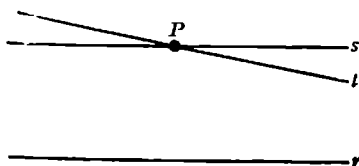
Dunque, una retta che cada su rette parallele... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

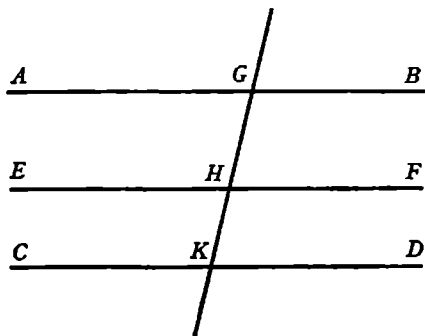
APPLICA: I, 13, 15 e il post. V.

È APPLICATA IN: I, 30, 32, 33, 34, 35, 44, 45, 46; II, 4, 9, 10; VI, 3, 24, 25, 32; XI, 8, 15, 38; XII, 3, 4.

PROPOSIZIONE 30.

Rette parallele ad una stessa retta sono parallele anche fra loro [25].

Ciascuna delle due rette *AB*, *CD* sia parallela ad *EF*; dico che anche *AB*, *CD* sono parallele.

[25] La proprietà transitiva del parallelismo, di cui tratta questa proposizione 30, viene dimostrata per mezzo della proposizione immediatamente precedente I, 29, ossia per mezzo del postulato quinto. Anzi la suddetta proprietà transitiva può ritenersi equivalente a detto postulato. Da essa si ricava l'unicità della parallela ad una retta *r* condotta per un punto *P* esterno ad essa. Infatti se per il punto *P* passassero due rette *s*, *t* ambedue parallele ad *r*, tali due rette, essendo parallele alla stessa, sarebbero (appunto per la I, 30) parallele tra loro: ciò che è assurdo, dato che le due rette si incontrano nel punto *P*. Del resto, l'unicità della parallela alla retta *r* per un punto *P* ad essa esterno segue anche dalla considerazione che una seconda parallela *t* si andrebbe avvicinando sempre di più ad *r*, ma senza raggiungerla, comunque prolungata: le rette *t*, *r* sarebbero cioè *asintòtiche*. E l'enunciato euclideo del postulato quinto equivale appunto alla negazione della possibilità di esistenza di rette asintotiche.

Infatti, venga a cadere su esse la retta *GK*.

Ora, poiché la retta *GK* cade sulle rette parallele *AB*, *EF*, l'angolo *AGK* è uguale all'angolo *GHF* (I, 29). Di nuovo, poiché la retta *GK* cade sulle rette parallele *EF*, *CD*, l'angolo *GHF* è uguale all'angolo *GKD* (id.). Ma fu dimostrato che pure l'angolo *AGK* è uguale all'angolo *GHF*; sono quindi uguali anche gli angoli *AGK*, *GKD* (noz. com. I), e sono angoli alterni. Perciò *AB* è parallela a *CD* (I, 27).

Dunque, rette parallele ad una stessa retta... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 27, 29, implicitamente il post. V.

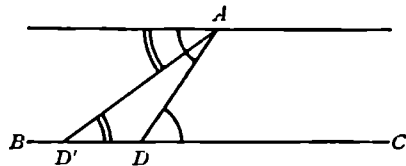
È APPLICATA IN: I, 45, 47; II, 4, 5, 6, 7, 8; IV, 7, 8; VI, 26; XII, 17.

PROPOSIZIONE 31.

Condurre per un punto dato una linea retta parallela ad una retta data[26].

Siano *A* il punto dato, e *BC* la retta data; si deve dunque condurre per il punto *A* una linea retta parallela alla retta *BC*.

Si prenda su *BC* un punto a piacere *D*, si tracci la congiungente *AD*, sulla retta *DA* e con vertice nel suo punto *A*

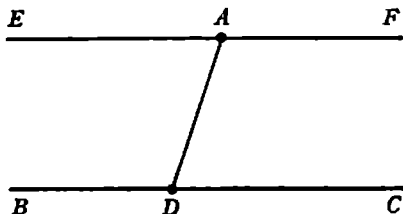
[26] Questa costruzione contiene un elemento arbitrario: la scelta del punto *D*. Ma la costruzione stessa è univoca, cioè indipendente dalla

scelta di *D*, per il fatto che, in base alla precedente proposizione I, 30, si è già stabilita l'unicità della parallela alla *BC* per il punto *A*.

si costruisca l'angolo DAE uguale all'angolo ADC (I, 23), e si prolunghi EA mediante la retta AF[a].

E poiché la retta AD, cadendo sulle due rette BC, EF, è venuta a formare gli angoli alterni EAD, ADC uguali fra loro, EAF è parallela a BC (I, 27).

Dunque, per il punto dato A è stata condotta la linea retta EAF parallela alla retta data BC. – C.D.F.

APPLICA: I, 23, 27: l'unicità risulta dalla I, 30.

È APPLICATA IN: I, 32, 37, 38, 39, 40, 42, 44, 46, 47; II, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10; IV, 8; VI, 3, 9, 10, 11, 12, 26; X, 60, 91, 97; XI, 11, 12.

PROPOSIZIONE 32.

In ogni triangolo, se si prolunga uno dei lati, l'angolo esterno è uguale alla somma dei due angoli interni ed opposti, e la somma dei tre angoli interni del triangolo è uguale a due retti[27].

Sia ABC un triangolo, ed un suo lato BC sia prolungato oltre C sino a D; dico che l'angolo esterno ACD è uguale

a. Letteralmente, al solito: « e si prolunghi la retta AF per diritto a quella EA ».

[27] L'Enriques (*op. cit.*, vol. I, p. 108) scrive, commentando questa proposizione: « Si osservi che essa esprime uno dei due teoremi veramente significativi del libro primo (l'altro è la prop. 47, cioè il teorema di Pitagora), ed anzi i due teoremi di cui si parla sembrano costituire i due fuochi rispetto a cui viene ordinata la trattazione euclidea ».

È stato già osservato che il doppio risultato di questa proposizione (cioè il teorema dell'angolo esterno somma dei due angoli interni non adiacenti, e l'immediata conseguenza che la somma dei tre angoli di un triangolo è uguale a due retti) contiene come casi particolari la I, 16 (teorema dell'angolo esterno maggiore) e la I, 17 (somma di *due* angoli di un triangolo minore di due retti). Ma mentre la I, 16 e la I, 17 non richiedono l'uso del quinto postulato, la I, 32 richiede invece detto uso.

È notevole il fatto che si sia cercato di raggiungere il risultato della I, 32 (o almeno di avvicinarsi ad esso quanto possibile) senza far ricorso

alla somma dei due angoli interni ed opposti CAB, ABC, e che la somma dei tre angoli interni del triangolo, ABC, BCA, CAB, è uguale a due retti.

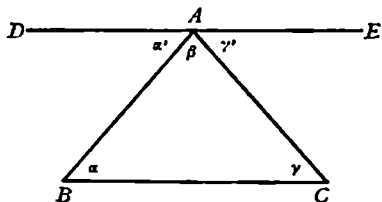
Infatti, per il punto C si conduca la parallela CE alla retta AB (I, 31).

E poiché AB è parallela a CE, e su esse cade AC, gli angoli alterni BAC, ACE sono uguali fra loro (I, 29). Di nuovo, poiché AB è parallela a CE, e su esse cade la retta BD, l'angolo esterno ECD è uguale all'angolo interno ed opposto ABC (I, 29). Ma fu dimostrato che pure gli angoli ACE, BAC sono uguali; quindi tutto quanto l'angolo ACD

al quinto postulato, sicché può dirsi che la I, 16 e la I, 17 costituiscano in certo senso il *trampolino di lancio* della geometria non euclidea. Così A. M. Legendre (1752-1833), reiterando indefinitamente il procedimento costruttivo della I, 16, ed applicando poi la proposizione prima del libro decimo degli *Elementi* (la quale ultima è sostanzialmente equivalente al cosiddetto postulato di Archimede: libro V, def. IV), e usando infine la I, 17, riesce a dimostrare che in ogni triangolo la somma di tutt'e tre gli angoli non può superare i due retti. Ciò, come si vede, nell'atmosfera stessa degli *Elementi* di Euclide, *respirata* qui da Legendre a pieni polmoni, e prescindendo, naturalmente, dal postulato quinto.

Sempre nello stesso ordine di idee, Legendre riesce pure a dimostrare che se esistesse *un solo* triangolo nel quale la somma dei tre angoli fosse uguale a due retti, lo stesso fatto si verificherebbe per *qualunque* triangolo.

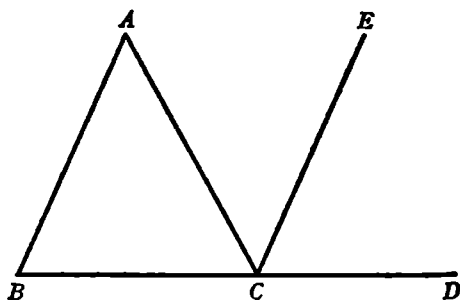
Prima di Legendre, Gerolamo Saccheri, nella sua opera *Euclides ab omni naevo vindicatus* (1733), tenta di dimostrare il quinto postulato, cercando contraddizioni logiche in una geometria fondata sulle prime ventotto proposizioni di Euclide e sulla negazione del quinto postulato. Che egli abbia erroneamente creduto di aver trovato tali contraddizioni e quindi di aver dimostrato detto postulato è cosa di poco conto: l'essenziale è la sua idea-base, che è poi quella stessa che condurrà più tardi alle geometrie non euclidee.

Va infine avvertito, a proposito sempre della I, 32, che Proclo, nel suo *Commento* già più volte citato, informa che secondo Eudemo l'*invenzione* del teorema risale ai Pitagorici, e che questi l'avrebbero dimostrato conducendo per il vertice A del triangolo la parallela DE al lato BC, e osservando poi che la somma $\alpha' + \beta + \gamma'$ è uguale a due retti, ed è anche uguale alla somma dei tre angoli del triangolo ABC, data l'uguaglianza degli angoli alterni interni α, α' e $\gamma\gamma'$.

è uguale alla somma dei due angoli interni ed opposti *BAC*, *ABC* (noz. com. II).

Si aggiunga in comune l'angolo *ACB* [all'angolo *ACD* e alla somma degli altri due]; la somma degli angoli *ACD*, *ACB* è perciò uguale alla somma dei tre angoli *ABC*, *BCA*, *CAB* (noz. com. II). Ma la somma degli angoli *ACD*, *ACB* è uguale a due retti (I, 13); quindi anche la somma degli angoli *ACB*, *CBA*, *CAB* è uguale a due retti (noz. com. I).

Dunque, in ogni triangolo... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 13, 29, 31.

È APPLICATA IN: II, 9, 10; III, 20, 22, 31, 32; IV, 2, 3, 10, 15; VI, 5, 6, 7, 8, 18, 20, 24, 32; XI, 21; XIII, 8, 9, 10, 11, 18 lemma.

PROPOSIZIONE 33.

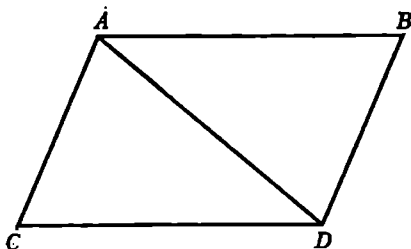
Rette che congiungano dalla stessa parte rette uguali e parallele[a] *sono anch'esse uguali e parallele*[28].

Siano *AB*, *CD* rette uguali e parallele, e le rette *AC*, *BD* le congiungano dalla stessa parte; dico che anche *AC*, *BD* sono uguali e parallele.

a. Vale a dire, rette che congiungano gli estremi di rette uguali e parallele che siano dalla stessa parte, o nella stessa direzione. Ad esempio, subito dopo, *AC*, *BD* fanno da congiungenti in quanto siano rispettivamente congiunti *A*, *C* e *B*, *D*, non invece *B*, *C* ed *A*, *D* che non sono dalla stessa parte o nella stessa direzione, in qüanto estremi, i primi, delle rette *BA*, *DC* ed *AB*, *CD*, e non delle rette *AB*, *DC* e *BA*, *CD*.

[28] Euclide non ha dato, tra le definizioni, quella di parallelogrammo. Questa prop. 33 offre, in sostanza, un modo per costruire un parallelogrammo quando ne sia già data una coppia di lati opposti uguali e

Si tracci la congiungente *BC*. Ora, poiché *AB* è parallela a *CD*, e su esse cade *BC*, gli angoli alterni *ABC*, *BCD* sono uguali fra loro (I, 29). E poiché *AB* è uguale a *CD* e *BC* è comune, i due lati *AB*, *BC* sono uguali ai due lati *BC*, *CD*[a]; e l'angolo *ABC* è uguale all'angolo *BCD*; la base *AC* è perciò uguale alla base *BD*, il triangolo *ABC* è uguale al triangolo *BCD*, e gli angoli rimanenti del primo, opposti ai lati uguali, saranno uguali ai rispettivi angoli rimanenti del secondo (I, 4); quindi l'angolo *ACB* è uguale all'angolo *CBD*. Ma poiché la retta *BC*, venendo a cadere sulle due rette *AC*, *BD*, forma gli angoli alterni uguali fra loro, *AC* è parallela a *BD* (I, 27). E fu dimostrato che è pure ad essa uguale.

Dunque, rette che congiungano dalla stessa parte rette uguali e parallele... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 4, 27, 29.

È APPLICATA IN: I, 36, 45; XI, 10, 38; XII, 17; XIII, 16.

a. « ... *BC*, *CD* », e più tardi « (l'angolo) *BCD* »; noi diremmo piuttosto *DC*, *CB* e *DCB*, per porre in ordine corrispondente lettere che denotano punti corrispondenti in figure congruenti; Euclide preferisce in genere l'ordine alfabetico, quando poi magari non si distragga, ed è il motivo per cui, se proprio non ne resti danneggiata la migliore comprensione, conserviamo per adesso

paralleli: al tempo stesso ci dà uno dei criteri per riconoscere se un quadrilatero sia un parallelogrammo.

Nella dimostrazione viene utilizzato il primo criterio di uguaglianza dei triangoli (I, 4), che viene enunciato in modo completo, anche per la parte non strettamente necessaria in relazione al teorema da dimostrare (cioè anche per la parte riguardante l'uguaglianza dei due triangoli). Ma un uso ancora più caratteristico della I, 4 si ha nella proposizione seguente I, 34.

Vengono poi utilizzati i due teoremi sulle rette parallele: sia quello *diretto* (I, 27), sia quello inverso (I, 29) implicante il quinto postulato.

PROPOSIZIONE 34.

I parallelogrammi hanno lati ed angoli opposti uguali fra loro, e sono divisi dalla diagonale in due parti uguali [a] [29].

Sia $ACDB$ un parallelogrammo, e BC sia una sua diagonale; dico che i lati e gli angoli opposti del parallelo-

tale disposizione letterale. Da notare che fino ad ora il greco ha sempre detto, di due lati uguali ad altri due, che essi lo erano rispettivamente (ἑκατέρα, cioè γωνία, angolo, ἑκατέρᾳ, ciascuno dei due a ciascuno dei due); qui dice soltanto due lati uguali a due lati: manterremo anche noi l'assenza del rispettivamente, quando si verifichi e non ne vada della comprensione.

a. Letteralmente: « Negli spazi parallelogrammi (o: Nelle aree parallelogramme) i lati e gli angoli opposti sono uguali fra loro, ed il diametro (cioè la linea diametrale, la retta diametrale) li (o: le) divide per metà (oppure, in due parti uguali) »; infatti, in greco la parola χωρίον (παραλληλόγραμμον χωρίον) è un qualunque « spazio », o « posto », o « area », ma in geometria è usualmente restrinto alle aree rettangolari o parallelogramme, quanto poi a ἡ διάμετρος, il diametro, noi preferiamo diagonale, l'uso greco invece preferisce diametro: Euclide usa « diagonale », διαγώνιος, una sola volta negli *Elementi*, in XI, 28. Cfr. su questo anche nota 29 seguente.

29 Viene in questa proposizione introdotto il termine « parallelogrammo », termine che, come si ricava dal contesto, significa « quadrilatero avente i lati opposti paralleli ». La diagonale, che viene tracciata, viene chiamata διάμετρος (diametro), secondo l'uso che troviamo anche in Platone, il quale, nel celebre passo del *Menone* sul raddoppiamento del quadrato (85 *b*) spiega che i *sapienti* (σοφισταί) chiamano diametro (διάμετρον) la linea retta congiungente due vertici opposti del quadrato.

La dimostrazione di questa proposizione I, 34 si fonda sul teorema inverso delle parallele (I, 29) e quindi sul quinto postulato.

Viene usato il nostro secondo criterio di uguaglianza dei triangoli (I, 26) poiché i due triangoli nei quali la diagonale divide il parallelogrammo hanno un lato e due angoli uguali: il lato è quello comune, cioè la diagonale, mentre gli angoli uguali a due a due sono alterni interni formati da rette parallele. Ma dalla I, 26 Euclide (conformemente all'enunciato della I, 26 stessa) ricava soltanto l'uguaglianza rispettiva dei restanti lati ed angoli. Per dimostrare invece che la diagonale divide il parallelogrammo in due parti (triangoli) uguali, Euclide torna, per dir così, indietro nel processo dimostrativo, e considera di nuovo i due stessi triangoli prima considerati, ma applicando ad essi, questa volta, il primo criterio (I, 4). Questo procedimento, che appare strano a prima vista, conferma l'impres-

grammo *ACDB* sono uguali fra loro, e che la diagonale *BC* lo divide in due parti uguali.

Infatti, poiché *AB* è parallela a *CD*, e su esse cade la retta *BC*, gli angoli alterni *ABC*, *BCD* sono uguali fra loro (I, 29). Di nuovo, poiché *AC* è parallela a *BD*, e *BC* cade su esse, gli angoli alterni *ACB*, *CBD* sono uguali fra loro (id.). Dunque, *ABC*, *BCD* sono due triangoli che hanno i due angoli *ABC*, *BCA* uguali rispettivamente ai due angoli *BCD*, *CBD*, ed un lato uguale a un lato, ossia quello adiacente agli angoli uguali e che è loro comune, cioè *BC*: avranno quindi uguali rispettivamente anche i lati rimanenti ai lati rimanenti e l'angolo rimanente all'angolo rimanente (I, 26), per cui il lato *AB* è uguale al lato *CD*, il lato *AC* è uguale al lato *BD*, ed infine l'angolo *BAC* è uguale all'angolo *CDB*. Ora, poiché l'angolo *ABC* è uguale all'angolo *BCD*, e l'angolo *CBD* all'angolo *ACB*, tutto quanto l'angolo *ABD* è uguale a tutto quanto l'angolo *ACD* (noz. com. II). E fu dimostrato che pure gli angoli *BAC*, *CDB* sono uguali.

Dunque, i parallelogrammi hanno lati ed angoli opposti uguali fra loro.

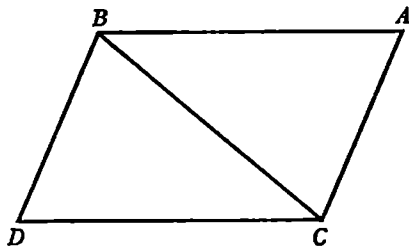
Dico adesso che la diagonale divide il parallelogrammo in due parti uguali. Infatti, poiché *AB* è uguale a *CD*, e *BC* è comune, i due lati *AB*, *BC* sono uguali rispettivamente ai due lati *CD*, *BC*; e l'angolo *ABC* è uguale all'angolo *BCD* (I, 29). Quindi anche la base *AC* è uguale alla base *DB*, ed il triangolo *ABC* è uguale al triangolo *BCD* (I, 4)[a].

a. Letteralmente sarebbe: «... alla base *DB*. Anche il triangolo *ABC* è perciò..., ecc.».

sione che Euclide considerasse il primo criterio di uguaglianza dei triangoli (I, 4) come una specie di postulato, per la giustificazione del quale aveva introdotto, in linea eccezionale, il movimento ingenuamente inteso, in senso extra-geometrico. La *coincidenza* che è conseguenza del movimento, e che quindi, in base alla nozione comune VII, conduce all'uguaglianza, è considerata nel primo (I, 4) e non nel secondo (I, 26) criterio: è pertanto al primo che Euclide ricorre, nonostante la già avvenuta applicazione del secondo.

Dunque, la diagonale *BC* divide il parallelogrammo *ABCD* in due parti uguali. – C.D.D.

APPLICA: I, 4, 26, 29.

È APPLICATA IN: I, 35, 37, 38, 41, 43, 45, 46; II, 1, 4, 7, 8, 9, 10; IV, 7, 8; VI, 4, 10; X, 52 lemma; XI, 24, 28, 29, 39; XII, 2, 7, 9.

PROPOSIZIONE 35.

Parallelogrammi [a] *che siano [posti] sulla stessa base e fra le stesse parallele sono uguali* [b] *fra loro* [30].

Siano *ABCD*, *EBCF* parallelogrammi posti sulla stessa base *BC* e fra le stesse parallele *AF*, *BC*; dico che il parallelogrammo *ABCD* è uguale al parallelogrammo *EBCF*.

Infatti, poiché *ABCD* è un parallelogrammo, *AD* è uguale a *BC* (I, 34). Per la stessa ragione, pure *EF* è uguale a *BC* (id.); cosicché sono uguali anche i lati *AD*, *EF* (noz. com. I). Aggiungiamo ad ambedue *DE* [c]: tutta quanta la retta *AE* è perciò uguale a tutta quanta la retta *DF* (noz. com. II). Ma anche *AB*, *DC* sono uguali (I, 34); i due lati *EA*, *AB* sono così uguali rispettivamente ai due lati *FD*, *DC*; e l'angolo *FDC* è uguale all'angolo *EAB*, cioè l'angolo esterno a quello interno [ed opposto] (I, 29), per cui la base *EB*

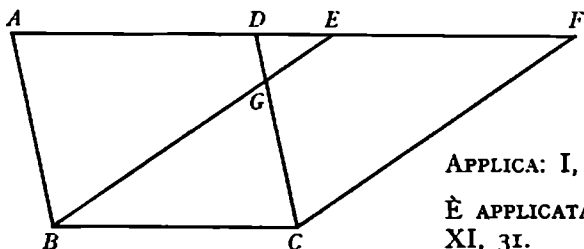
a. Al posto della più lunga espressione « area parallelogramma » si adopera qui solo l'espressione « parallelogrammo » (τὸ παραλληλόγραμμον).

b. Uguali = equivalenti.

c. Letteralmente: ... sono uguali anche *AD*, *EF*; e *DE* è comune...

[30] Scrive l'Enriques, a proposito di questa proposizione e della seguente (*op. cit.*, vol. I, p. 115, libro primo, per cura di Federigo Enriques e di Maria Teresa Zapelloni): « Nelle proposizioni 35 e 36 per la prima volta Euclide considera un'uguaglianza di superficie (equivalenza) che non s'accompagna ad un'uguaglianza di forma ».

è uguale alla base *FC*, ed il triangolo *EAB* sarà uguale al triangolo *DFC* (I, 4); si sottragga da ambedue[a] il triangolo *DGE*; il trapezio *ABGD* che rimane del primo è perciò uguale al trapezio rimanente *EGCF* del secondo (noz. com. III); si aggiunga in comune [ai due trapezi] il triangolo *GBC*: tutto quanto il parallelogrammo *ABCD* è quindi uguale a tutto quanto il parallelogrammo *EBCF*.

Dunque, parallelogrammi che siano posti sulla stessa base... (secondo l'enunciato). - C.D.D.

APPLICA: I, 4, 29, 34.

È APPLICATA IN: I, 36, 37; XI, 31.

PROPOSIZIONE 36.

Parallelogrammi che siano posti su basi uguali e fra le stesse parallele sono uguali fra loro.

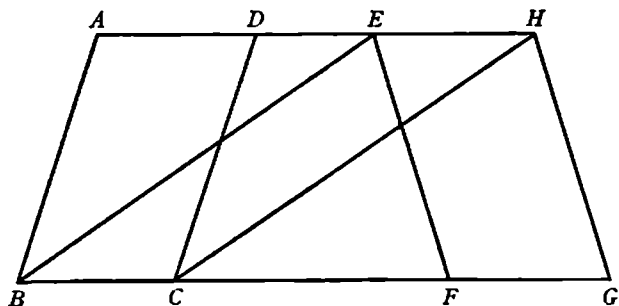
Siano *ABCD*, *EFGH* parallelogrammi posti sulle basi uguali *BC*, *FG* e fra le stesse parallele *AH*, *BG*; dico che il parallelogrammo *ABCD* è uguale al parallelogrammo *EFGH*.

Infatti, si traccino le congiungenti *BE*, *CH*. Ora, poiché *BC* è uguale a *FG*, ma *FG* è uguale ad *EH*, anche *BC*, *EH* sono rette uguali (noz. com. I). Ma sono pure parallele, ed *EB*, *HC* le vengono a congiungere; ma rette che congiungano dalla stessa parte rette uguali e parallele sono uguali e parallele (I, 33), per cui *EBCH* è un parallelogrammo[b]. Ed esso è uguale al parallelogrammo *ABCD*: ha come base difatti la stessa base *BC*, ed è posto fra le stesse parallele *BC*, *AH*

a. Al solito, letteralmente, *in comune* [dai due triangoli].

b. Abbiamo modificato un po' la punteggiatura; nel testo, dopo « sono anche rette parallele » vi è un punto, come vi è punto prima di « Quindi *EBCH* è un parallelogrammo ».

(I, 35). Per la stessa ragione, pure *EFGH* è uguale al medesimo parallelogrammo *EBCH* (id.); cosicché anche i parallelogrammi *ABCD*, *EFGH* sono uguali (noz. com. I).

Dunque, parallelogrammi che siano posti su basi uguali... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 33, 35.

È APPLICATA IN: I, 38; II, 5, 8; VI, 28, 29; XI, 25, 29.

PROPOSIZIONE 37.

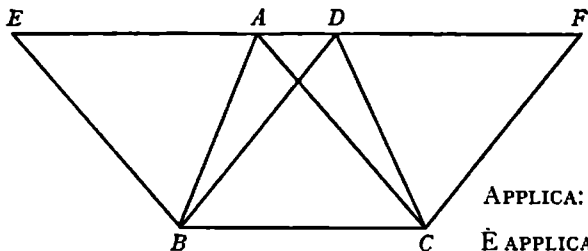
Triangoli che siano posti sulla stessa base e fra le stesse parallele sono uguali fra loro.

Siano *ABC*, *DBC* triangoli posti sulla stessa base *BC* e fra le stesse parallele *AD*, *BC*; dico che il triangolo *ABC* è uguale al triangolo *DBC*.

Si prolunghi da ambedue le parti la retta *AD* oltre *A*, *D* sino ad *E*, *F*, per *B* si conduca *BE* parallela a *CA*, e per *C* si conduca *CF* parallela a *BD* (I, 31). Quindi i due quadrilateri [a] *EBCA*, *DBCF* sono parallelogrammi, e sono uguali fra loro: sono posti infatti sulla stessa base *BC* e fra le stesse parallele *BC*, *EF* (I, 35). Ma il triangolo *ABC* è metà del parallelogrammo *EBCA* – difatti la diagonale *AB* divide il parallelogrammo in due parti uguali (I, 34) –, ed il trian-

a. Letteralmente, sarebbe piuttosto *ciascuna delle due figure* e si ha: «Quindi ciascuna delle due figure *EBCA*, *DBCF* è un parallelogrammo, e sono uguali – sono infatti sulla stessa base *BC* e fra le stesse parallele *BC*, *EF* –, il triangolo *ABC* è..., ecc.».

golo *DBC* è metà del parallelogrammo *DBCF* – difatti la diagonale *DC* divide il parallelogrammo in due parti uguali (id.). [Ma metà di cose uguali sono uguali fra loro][a]. Il triangolo *ABC* è perciò uguale al triangolo *DBC*.

Dunque, triangoli che siano posti sulla stessa base... (secondo l'enunciato)[b]. – C.D.D.

APPLICA: I, 31, 34, 35.
È APPLICATA IN: I, 39, 41.

a. È la nozione comune VI, da espungere; per questo, cfr. alle nozioni comuni.

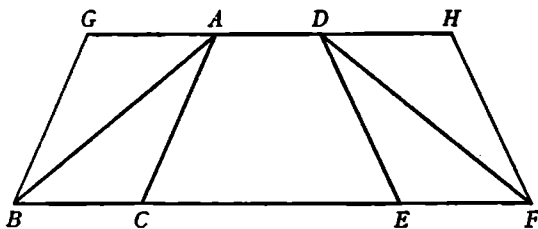
b. A questo punto ci piace ricordare, per chi volesse seguire la fortuna di Euclide pure nelle cosiddette epoche di decadenza (ma in realtà il mondo latino raggiunse, proprio negli ultimi secoli dell'Impero d'Occidente, un alto livello scientifico), che parte di questa dimostrazione, così come l'inizio di quella della prop. 38, si trovano insieme alla fine della dimostrazione di II, 8 ed a parte dell'enunciato di II, 9 in due frammenti di un codice matematico dell'inizio del IX sec. (ma la loro stesura è senz'altro anteriore) della Bibliot. Univers. di Monaco, sebbene con gravi errori di latino e di matematica e nell'ediz. teonina, come ovvio; su essi è da vedersi l'articolo, che li legge e valuta storicamente, di M. Geymonat nella *Scriptorium International Review of Manuscript Studies*, Bruxelles, XXI, 1, 1967; dello stesso autore è da vedersi ugualmente: *Euclidis latine facti fragmenta Veronensia*, Istituto Cisalpino, Milano, 1964, con dimostrazioni presumibilmente boeziane conservateci dai frammenti medesimi (cioè, parti dei libri XI, XII, XIII). Ricordiamo infatti che il circolo di Boezio, e ad un suo collaboratore vanno forse attribuiti i frammenti di Monaco, ha lavorato alla preparazione di quella traduzione latina di Boezio dell'Euclide intero, ed almeno per gli ultimi libri anche di rielaborazione latina, eseguita intorno all'anno 500 e per noi andata perduta. La cosiddetta *Geometria boeziana*, o meglio l'*Ars geometrica* dello Pseudo-Boezio (cfr. ed. Friedlein) è solo un riassunto, una *summa* della geometria latina allora presente (VII-VIII sec.).

Proposizione 38.

Triangoli che siano posti su basi uguali e fra le stesse parallele sono uguali fra loro.

Siano *ABC, DEF* triangoli posti sulle basi uguali *BC, EF* e fra le stesse parallele *BF, AD*; dico che il triangolo *ABC* è uguale al triangolo *DEF*.

Infatti, si prolunghi la retta *AD* da ambedue le parti oltre *A, D* sino a *G, H*, per *B* si conduca *BG* parallela a *CA*, e per *E* si conduca *FH* parallela a *DE* (I, 31). Quindi i due quadrilateri *GBCA, DEFH* sono parallelogrammi, e *GBCA* è uguale a *DEFH*: sono difatti posti sulle basi uguali *BC, EF* e fra le stesse parallele *BF, GH* (I, 36). Ma il triangolo *ABC* è metà del parallelogrammo *GBCA* – la diagonale *AB* difatti divide il parallelogrammo in due parti uguali (I, 34) –, mentre il triangolo *FED* è metà del parallelogrammo *DEFH* – difatti la diagonale *DF* divide il parallogrammo in due parti uguali (id.). [Ma metà di cose uguali sono uguali fra loro][a]. Il triangolo *ABC* è perciò uguale al triangolo *DEF*.

Dunque, triangoli che siano posti su basi uguali... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

Applica: I, 31, 34, 36.

È applicata in: I, 40, 42; VI, 1, 2.

a. La solita nozione comune VI, non di Euclide.

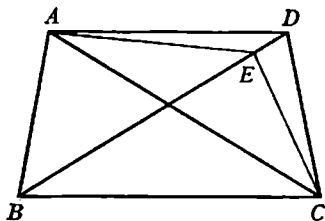
PROPOSIZIONE 39.

Triangoli uguali che siano posti sulla stessa base e dalla stessa parte sono anche [compresi] fra le stesse parallele.

Siano ABC, DBC triangoli uguali, posti sulla stessa base BC e dalla stessa parte rispetto ad essa; dico che sono anche compresi fra le stesse parallele [a].

Infatti, si tracci la congiungente AD; dico che AD è parallela a BC.

Se difatti non lo fosse, si conduca per il punto A la parallela AE alla retta BC (I, 31), e si tracci la congiungente EC. Quindi, in tal caso, il triangolo ABC è uguale al triangolo EBC – è posto difatti sulla stessa base BC e fra le stesse parallele (I, 37). Ma il triangolo ABC è uguale al triangolo DBC, per cui anche DBC sarebbe uguale ad EBC (noz. com. I), il triangolo maggiore al minore: il che è impossibile (noz. com. VIII). Perciò AE non è parallela a BC. Similmente potremo dimostrare che nessun'altra retta lo è, eccetto AD; quindi AD è parallela a BC.

Dunque, triangoli uguali che siano posti sulla stessa base... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 31, 37.

È APPLICATA IN: VI, 2.

a. Come Heiberg ha provato (*Hermes*, XXXVIII, 1903, p. 50), le parole « dico che sono anche compresi fra le stesse parallele » sono una interpolazione: vale a dire, il testo autentico diceva: « ... dalla stessa parte rispetto ad essa, e si tracci la congiungente AD; dico che AD è parallela a BC ». Insomma, « e si tracci la congiungente AD » faceva parte dell'*esposizione*, ma prendendo invece le parole come appartenenti alla *costruzione*, si premise un « dico che sono anche compresi fra le stesse parallele », e si alterò *e* in *infatti*, pensando che una « definizione » della cosa da essere dimostrata dovesse in ogni caso precedere.

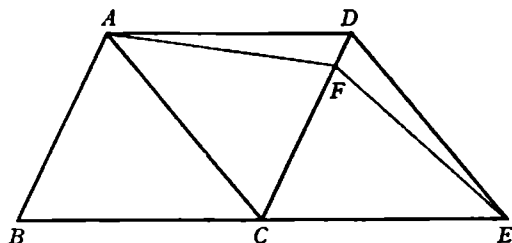
PROPOSIZIONE 40 [a].

Triangoli uguali che siano posti su basi uguali e dalla stessa parte sono anche compresi fra le stesse parallele.

Siano ABC, CDE triangoli uguali, posti sulle basi uguali BC, CE e dalla stessa parte. Dico che essi sono anche compresi fra le stesse parallele.

Infatti, si tracci la congiungente AD; dico che AD è parallela a BE.

Se difatti non lo fosse, si conduca per A la parallela AF a BE (I, 31), e si tracci la congiungente FE. Quindi, in tal caso, il triangolo ABC è uguale al triangolo FCE – sono posti difatti sulle basi uguali BC, CE, e fra le stesse parallele BE, AF (I, 38). Ma il triangolo ABC è uguale al triangolo DCE, per cui anche il triangolo DCE sarebbe uguale al triangolo FCE (noz. com. I), il maggiore al minore: il che è impossibile (noz. com. VIII); AF non è perciò parallela a BE. Similmente potremo dimostrare che nessun'altra retta lo è, eccetto AD; quindi AD è parallela a BE.

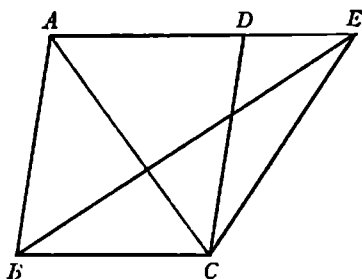
Dunque, triangoli uguali che siano posti su basi uguali... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 31, 38.

a. L'intera proposizione, secondo dimostrazione di Heiberg, fu interpolata per stabilire una proposizione che seguisse alla I, 39 e ad essa si riferisse, così come I, 38 si riferisce a I, 37 e I, 36 si rapporta a I, 35.

PROPOSIZIONE 41.

Se un parallelogrammo ha la stessa base ed è compreso fra le stesse parallele da cui è compreso un triangolo, il parallelogrammo è il doppio del triangolo.

Infatti, il parallelogrammo $ABCD$ abbia la stessa base BC e sia compreso fra le stesse parallele BC, AE da cui è compreso il triangolo EBC[a]; dico che il parallelogrammo $ABCD$ è il doppio del triangolo BEC.

Si tracci difatti la congiungente AC. Il triangolo ABC è così uguale al triangolo EBC – è posto difatti sulla stessa base BC e fra le stesse parallele BC, AE (I, 37). Ma il parallelogrammo $ABCD$ è il doppio del triangolo ABC – difatti la diagonale AC divide il parallelogrammo in due parti uguali (I, 34); cosicché il parallelogrammo $ABCD$ è il doppio pure del triangolo EBC.

Dunque, se un parallelogrammo ha la stessa base... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 34, 37.

È APPLICATA IN: I, 42, 47; VI, 1; XII, 3.

PROPOSIZIONE 42.

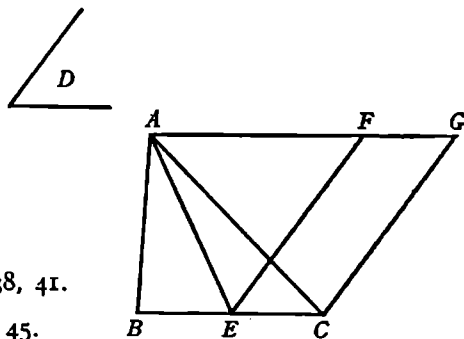
Costruire in un dato angolo rettilineo un parallelogrammo uguale ad un triangolo dato[b].

Sia ABC il triangolo dato, e D sia l'angolo rettilineo dato; si deve dunque costruire nell'angolo rettilineo D un parallelogrammo uguale al triangolo ABC.

a. Letteralmente: « e sia nelle, o fra le stesse parallele BC, AE del triangolo EBD »; così come nell'enunciato diceva « fra le stesse parallele di un triangolo ».

b. Un parallelogrammo, cioè, avente uno dei propri angoli uguale ad un angolo rettilineo dato (e difatti, allora, si può pen-

Si divida *BC* per metà in *E* (I, 10), si tracci la congiungente *AE*, e si costruisca sulla retta *EC*, con vertice nel punto *E* di essa, l'angolo *CEF* uguale all'angolo *D* (I, 23), per *A* si conduca *AG* parallela ad *EC* (I, 31), e per *C* si conduca *CG* parallela ad *EF* (id.); quindi *FECG* è un parallelogrammo. E poiché *BE* è uguale ad *EC*, anche il triangolo *ABE* è uguale al triangolo *AEC* – sono posti difatti sulle basi uguali *BE*, *EC* e fra le stesse parallele *BC*, *AG* (I, 38) –, per cui il triangolo *ABC* è il doppio del triangolo *AEC*. Ma pure il parallelogrammo *FECG* è il doppio del triangolo *AEC* – difatti ha la stessa base ed è compreso fra le stesse parallele (I, 41); quindi il parallelogrammo *FECG* è uguale al triangolo *ABC* (noz. com. V). Ed esso ha l'angolo *CEF* uguale all'angolo dato *D*.

Dunque, è stato costruito nell'angolo *CEF*, che è uguale all'angolo *D*, un parallelogrammo *FECG* uguale al triangolo dato *ABC*. – C.D.F.

APPLICA: I, 10, 23, 31, 38, 41.

È APPLICATA IN: I, 44, 45.

sare il parallelogrammo come *posto* in quell'angolo, poiché provvisto di un angolo che potrebbe coincidere con l'angolo rettilineo dato).

PROPOSIZIONE 43.

In ogni parallelogrammo i complementi[a] dei parallelogrammi [posti] intorno alla diagonale sono uguali fra loro[31].

Sia *ABCD* un parallelogrammo, *AC* sia una sua diagonale, ed *EH*, *FG* siano parallelogrammi posti intorno ad *AC*,

a. I complementi (τὰ παραπληρώματα) dei parallelogrammi «intorno al diametro» (com'è in greco), cioè posti intorno alla diagonale, sono le figure che riempiono gli interstizi (παρά, *presso*, e πλήρης, *pieno*, appunto, ossia le figure che aggiunte, poste presso ai parallelogrammi intorno alla diagonale, completano il parallelogrammo originario). Euclide parlando di «cosiddetti complementi» fa intendere di rivolgersi ad un termine tecnico che non doveva essere d'uso nuovo; da notare che Proclo, a p. 418, 15, *op. cit.*, osserva che una formale definizione di *complemento* non era del resto a Euclide necessaria: posti due parallelogrammi intorno alla diagonale, le aree che rimangono al di sopra di ciascun lato della diagonale non possono che completare il parallelogrammo originario, e dunque il fatto stesso propone il nome; del resto ancora (pp. 417, 1 segg.), non è detto che i complementi debbano essere parallelogrammi, poiché, solo quando i due parallelogrammi intorno alla diagonale sono formati da linee rette condotte per un punto della diagonale parallelamente ai lati del parallelogrammo originario, vale l'argomento, altrimenti essi possono anche avere figura diversa. Ad ogni modo, e in ogni caso, è facile mostrare, come fa appunto Proclo, che i complementi sono sempre uguali.

[31] Un enunciato più completo di questa proposizione sarebbe il seguente: «Se per un punto di una diagonale di un parallelogrammo si conducono due rette parallele ai lati, dei quattro parallelogrammi nei quali il parallelogrammo dato risulta diviso, sono uguali (= equivalenti) i due non attraversati dalla diagonale».

Questo teorema è comunemente noto sotto la denominazione di «teorema dello *gnomone*» (per il significato di quest'ultimo termine si veda la nota alle definizioni del libro secondo). La dimostrazione si fonda sulla nozione comune III (criterio di uguaglianza per sottrazione).

Questo teorema dello gnomone permette (come si vede dalla proposizione seguente I, 44) di risolvere il problema di trasformare un parallelogrammo dato in un altro uguale (= equivalente) avente un lato assegnato ed avente gli stessi angoli. E poiché nella I, 42 Euclide ha già inse-

mentre siano *BK*, *KD* i cosiddetti complementi; dico che il complemento *BK* è uguale al complemento *KD*.

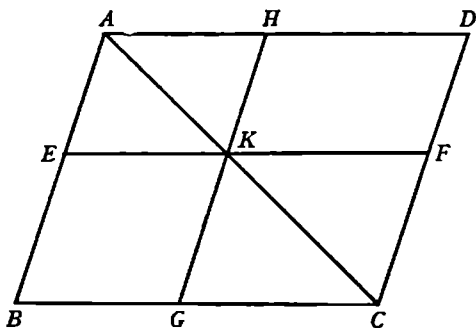
Infatti, poiché *ABCD* è un parallelogrammo, ed *AC* è una sua diagonale, il triangolo *ABC* è uguale al triangolo *ACD* (I, 34). Di nuovo, poiché *EH* è un parallelogrammo, ed *AK* è una sua diagonale, il triangolo *AEK* è uguale al triangolo *AHK* (id.). E per la stessa ragione, pure il triangolo *KFC* è uguale al triangolo *KGC* (id.). Poiché dunque il triangolo *AEK* è uguale al triangolo *AHK*, ed il triangolo *KFC* al triangolo *KGC*, il triangolo *AEK* insieme col triangolo *KGC* è uguale al triangolo *AHK* insieme col triangolo *KFC* (noz. com. II); ma anche tutto quanto il triangolo *ABC* è uguale a tutto quanto il triangolo *ADC*: il complemento *BK* che [così] rimane è quindi uguale al rimanente complemento *KD* (noz. com. III).

a. Letterale in greco.

gnato a trasformare un triangolo in un parallelogrammo avente angoli dati («in un dato angolo»), a questo punto egli sa trasformare un triangolo in un parallelogrammo uguale (= equivalente) avente: 1) data base, 2) dati angoli. Egli risolve così quel problema che porta il nome di ***applicazione parabolica delle aree***. Per detto problema, e per quelli di applicazione ellittica ed iperbolica, si veda la nota alla II, 5.

Come caso particolare, se gli angoli assegnati sono retti, la I, 42 insegna a trasformare un triangolo in un rettangolo equivalente, mentre la I, 44 impone una condizione ulteriore: quella che il rettangolo abbia una base data. Le considerazioni ed i procedimenti costruttivi del libro secondo degli *Elementi* si riferiscono appunto esclusivamente al caso dell'angolo retto, e alla fine di detto libro secondo s'insegna a costruire un quadrato equivalente ad un rettangolo dato (II, 14). Sicché il libro secondo appare come una specie di breve complemento del libro primo, nel senso che in esso si porta a termine la risoluzione del problema fondamentale consistente nella *quadratura* di un qualunque poligono, cioè nella costruzione di un quadrato ad esso equivalente.

Va osservato, a questo proposito, che la I, 45 (v.), mediante la scomposizione di un qualunque poligono in triangoli, generalizza la I, 42, e che per la *quadratura* del rettangolo viene applicato nel libro II il teorema di Pitagora, che viene appunto inserito alla fine del libro primo, sia come coronamento finale di detto libro (cfr. la nota alla I, 32) sia come strumento, nel modo or ora indicato, per la risoluzione del problema della quadratura di un poligono qualunque.

Dunque, in ogni parallelogrammo i complementi... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 34.

È APPLICATA IN: I, 44; II, 4, 5, 6, 7, 8; VI, 27, 28, 29; X, 54, 91; XIII, 1, 2, 3, 4, 5.

PROPOSIZIONE 44.

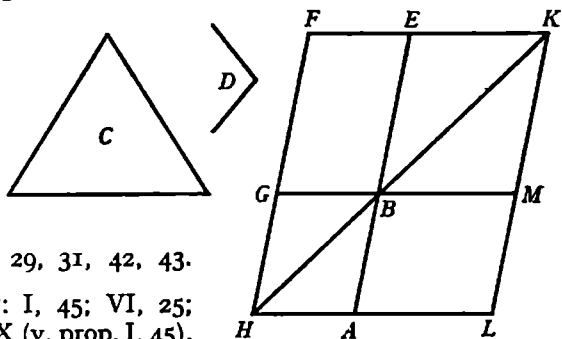
Applicare ad una retta data, in un dato angolo rettilineo, un parallelogrammo uguale ad un triangolo dato [32].

Siano AB la retta data, C il triangolo dato, e D l'angolo rettilineo dato; si deve dunque applicare alla retta data AB, in un angolo uguale all'angolo D, un parallelogrammo uguale al triangolo dato C.

Si costruisca nell'angolo EBG, che sia uguale all'angolo D, il parallelogrammo $BEFG$ uguale al triangolo C (I, 42), e lo si ponga in modo da essere BE in linea retta con AB, si prolunghi FG oltre G sino a H, per A si conduca AH parallela all'una o all'altra indifferentemente delle rette BG, EF (I, 31 e I, 30), e si tracci la congiungente HB. Ora, poiché la retta HF cade sulle parallele AH, EF, la somma degli angoli AHF, HFE è uguale a due retti (I, 29). La somma degli angoli BHG, GFE è perciò minore di due retti; ma rette che vengano prolungate illimitatamente, a partire da angoli minori di due retti, si incontrano (post. V), per cui HB, FE, se prolungate, si incontreranno. Si prolunghino esse e si incontrino in K, per il punto K si conduca KL parallela all'una o all'altra indifferentemente delle rette EA,

[32] Come s'è detto, per notizie riguardanti questo problema, che viene detto di *applicazione parabolica delle aree*, si veda la nota alla prop. II, 5.

FH (I, 31 e I, 30), e si prolunghino *HA*, *GB* oltre *A*, *B* rispettivamente[a] sino ai punti *L*, *M*. Quindi *HLKF* è un parallelogrammo, *HK* è una sua diagonale, ed *AG*, *ME* sono parallelogrammi posti intorno a *HK*, mentre *LB*, *BF* sono i cosiddetti complementi; *LB* è perciò uguale a *BF* (I, 43). Ma *BF* è uguale al triangolo *C*; quindi anche *LB* è uguale a *C* (noz. com. I). E poiché l'angolo *GBE* è uguale all'angolo *ABM* (I, 15), ma l'angolo *GBE* è uguale all'angolo *D*, anche l'angolo *ABM* è uguale all'angolo *D* (noz. com. I).

Dunque, è stato applicato alla retta data *AB* nell'angolo *ABM*, che è uguale all'angolo *D*, il parallelogrammo *LB* uguale al triangolo dato *C*. – C.D.F.

Applica: I, 15, 29, 31, 42, 43.

È applicata in: I, 45; VI, 25; inoltre nel libro X (v. prop. I, 45).

Proposizione 45.

Costruire un parallelogrammo uguale ad una figura rettilinea[b] *data in un dato angolo rettilineo*[33].

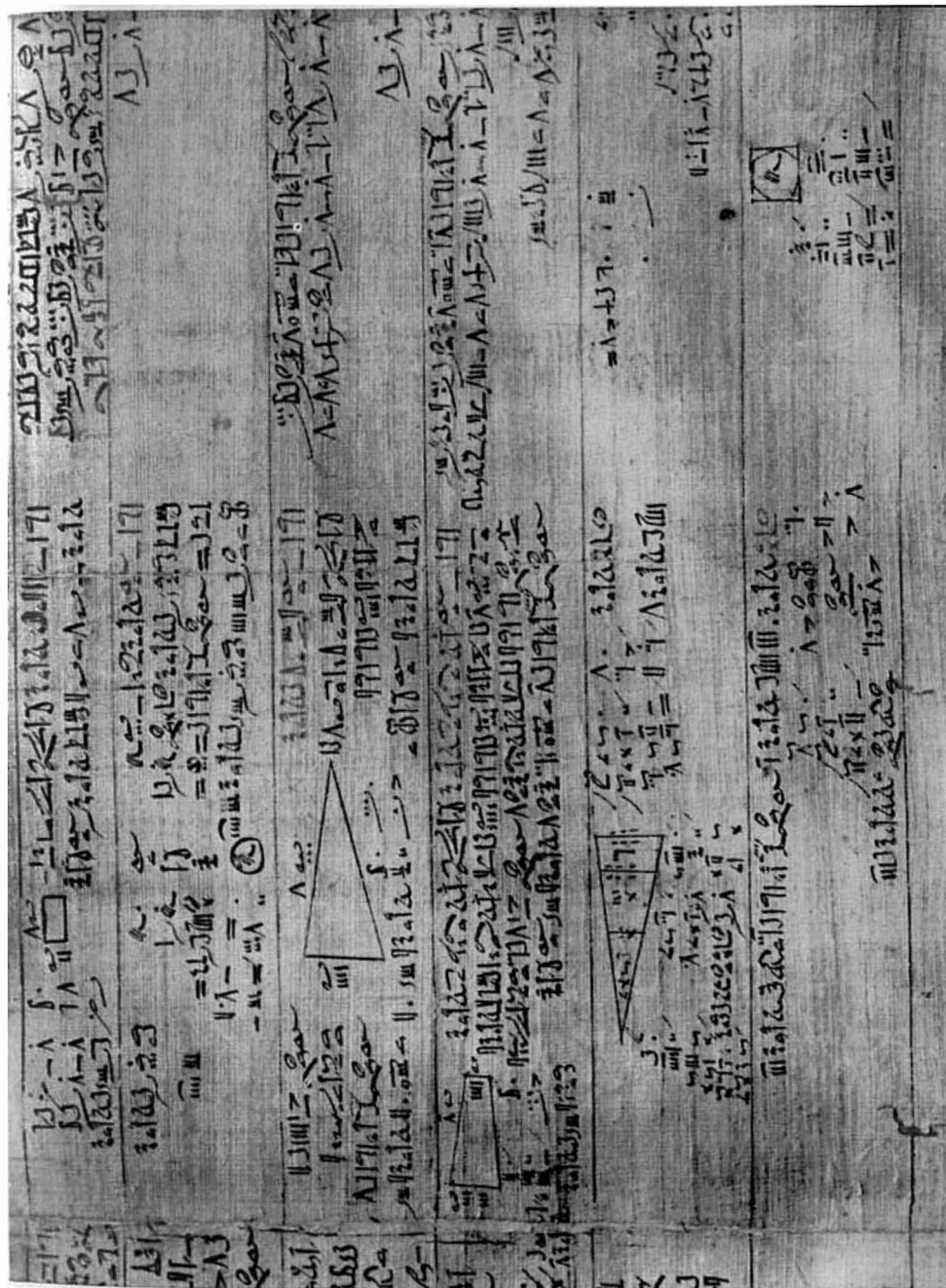
Sia *ABCD* la figura rettilinea data, ed *E* sia l'angolo rettilineo dato; si deve dunque costruire nell'angolo dato *E* un parallelogrammo uguale alla figura rettilinea *ABCD*.

a. *Rispettivamente* è aggiunta nostra.
b. « figura rettilinea » è, alla lettera, « il rettilineo » (τὸ εὐθύγραμμον), cioè l'aggettivo *rettilineo* usato come sostantivo, allo stesso modo di τὸ παραλληλόγραμμον per figura parallelogramma, ossia parallelogrammo.

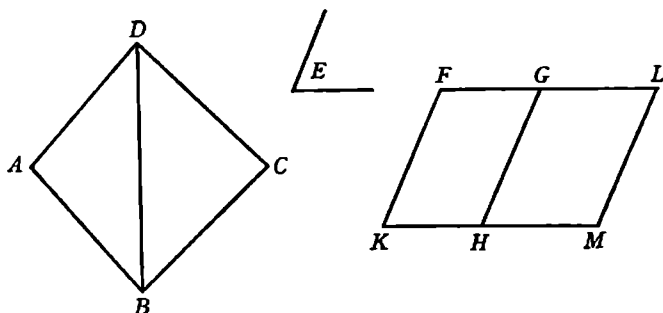
[33] Come si è già accennato nella nota alla I, 43, questa proposizione I, 45 costituisce una importante generalizzazione della I, 42: esso insegna

Si tracci la congiungente *DB*, si costruisca nell'angolo *HKF*, che sia uguale all'angolo *E*, il parallelogrammo *FH* uguale al triangolo *ABD* (I, 42), e si applichi alla retta *GH* nell'angolo *GHM*, che è uguale all'angolo *E* (I, 29), il parallelogrammo *GM* uguale al triangolo *DBC* (I, 44). Ora, poiché l'angolo *E* è uguale a ciascuno dei due angoli *HKF*, *GHM*, anche gli angoli *HKF*, *GHM*, sono uguali (noz. com. I). Si aggiunga in comune ad essi l'angolo *KHG*; la somma di *FKH*, *KHG* è quindi uguale alla somma di *KHG*, *GHM*. Ma la somma degli angoli *FKH*, *KHG* è uguale a due retti (I, 29), per cui pure la somma degli angoli *KHG*, *GHM* è uguale a due retti. Dunque, le due rette *KH*, *HM*, che giacciono da parti opposte rispetto alla retta *GH*, formano con essa, e coi vertici nel punto *H*, angoli adiacenti [a] la cui somma è uguale a due retti; quindi *KH* è in linea retta con *HM* (I, 14). E poiché la retta *HG* cade sulle parallele *KM*, *FG*, gli angoli alterni *MHG*, *HGF* sono fra loro uguali (I, 29). Si aggiunga in comune ad essi l'angolo *HGL*; la somma di *MHG*, *HGL* è perciò uguale alla somma di *HGF*, *HGL* (noz. com. II). Ma la somma degli angoli *MHG*, *HGL* è uguale a due retti (I, 29), per cui anche la somma degli angoli *HGF*, *HGL* è uguale a due retti (noz. com. I); quindi *FG* è in linea retta con *GL* (I, 14). E poiché *FK* è uguale e parallela a *HG* (I, 34), ma pure *HG* lo è rispetto a *ML* (id.), anche *KF*, *ML* sono uguali e parallele (noz. com. I; I, 30); e le congiungono le rette *KM*, *FL*: quindi *KFLM* è un parallelogrammo (I, 33). E poiché il triangolo *ABD* è uguale al parallelogrammo *FH*, ed il triangolo *DBC* al parallelogrammo *GM*, tutta quanta la figura rettilinea *ABCD* è uguale a tutto quanto il parallelogrammo *KFLM* (noz. com. II).

a. Letteralmente: con una retta *GH* e nel punto *H* su, cioè di, essa le due rette *KH*, *HM*, che non giacciono dalla stessa parte, producono, o formano, angoli adiacenti...

infatti a costruire in un dato angolo un parallelogrammo (in particolare un rettangolo) equivalente ad un qualunque poligono, e non già soltanto ad un qualunque triangolo.

Papiro matematico egiziano *Rhind*, copia di un testo del 1800 a. C. circa

(London, British Museum).

Dunque, è stato costruito nell'angolo FKM, che è uguale all'angolo dato E, il parallelogrammo $KFLM$ uguale alla figura rettilinea data $ABCD$. – C.D.F.

APPLICA: I, 14, 29, 30, 33, 34, 42, 44.

È APPLICATA IN: II, 14; VI, 25; X, 20, 22, 23, 25, 26, 38, 41, 44, 47, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 71, 72, 75, 78, 81, 84, 97, 99, 100, 101, 108, 111.

PROPOSIZIONE 46.

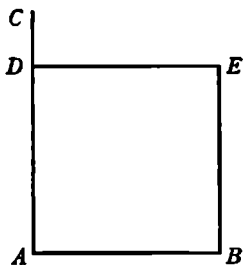
Descrivere un quadrato su una retta data[34].

Sia AB la retta data; si deve dunque descrivere un quadrato sulla retta AB.

Si innalzi, dal punto A della retta AB, la retta AC perpendicolare ad AB (I, 11), si ponga AD uguale ad AB (I, 3 o post. III), e per il punto D si conduca DE parallela ad AB, mentre si conduca BE per il punto B parallela ad AD (I, 31). Quindi $ADEB$ è un parallelogrammo, e perciò AB è uguale a DE, ed AD è uguale a BE (I, 34). Ma AB è uguale ad AD; quindi le quattro rette BA, AD, DE, EB sono uguali fra loro (noz. com. I): il parallelogrammo $ADEB$ è perciò equi-

[34] Come si vede, la costruzione di un quadrato (e più in generale quella di un rettangolo, ossia di un quadrilatero avente quattro angoli retti) richiede il teorema inverso delle parallele I, 29, cioè l'applicazione del quinto postulato. Il tentativo di dimostrare l'esistenza, e la possibilità di costruzione, di un rettangolo senza ricorrere al quinto postulato si ricollega ai procedimenti di G. Saccheri e di A. M. Legendre (cfr. nota alla I, 16), che preludono alle geometrie non euclidee.

latero. Dico adesso che ha anche gli angoli retti. Infatti, poiché la retta AD cade sulle rette parallele AB, DE, la somma degli angoli BAD, ADE è uguale a due retti (I, 29). Ma l'angolo BAD è retto, per cui è retto anche l'angolo ADE. Ma i parallelogrammi hanno lati ed angoli opposti uguali fra loro (I, 34); pure ciascuno dei due angoli opposti ABE, BED è quindi retto; perciò $ADEB$ ha gli angoli retti. E fu dimostrato che è anche equilatero.

Dunque, esso è un quadrato; ed è stato descritto sulla retta AB. – C.D.F.

APPLICA: I, 3, 11, 29, 31, 34.

È APPLICATA IN: I, 47; II, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 14; VI, 30; X, 19, 20, 21; lemma X, 22, 24, 25.

PROPOSIZIONE 47.

Nei triangoli rettangoli il quadrato del lato opposto all'angolo retto è uguale alla somma dei quadrati dei lati che comprendono l'angolo retto [35].

Sia ABC un triangolo rettangolo avente l'angolo BAC retto; dico che il quadrato di BC è uguale alla somma dei quadrati di BA, AC.

[35] È di dubbio valore l'attribuzione effettiva a Pitagora di questo celebre teorema, che tradizionalmente porta il suo nome.

A parte la riserva fondamentale che già dai tempi di Platone non si aveva modo di distinguere l'opera personale di Pitagora da quella della scuola sorta attorno a lui, le attribuzioni a Pitagora sono tarde, trovandosi in Plutarco, Diogene Laerzio, Ateneo.

Vero è che Diogene Laerzio (*Vite dei filosofi*, libro VIII, cap. I, 12, trad. e note di Marcello Gigante, ed. Laterza, Bari, 1962) fa riferimento ad Apollodoro il calcolatore, secondo il quale Pitagora «sacrificò un'ecatombe, per avere scoperto che il quadrato dell'ipotenusa in un triangolo rettangolo è uguale ai quadrati dei suoi lati». E viene anche citato un

Infatti, si descrivano il quadrato *BDEC* su *BC*, e su *BA*, *AC* i quadrati *GB*, *HC* (I, 46), per *A* si conduca *AL* parallela all'una o all'altra indifferentemente delle rette *BD*,

epigramma così composto: « Quando Pitagora scoprì la famosissima figura, allora per essa compì un famoso sacrificio di buoi ».

Che il sacrificio abbia carattere assolutamente leggendario era già osservato da Cicerone (*De natura deorum*, III, 36, 88): « Si dice che Pitagora, avendo trovato in geometria qualcosa di nuovo (*quiddam novi*) avesse immolato un bove alle Muse; ma io non lo credo, poiché egli non volle immolare una vittima ad Apollo Delio, né volle aspergere di sangue l'altare ».

Proclo, nel suo commento alla I, 47 scrive: « A sentire coloro che vogliono narrarci storie di antichi avvenimenti, troviamo che alcuni tra essi attribuiscono a Pitagora questo teorema, dicendo che egli sacrificò un bove in onore della sua scoperta. Per parte mia io ammiro coloro che per primi hanno stabilito la verità di questo teorema, e ancor di più ammiro l'autore degli *Elementi* (Euclide, lo στοιχειωτής), non solo per la dimostrazione assai chiara, ma anche, ecc. ecc. » (qui Proclo allude alla generalizzazione a poligoni simili costruiti sui lati del triangolo rettangolo, contenuta nella prop. VI, 31 degli *Elementi*: si veda la nota ivi).

Sembra, dunque, che sia proprio opera personale di Euclide questa dimostrazione che troviamo negli *Elementi* nella I, 47, e che è basata sulla teoria della equivalenza. Sarebbe, cioè, opera personale di Euclide l'indirizzo seguito nel libro primo ed ancor più nel secondo (ed anche nel terzo), che *svincola* la trattazione dalla teoria delle proporzioni (esposta soltanto nel libro quinto in forma generale, ed applicata soltanto nel libro sesto) e fonda le dimostrazioni sulla teoria dell'equivalenza (cfr. per questo anche la *Nota introduttiva* al libro secondo).

Del resto, appare certo che il *teorema di Pitagora* fu intuitivamente o sperimentalmente conosciuto, almeno in casi particolari, anche dalle matematiche preelleniche.

È poi particolarmente suggestiva l'ipotesi dello Zeuthen, secondo la quale fu proprio il desiderio di giustificare e *dimostrare* il teorema di Pitagora che condusse i geometri greci a *costruire* un complesso di proposizioni concatenate l'una all'altra, risalendo fino a quelle più semplici (procedimento di *analisi*), sicché poi con procedimento inverso (di *sintesi*) da dette semplici proposizioni iniziali (postulati) si potesse *discendere*, per gradi di complessità maggiore, fino al detto teorema di Pitagora. Sarebbe stato quindi proprio detto teorema (nella ricerca della sua giustificazione logica) a dare l'avvio alla geometria razionale. E la memorabile comunicazione di Zeuthen s'intitola appunto: *Théorème de Pythagore, origine de la géométrie scientifique* (Congr. internazionale, Ginevra, 1904). Questo teorema, detto universalmente *di Pitagora*, ha ricevuto poi numerosissime dimostrazioni, sulle quali qui non ci fermiamo.

Non ci sembra che una dimostrazione del teorema, per il caso particolare del triangolo rettangolo isoscele, sia da ricercare nel noto passo del dialogo platonico *Menone* (82 *a* - 85 *b*): ciò nel senso che il procedimento

CE (I, 31 e I, 30), e si traccino le congiungenti *AD*, *FC*. Ora, poiché ciascuno dei due angoli *BAC*, *BAG* è retto, le due rette *AC*, *AG*, che giacciono da parti opposte rispetto alla retta *BA*, formano con essa, e coi vertici nel punto *A*, angoli adiacenti la cui somma è uguale a due retti; quindi *CA* è in linea retta con *AG* (I, 14). Per la stessa ragione, pure *BA* è in linea retta con *AH* (id.). E poiché l'angolo *DBC* è uguale all'angolo *FBA* – difatti ciascuno dei due è retto –, si aggiunga in comune ad essi l'angolo *ABC*; tutto quanto l'angolo *DBA* è quindi uguale a tutto quanto l'angolo *FBC* (noz. com. II). Ora, poiché *DB* è uguale a *BC*, e *FB* a *BA* (def. XXII), i due lati *DB*, *BA* sono uguali rispettivamente ai due lati *FB*, *BC*; e l'angolo *DBA* è uguale all'angolo *FBC*, per cui la base *AD* è uguale alla base *FC*, ed il triangolo *ABD* è uguale al triangolo *FBC* (I, 4). Ma il parallelogrammo *BL* [a] è il doppio del triangolo *ABD* – essi hanno difatti la stessa base *BD* e sono compresi fra le stesse parallele *BD*, *AL* (I, 41) –, mentre il quadrato *GB* è il doppio del triangolo *FBC*: difatti essi hanno, di nuovo, la stessa base *FB* e sono compresi fra le stesse parallele *FB*, *GC* (I, 41). [Ma doppi di cose uguali sono uguali fra loro (noz. com. V)] [b]; è quindi uguale anche il parallelogrammo *BL*

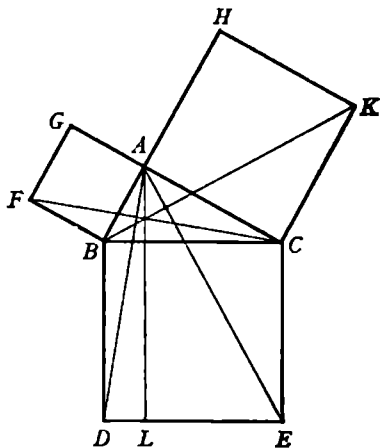
a. Fermiamo con un punto e proseguiamo con *Ma* ciò che in greco è segnato con punto e virgola e proseguito da *ed*: « ... al triangolo *FBC*; ed il parallelogrammo... ».

b. È fra le nozioni comuni non euclidee.

dimostrativo ivi offerto prescinde completamente dal teorema di Pitagora anche nella sua impostazione.

Per quanto riguarda, poi, le dimostrazioni vere e proprie del teorema, ci basti qui accennare a quella basata sul fatto che l'altezza sull'ipotenusa divide un triangolo rettangolo in due triangoli simili al dato (vedasi per questo la nota alla VI, 8).

Osserviamo, infine, che la dimostrazione di Euclide si compone di due metà simmetriche, relativamente al fatto che il quadrato dell'ipotenusa viene scomposto in due rettangoli, ciascuno dei quali è equivalente al quadrato di un cateto. A ciò è dovuto il fatto che tradizionalmente si chiami nelle nostre scuole *teorema di Euclide* quello riguardante l'equivalenza tra il quadrato di un cateto e il rettangolo dell'ipotenusa e della proiezione del cateto sull'ipotenusa stessa.

al quadrato *GB*. Similmente, tracciate le congiungenti *AE*, *BK*, si potrà dimostrare che pure il parallelogrammo *CL* è uguale al quadrato *HC*; tutto quanto il quadrato *BDEC* è perciò uguale alla somma dei due quadrati *GB*, *HC* (noz. com. II). Ed il quadrato *BDEC* è descritto su *BC*, mentre i quadrati *GB*, *HC* sono descritti su *BA*, *AC*. Quindi il quadrato del lato *BC* è uguale alla somma dei quadrati dei lati *BA*, *AC*.

Dunque, nei triangoli rettangoli... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 4, 14, 31, 41, 46.
È APPLICATA IN: I, 48; II, 9, 10, 11, 12, 13, 14; III, 14, 35, 36; IV, 12; lemma a X, 14, 29, 30, 33, 34, 35; XI, 23, 23 scolio, 35; XII, 17; XIII, 12, 14, 15, 18.

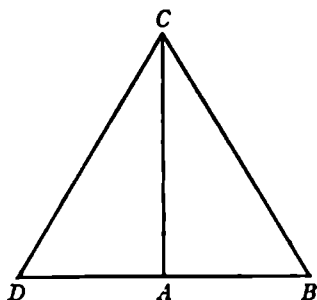
PROPOSIZIONE 48.

Se in un triangolo il quadrato di uno dei lati è uguale alla somma dei quadrati dei rimanenti due lati del triangolo, l'angolo che è compreso dai due rimanenti lati del triangolo è retto [36]

Infatti, nel triangolo *ABC* il quadrato di uno dei lati, *BC*, sia uguale alla somma dei quadrati dei lati *BA*, *AC*; dico che l'angolo *BAC* è retto.

Si innalzi difatti, dal punto *A* della retta *AC*, la retta *AD* perpendicolare ad *AC* (I, 11), si ponga *AD* uguale a *BA* (I, 3 o post. III), e si tracci la congiungente *DC*. Poiché *DA* è uguale ad *AB*, anche il quadrato di *DA* è uguale al quadrato di *AB*. Si aggiunga in comune ad essi il quadrato

[36] Questa proposizione I, 48, con la quale ha termine il primo libro degli *Elementi*, costituisce l'inverso della I, 47, cioè del teorema detto di Pitagora.

di *AC*; la somma dei quadrati di *DA*, *AC* è perciò uguale alla somma dei quadrati di *BA*, *AC* (noz. com. II). Ma il quadrato di *DC* è uguale alla somma dei quadrati di *DA*, *AC* – difatti l'angolo *DAC* è retto (I, 47) –, mentre alla somma dei quadrati di *BA*, *AC* è uguale il quadrato di *BC* – lo è difatti per ipotesi; quindi il quadrato di *DC* è uguale al quadrato di *BC* (noz. com. I), cosicché pure il lato *DC* è uguale al lato *BC*. Ma poiché *DA* è uguale ad *AB*, ed *AC* è comune, i due lati *DA*, *AC* sono uguali ai due lati *BA*, *AC*; e la base *DC* è uguale alla base *BC*, per cui l'angolo *DAC* è uguale all'angolo *BAC* (I, 8). Ma l'angolo *DAC* è retto; quindi anche l'angolo *BAC* è retto.

Dunque, se in un triangolo il quadrato di uno dei lati... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 8, 11, 47.

È APPLICATA IN: XI, 35.

LIBRO SECONDO

Questo breve libro comprende soltanto quattordici proposizioni, e risulta strettamente legato al libro primo, del quale può dirsi costituisca una particolare continuazione.

E la particolarità consiste nel fatto che in questo libro trionfa, per dir così, l'angolo retto. Mentre nel libro primo sono stati considerati parallelogrammi in generale, qui invece si considerano esclusivamente rettangoli (e quadrati). È come se in geometria analitica si passasse da coordinate cartesiane oblique a coordinate cartesiane ortogonali.

Le proposizioni rivestono quindi maggiore semplicità: va osservato tuttavia che esse presuppongono l'esistenza di rettangoli e di quadrati, e che ciò implica l'uso, sia pure indiretto, del quinto postulato.

Nel libro primo Euclide ha insegnato a trasformare un poligono qualunque in un parallelogrammo avente dati angoli. Ciò ha fatto dapprima per un triangolo (I, 42), dando al parallelogrammo da costruire base uguale alla metà di quella del triangolo, e altezza uguale all'altezza del triangolo stesso. Ha poi costretto *il parallelogrammo così costruito ad avere una base data: in questa trasformazione consiste il problema dell'applicazione parabolica delle aree (I, 44). Detto problema viene risolto applicando il cosiddetto teorema dello gnomone (I, 43) e corrisponde alla costruzione del quarto proporzionale dopo tre segmenti dati: si tratta cioè d'un problema che viene più tardi risolto nuovamente applicando la teoria delle proporzioni (VI, 12). La sua risoluzione mediante la sola teoria dell'equi-*

valenza rappresenta quindi una tappa importante di quel movimento di svincolo dalla teoria delle proporzioni che Euclide attua nei primi quattro libri, ma che costituisce soprattutto uno dei motivi fondamentali del libro secondo, che ci accingiamo ad esaminare.

Una volta costruito un parallelogrammo (di dati angoli) equivalente ad un triangolo dato, Euclide estende (in I, 45) la costruzione a quella di un parallelogrammo (di dati angoli) equivalente ad un poligono avente numero qualunque di lati: ottiene ciò replicando la costruzione della I, 42 e combinandola col procedimento dell'applicazione parabolica delle aree: ciò che, come s'è visto, viene appunto fatto nella I, 45.

Se ora da un parallelogrammo avente angoli qualsiasi (acuti e ottusi) passiamo agli angoli retti, possiamo dire che, come caso particolare delle citate proposizioni del libro primo, siamo in grado di costruire un rettangolo equivalente ad un poligono qualunque.

Ma non è soltanto con questo notevolissimo risultato costruttivo che dal libro primo ci affacciamo sul libro secondo. C'è infatti una proposizione fondamentale che, insieme alla sua inversa, costituisce la conclusione del libro primo: si tratta, come il lettore ha già veduto, del teorema di Pitagora sul triangolo rettangolo (I, 47).

Questo teorema, come tutti sanno, permette di costruire un quadrato equivalente alla somma, od anche alla differenza, di due quadrati.

Per passare da un rettangolo ad un quadrato equivalente, occorre pertanto una proposizione intermedia che, per dir così, faccia da ponte tra l'applicazione parabolica e il teorema di Pitagora.

Cioè: mentre l'applicazione parabolica permette di trasformare un poligono qualunque in un rettangolo equivalente, ed il teorema di Pitagora permette di trasformare la differenza di due quadrati in un quadrato unico, c'è una proposizione centrale *del libro secondo (la quinta, completata dalla sesta) che permette appunto di compiere il passo intermedio: trasformare un rettangolo nella differenza di due quadrati.*

Si può allora, applicando detta II, 5 e il teorema di Pitagora, giungere nella proposizione finale del libro secondo, la quattordicesima, a quadrare *un rettangolo, cioè a costruire il quadrato equivalente ad un qualunque rettangolo: viene così dunque risolto il problema della quadratura di qualunque poligono.*

E va osservato che come l'applicazione parabolica delle aree equivale alla costruzione del quarto proporzionale dopo tre segmenti dati, così la quadratura del rettangolo equivale alla costruzione della media proporzionale tra due segmenti dati.

Il libro secondo degli Elementi *si conchiude proprio su questa proposizione, che rappresenta il più importante risultato nell'ordine di idee dello svincolo della geometria dalla teoria delle proporzioni.*

*Avvertiamo infine che il libro secondo venne giustamente definito dallo Zeuthen come quello dell'*algebra geometrica: *ciò perché in esso vengono presentate, in veste geometrica, proposizioni che corrispondono a nostre formule fondamentali di algebra elementare.*

A. F.

DEFINIZIONI

I. Ogni parallelogrammo rettangolo si dice esser compreso dalle due rette che comprendono l'angolo retto [a].

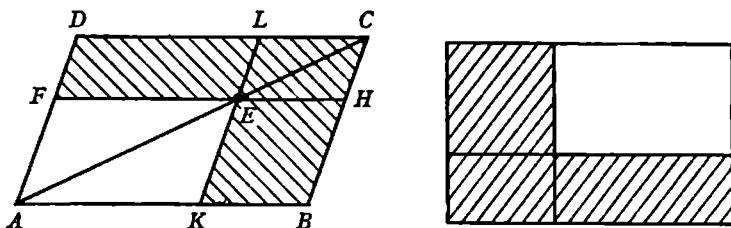
II. Si chiami gnomone, in ogni parallelogrammo [b], uno qualsiasi dei parallelogrammi posti intorno ad una sua diagonale insieme coi due complementi (= la somma di uno

a. Abbiamo visto che in greco l'angolo *ABC*, ad es., è « l'angolo compreso dalle (rette) *AB*, *BC* » e, in forma più breve, « lo (angolo compreso) dalle *AB*, *BC* » – ἡ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ – e così avremo ugualmente « il rettangolo compreso dalle (rette) *AB*, *BC* » – τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον –, il senso disteso dell'espressione corrispondendo appunto a questa definizione: « il parallelogrammo rettangolare il cui angolo retto è compreso dalle due rette *AB*, *BC* »; la forma abbreviata sarà allora « il (rettangolo compreso) dalle *AB*, *BC* » – τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ –, poiché in greco l'articolo, femminile, ἡ, per l'angolo, e neutro, τό, per il rettangolo, basta da solo ad indicare di che stiamo parlando. I geometri greci abbrevieranno naturalmente anche *AB*, *BC* in *ABC*, e diranno soltanto *lo* (angolo), od *il* (rettangolo) *dalle ABC*, ed in ultimo, data la possibilità d'intendersi attraverso l'articolo, *lo* (angolo) od *il* (rettangolo) *da ABC*, vale a dire ἡ ὑπὸ ΑΒΓ dell'angolo, e τὸ ὑπὸ ΑΒΓ del rettangolo. Euclide userà per il rettangolo la forma più breve τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΓ, ad es., *il* (rettangolo compreso) *da ABC*, invece di *il* (rettangolo compreso) *dalle AB, BC*, τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, dal Libro X in avanti.

b. Letteralmente: *in ogni spazio, in ogni area parallelogramma*, al solito.

qualsiasi dei parallelogrammi posti intorno ad una sua diagonale e dei due complementi) [1].

[1] Il significato del termine *gnomone* (termine al quale è stato già accennato nella nota alla prop. I, 43) si può esporre nel modo seguente:

Si tracci una diagonale *AC* di un parallelogrammo *ABCD*, e su di essa si prenda un punto qualunque *E*. Per *E* si traccino *FH* parallela ad *AB* e *KL* parallela a *BC*. Il parallelogrammo *ABCD* viene così diviso

in quattro parallelogrammi: due di essi (*AKEF* e *EHCL*) sono quelli che Euclide dice esser *posti intorno alla diagonale*, mentre gli altri due (*FELD* e *EHBK*) son chiamati *complementi*. Il teorema I, 43 mostra che i due *complementi* sono uguali (= equivalenti).

Col termine *gnomone* s'intende la differenza tra il parallelogrammo di partenza ed uno dei parallelogrammi intorno alla diagonale, ovvero (ciò che fa lo stesso) la somma di uno dei parallelogrammi intorno alla diagonale e dei due complementi. Nel caso della figura, gnomone è dunque tutta la parte tratteggiata.

Se il parallelogrammo da cui si parte è un rettangolo, lo gnomone prende la forma di una squadra, o comunque di uno strumento idoneo per tracciare angoli retti. E appunto Proclo ci riferisce che Enopide di Chio, al quale viene attribuita la costruzione della perpendicolare (I, 12) chiama questa nel modo arcaico: κατὰ γνώμονα (*katà gnòmona* = secondo lo gnomone) perché (aggiunge Proclo) « anche lo gnomone forma angoli retti con l'orizzonte ». – Per l'attribuzione a Enopide, cfr. A. FRAJESE, *Il cerchio nella geometria di Enopide di Chio*, in: « Archimede », 1967, fasc. 6, pp. 285-294.

E sembra che ad un tal significato (di *perpendicolare*) del termine gnomone si sia giunti partendo da quello originario *ciò che fa conoscere* (γιγνώσκω = conosco) ossia l'ago della meridiana, o comunque di un orologio solare, che faceva quindi *conoscere* l'ora.

PROPOSIZIONI

Proposizione I.

Se si dànno[a] *due rette, e si divide una di esse in quante parti si voglia, il rettangolo compreso dalle due rette è uguale alla somma dei rettangoli compresi dalla retta indivisa e da ciascuna delle parti dell'altra*[1].

a. Letteralmente: Se vi sono.

[1] Si è veduto che Euclide, nella I, 45, insegna a costruire un parallelogrammo avente un angolo dato ed equivalente ad un poligono qualunque. È, questa, una delle *tappe* per la quadratura del poligono. Quest'ultimo viene diviso, mediante il tracciamento di diagonali partenti da un vertice, in triangoli: si considera poi uno qualunque di detti triangoli e si costruisce, nell'angolo dato, un parallelogrammo equivalente a tale triangolo (I, 42). Si passa quindi ad un secondo triangolo, e mediante il procedimento dell'applicazione parabolica (I, 44) si costruisce, sempre nello stesso angolo e con un lato comune col parallelogrammo precedente, un nuovo parallelogrammo equivalente a detto secondo triangolo. E così via, fino ad esaurire i triangoli nei quali il poligono è stato diviso. L'essenziale consiste nel fatto che, così costruiti, i parallelogrammi hanno le basi sulla stessa retta, in modo da formare un parallelogrammo unico avente per base la somma delle basi. E, come s'è veduto a suo luogo (I, 45), l'*allineamento* sulla stessa retta delle basi dei vari parallelogrammi si dimostra applicando la I, 29 (teorema inverso delle parallele), che val quanto dire applicando il quinto postulato.

Orbene: nella II, 1 ci si riferisce al caso particolare dell'angolo retto: a rettangoli anziché a parallelogrammi qualunque, e si dimostra che la somma di tanti rettangoli di uguale altezza è un unico rettangolo avente ancora la stessa altezza e per base la somma delle basi.

Traducendo in linguaggio aritmetico (e indicando col prodotto delle sue dimensioni l'area del rettangolo) abbiamo cioè:

$$(a + b)\, c = a\, c + b\, c$$

dove a, b indicano le due basi, mentre c indica la comune altezza. Dal punto di vista aritmetico, dunque, la II, 1 esprime la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione.

E in linea generale, per dare la « traduzione » aritmetica delle proposizioni del libro secondo, indicheremo con le lettere (a, b, c, h, x...) le lunghezze di segmenti, sicché con un prodotto di due tali fattori indicheremo l'area di un rettangolo (ad es. ab indicherà l'area del rettangolo di dimen-

Siano *A*, *BC* due rette, e si divida a caso *BC* nei punti *D*, *E*; dico che il rettangolo compreso da *A*, *BC* è uguale alla somma del rettangolo compreso da *A*, *BD*[a], di quello compreso da *A*, *DE*, ed infine di quello compreso da *A*, *EC*.

Infatti, dal punto *B* si conduca la retta *BF* perpendicolare a *BC* (I, 11), si ponga *BG* uguale ad *A* (I, 3), per *G* si conduca *GH* parallela a *BC* (I, 31), e per *D*, *E*, *C* si conducano *DK*, *EL*, *CH* parallele a *BG* (id.).

È così *BH* uguale alla somma di *BK*, *DL*, *EH*. Ora, *BH* è il rettangolo avente per dimensioni[b] *A*, *BC* – difatti esso è compreso da *GB*, *BC*, e *BG* è uguale ad *A* –; *BK* è poi il rettangolo di *A*, *BD* – esso è difatti compreso da *GB*, *BD*, e *BG* è uguale ad *A*. Inoltre *DL* è il rettangolo di *A*, *DE* (I, 30) – infatti *DK*, cioè *BG* (I, 34), è uguale ad *A*. Ed anche, similmente, *EH* è il rettangolo di *A*, *EC* (id.); il rettangolo di *A*, *BC* è quindi uguale alla somma del ret-

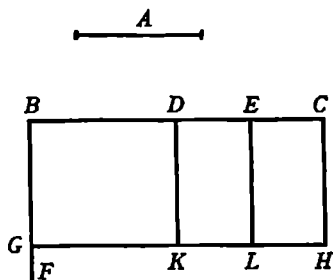
a. Euclide usa sia l'espressione per intero τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, « il rettangolo compreso dalle [sottinteso, rette] *A*, *BC* » (e senz'altro quando ciò sia opportuno, o preferisca l'espressione completa), sia l'espressione sincopata τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΒΓ, « il [sottinteso, rettangolo compreso] dalle [rette] *A*, *BC* »; nel primo caso noi adottiamo l'intera espressione tradotta, nel secondo notiamo la differenza con « il rettangolo di *A*, *BC* » semplicemente, e così per tutti i casi simili.

b. Letteralmente sarebbe il solito rettangolo (compreso) dalle (rette) *A*, *BC*.

sioni *a*, *b*), mentre un quadrato aritmetico indicherà l'area di un quadrato geometrico (ad es. a^2 indicherà l'area del quadrato di lato *a*).

Va osservato che la dimostrazione di questa proposizione ha carattere *visivo*: si ricava cioè dalla semplice osservazione della figura. E carattere essenzialmente visivo hanno anche le dimostrazioni delle nove proposizioni seguenti, sicché per ciascuna di esse si svolge *ex novo* la constatazione « visiva ». Ciò spiega il fatto, davvero singolare, che ciascuna delle prime dieci proposizioni del libro secondo risulti indipendente dalle altre: dette dieci proposizioni si presentano cioè completamente isolate l'una dall'altra. L'unico legame, forse, è costituito in certo senso dal procedimento dimostrativo della II, 4, come vedremo nella nota a detta proposizione.

tangolo di A, BD, del rettangolo di A, DE, ed infine del rettangolo di A, EC.

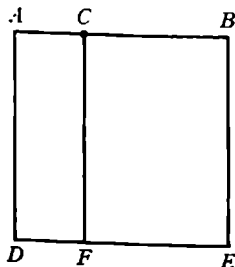
Dunque, se si dànno due rette... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 3, 11, 31, 34.

PROPOSIZIONE 2.

Se si divide a caso una linea retta, la somma dei rettangoli compresi da tutta la retta e da ciascuna delle sue parti è uguale al quadrato di tutta la retta.

Infatti, si divida a caso la retta AB nel punto C; dico che il rettangolo compreso da AB, BC, insieme col rettangolo compreso da BA, AC, è uguale al quadrato di AB.

Su AB difatti si descriva il quadrato $ADEB$ (I, 46), e per C si conduca CF parallela all'una o all'altra indifferentemente delle rette AD, BE (I, 31 e I, 30).

È così AE uguale alla somma di AF, CE. Ma AE è il quadrato di AB, mentre AF è il rettangolo compreso da BA, AC – esso è difatti compreso da DA, AC, ed AD è uguale ad AB –; e CE è il rettangolo di AB, BC – difatti BE è uguale ad AB. Quindi il rettangolo di BA, AC, insieme col rettangolo di AB, BC, è uguale al quadrato di AB.

Dunque, se si divide a caso una linea retta... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

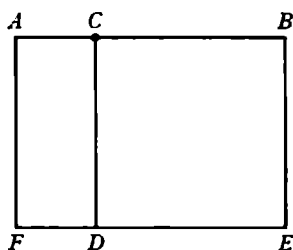
APPLICA: I, 31, 46.

È APPLICATA IN: XIII, 10.

PROPOSIZIONE 3.

Se si divide a caso una linea retta, il rettangolo compreso da tutta la retta e da una delle parti è uguale alla somma del rettangolo compreso dalle parti e del quadrato della parte predetta [2].

Infatti, si divida a caso la retta *AB* in *C*; dico che il rettangolo compreso da *AB*, *BC* è uguale al rettangolo compreso da *AC*, *CB* insieme col quadrato di *BC*.

Su *CB* difatti si descriva il quadrato *CDEB* (I, 46), si prolunghi *ED* oltre *D*, e per *A* si conduca *AF* parallela all'una o all'altra indifferentemente delle rette *CD*, *BE* (I, 31 e I, 30). È così *AE* uguale alla somma di *AD*, *CE*; ed *AE* è il rettangolo compreso da *AB*, *BC* – esso è difatti compreso da *AB*, *BE*, e *BE* è uguale a *BC* –, mentre *AD* è il rettangolo di *AC*, *CB* – difatti *DC* è uguale a *CB* –, e *CE* è il quadrato di *CB*. Quindi il rettangolo compreso da *AB*, *BC* è uguale al rettangolo compreso da *AC*, *CB* insieme col quadrato di *BC*.

Dunque, se si divide a caso una linea retta... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 31, 46.

È APPLICATA IN: IX, 15.

[2] Le proposizioni 2 e 3 costituiscono quei casi particolari della prop. I che si presentano quando uno dei rettangoli che la prop. I considera diventa un quadrato. La traduzione aritmetica è la seguente:

$$a(a+b) + b(a+b) = (a+b)^2 \quad \text{per la prop. 2}$$
$$(a+b)b = ab + b^2 \quad \text{per la prop. 3}$$

Ma, come s'è già detto, Euclide non utilizza la II, 1 per le dimostrazioni.

PROPOSIZIONE 4.

Se si divide a caso una linea retta, il quadrato di tutta la retta è uguale alla somma dei quadrati delle parti e del doppio del rettangolo compreso dalle parti [*stesse*] [a] [3].

Infatti, si divida a caso la linea retta AB in C. Dico che il quadrato di AB è uguale alla somma dei quadrati di AC, CB e del doppio del rettangolo compreso da AC, CB.

a. Letteralmente, piuttosto: « del rettangolo compreso due volte dalle parti », trattandosi qui di parti; se è il caso, trattandosi di lati, si dirà *due volte* dai lati (ed anche si dirà *quattro volte* dai lati), ed è formula generale.

[3] Questa proposizione esprime in forma geometrica la famosa « formula » del quadrato del binomio-somma:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2\,a\,b$$

La costruzione che viene eseguita si ricollega subito alla considerazione del caso particolare:

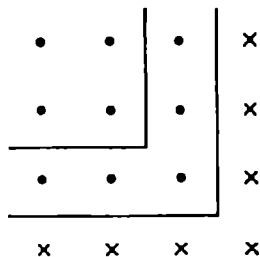
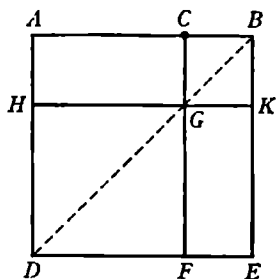
$$(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

che ci fornisce la legge di formazione dei successivi numeri quadrati: ciascun numero quadrato $(n + 1)^2$ si ottiene dal numero quadrato immediatamente precedente n^2 aggiungendo un numero dispari $(2n + 1)$ che va progressivamente crescendo secondo la serie: 1, 3, 5, 7, 9...

Così: $0 + 1 = 1 \quad 1 + 3 = 4 \quad 4 + 5 = 9 \quad 9 + 7 = 16$ ecc.

Geometricamente si passa da un quadrato al successivo mediante una « orlatura », cioè con l'aggiunta di una linea e di una colonna, nel modo indicato in figura. Ciò pare fosse noto ai Pitagorici, e si spiegherebbe così (nella lista delle dieci coppie di contrari riportata da Aristotele nella sua *Metafisica*) la corrispondenza tra *quadrato* e *dispari*, in opposizione alla corrispondenza tra *rettangolo* e *pari*.

E a detta legge di formazione dei numeri quadrati si riferisce Galileo nello stabilire le leggi di caduta dei gravi: gli spazi *complessivi* crescono in ragione dei quadrati dei tempi, mentre gli spazi descritti nelle successive unità di tempo crescono come la serie naturale dei numeri dispari (cfr. A. FRAJESE, *Galileo matematico*, Roma, ed. Studium, 1964, pp. 92 segg.).

Anche la dimostrazione di questa II, 4 ha carattere *visivo*. Ma Euclide dà ragione del « modo di presentarsi » della figura, e dimostra (fondandosi

Su *AB* difatti si descriva il quadrato *ADEB* (I, 46), si tracci la congiungente *BD*, per *C* si conduca *CF* parallela all'una o all'altra indifferentemente delle rette *AD*, *EB*, e per *G* si conduca *HK* parallela all'una o all'altra indifferentemente delle rette *AB*, *DE* (I, 31 e I, 30). Ora, poiché *CF* è parallela ad *AD*, e *BD* cade su esse, l'angolo esterno *CGB* è uguale all'angolo interno ed opposto (= corrispondente) *ADB* (I, 29). Ma l'angolo *ADB* è uguale all'angolo *ABD*, poiché anche il lato *BA* è uguale al lato *AD* (I, 5); pure l'angolo *CGB* è quindi uguale all'angolo *GBC* (noz. com. I), cosicché anche il lato *BC* è uguale al lato *CG* (I, 6); ma *CB* è uguale a *GK*, e *CG* è uguale a *KB* (I, 34), per cui *GK*, *KB* sono uguali (noz. com. I); quindi *CGKB* è equilatero. Dico adesso che ha anche gli angoli retti. Infatti, poiché

il lato *CG* è parallelo al lato *BK*, la somma degli angoli *KBC*, *GCB* è uguale a due retti (I, 29). Ma l'angolo *KBC* è retto; anche l'angolo *BCG* è perciò retto, cosicché pure gli angoli opposti *CGK*, *GKB* sono retti (I, 34). Quindi *CGKB* ha gli angoli retti; e fu dimostrato che è anche equilatero: esso è dunque un quadrato, ed è descritto su *CB*. Per la stessa ragione, pure *HF* è un quadrato; ed è descritto su *HG*, cioè *AC* (I, 34): i quadrati *HF*, *KC* sono quindi descritti su *AC*, *CB*. Ora, poiché *AG* è uguale a *GE* (I, 43), ed *AG* è

sulla teoria delle parallele, in particolare sul quinto postulato) che i parallelogrammi costruiti « intorno alla diagonale » di un quadrato sono quadrati essi stessi.

Quest'ultima proprietà viene anche utilizzata nel disegnare le figure relative a taluna delle proposizioni seguenti (ad es. nelle II, 5, 6, 7) e, come è stato già detto, costituisce l'unico legame esistente tra le prime dieci proposizioni del libro secondo, le quali altrimenti risultano completamente isolate tra loro. Tale isolamento, tuttavia, resta ancora in atto, poiché nelle proposizioni II, 5, 6, 7 non viene applicata la II, 4 in sé e per sé, ma soltanto (e tacitamente) un procedimento che serve a dimostrare la II, 4 stessa.

il rettangolo di *AC*, *CB* – difatti *GC* è uguale a *CB* –, anche *GE* è perciò uguale al rettangolo di *AC*, *CB*, e la somma di *AG*, *GE* è uguale al doppio del rettangolo di *AC*, *CB*. Ma i quadrati *HF*, *CK* sono anche i quadrati di *AC*, *CB*; quindi la somma delle quattro aree *HF*, *CK*, *AG*, *GE* è uguale alla somma dei quadrati di *AC*, *CB* e del doppio del rettangolo compreso da *AC*, *CB*. Ma la somma di *HF*, *CK*, *AG*, *GE* costituisce[a] tutto quanto *ADEB*, che è il quadrato di *AB*; il quadrato di *AB* è perciò uguale alla somma dei quadrati di *AC*, *CB* e del doppio del rettangolo compreso da *AC*, *CB*.

Dunque, se si divide a caso una linea retta... (secondo l'enunciato)[b]. – C.D.D.

APPLICA: I, 5, 6, 29, 30, 31, 34, 43, 46.

È APPLICATA IN: II, 12; IX, 15; X, 26, 36, 37, 38, 39, 41, 42, 44, 47, 60; XIII, 2 lemma.

a. Letteralmente: *HF*, *CK*, *AG*, *GE* sono, ecc.

b. Le edizioni del testo greco precedenti a quella di E. F. August (Berlino, 1826-29) portavano una seconda prova della proposizione, introdotta dal termine d'uso ἄλλως, ***altrimenti***, ***in altro modo***; Heiberg, come già August, omette tale dimostrazione, che è attribuita a Teone e che pone in Appendice, avvisando che poco differisce dalla genuina. Nel testo greco si ritroverebbe poi un πόρισμα, un corollario, che è di certo interpolato, come risulta da un frammento papiraceo, il n. XXIX dei papiri di Ossirinco, del III o IV sec. d. C. (cfr. HEIBERG, ***Paralipomena zu Euklid***, in Hermes, XXXVIII, 1903, p. 48), che non ha evidentemente questo corollario; unico corollario rinvenibile nel Libro II, Heiberg lo attribuisce a Teone, o persino a tempo più antico, e quanto alla nota di Proclo (p. 304, ed. Friedlein) che « il corollario posto nel II Libro appartiene ad un problema », mentre qui, a II, 4, abbiamo un teorema, ritiene che vada riferita piuttosto al corollario di IV, 15, con uno scambio possibile di lezione, cioè di δευτέρῳ (secondo) al posto di δ' (quarto).

PROPOSIZIONE 5.

Se si divide una retta in parti uguali e disuguali, il rettangolo compreso dalle parti disuguali della retta, insieme col quadrato della parte compresa fra i punti di divisione, è uguale al quadrato della metà della retta[4].

Infatti, si divida una retta AB in parti uguali in C ed in parti disuguali in D; dico che il rettangolo compreso

[4] È questa una tra le proposizioni più significative degli *Elementi*. Ne illustriamo qui di séguito i vari aspetti.

1) La II, 5 esprime anzitutto, in forma geometrica, una notissima « formula » di algebra elementare:

$$(a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2$$

Basta, per veder ciò, porre: $\overline{AC} = a$, $\overline{CD} = b$; sicché risulta:

$$\overline{AB} = a + b\ ; \quad \overline{DB} = a - b.$$

La proposizione II, 5 stabilisce che:

$$r\,(AD, DB) + q\,(CD) = q\,(AC)$$

dove con $r\,(AD, DB)$ indichiamo il rettangolo avente per dimensioni AD, DB, mentre con $q\,(CD)$ e $q\,(AC)$ indichiamo i quadrati aventi per lato rispettivamente CD e AC.

Passando dalle lunghezze alle aree, la relazione precedente diviene quella aritmetica:

$$(a + b)\ (a - b) + b^2 = a^2$$

cioè appunto quella:

$$(a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2.$$

2) La II, 5 può essere espressa anche in questo modo:

$$r\,(AD, DB) = q\,(AC) - q\,(CD)$$

e quindi risolve il problema della trasformazione di un rettangolo nella differenza di due quadrati: tappa necessaria (come s'è già detto) per la risoluzione del problema della quadratura del poligono, la quale viene poi completata nell'ultima proposizione (II, 14) di questo libro secondo.

3) La II, 5 contiene un importante risultato sui rettangoli isoperimetri. Infatti tutti i rettangoli come quello $r\,(AD, DB)$ hanno il segmento dato AB come semiperimetro, quindi hanno tutti uguale perimetro. Per raggiungere l'area del quadrato $q\,(AC)$ costruito sulla metà del segmento dato AB, i rettangoli $r\,(AD, DB)$ hanno bisogno dell'aggiunta di $q\,(CD)$, ossia del quadrato costruito *sulla differenza tra le due sezioni*. Quindi il massimo tra i rettangoli $r\,(AD, DB)$ è quello che non richiede detta aggiunta: e quest'ultima, che è $q\,(CD)$, si riduce appunto a zero quando D coincide con C. Il massimo fra tutti i rettangoli $r\,(AD, DB)$ è dunque quello $r\,(AC, CB)$ ottenuto facendo coincidere D con C. Ma $AC = CB$,

da AD, DB, insieme col quadrato di CD, è uguale al quadrato di CB.

Su CB difatti si descriva il quadrato $CEFB$ (I, 46), si tracci la congiungente BE, per D si conduca DG parallela

quindi $r(AC, CB) = q(AC)$. Si conclude che tra tutti i rettangoli isoperimetri il massimo è il quadrato.

4) Ma la II, 5 assume il significato forse più importante se viene messa in relazione con i cosiddetti problemi di applicazione delle aree. Sono, questi, problemi caratteristici della matematica greca, l'origine dei quali sembra dovuta ai più antichi Pitagorici, e si riconnette forse ad alcuni problemi pratici delle matematiche pre-elleniche. Essi sono problemi che vengono risolti dai Greci in forma geometrica, ma son gli stessi che noi risolviamo per mezzo delle equazioni di primo e di secondo grado.

Si hanno tre specie di applicazione delle aree, e precisamente l'applicazione parabolica, quella ellittica, quella iperbolica. Come s'è veduto, l'applicazione parabolica corrisponde alle equazioni di primo grado, mentre l'applicazione ellittica e quella iperbolica corrispondono ad equazioni di secondo grado.

In che consista l'applicazione parabolica delle aree s'è già veduto nel libro primo (I, 44), nel quale detto problema viene risolto. Si tratta di costruire un rettangolo di data area, del quale sia data pure una delle dimensioni. L'incognita è dunque l'altra dimensione. Il problema si traduce per noi nell'equazione:

$$a x = S$$

S x a

dove a è la base del rettangolo di area S, mentre x ne è l'altezza da determinare.

Se poi indichiamo l'area data S per mezzo del prodotto bc delle lunghezze di due segmenti dati b, c, il problema diviene:

$$a x = b c$$

ed equivale al tipico problema di primo grado:

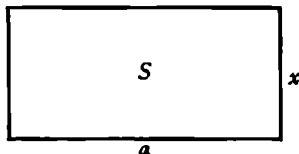
$$a : b = c : x$$

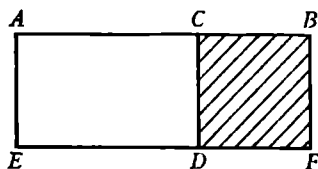
consistente nella costruzione del quarto proporzionale dopo tre segmenti dati (essendo il rettangolo dei medi *uguale* al rettangolo degli estremi).

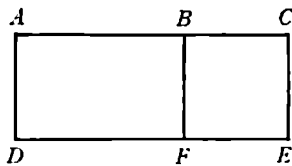
Ma se, anziché dare una dimensione del rettangolo di area data da costruire, si dà una relazione di primo grado tra le due dimensioni, il problema diventa di secondo grado. E precisamente si ha l'applicazione *ellittica* se delle due dimensioni è data la *somma*, mentre si ha l'applicazione *iperbolica* se delle due dimensioni è data la differenza.

Dal punto di vista aritmetico, si tratta di determinare due numeri, essendo dato il loro prodotto ed uno di essi (applicazione parabolica), oppure essendone dati il prodotto e la somma (applicazione ellittica), oppure essendone dati il prodotto e la differenza (applicazione iperbolica).

Euclide generalizza i problemi (come s'è visto per l'applicazione parabolica nel libro primo) richiedendo, anziché la costruzione di un rettan-

all'una o all'altra indifferentemente delle rette *AB*, *EF*, per *H* si conduca ancora *KM* parallela all'una o all'altra indifferentemente delle rette *AB*, *EF*, e di nuovo, per *A*, si conduca *AK* parallela all'una o all'altra indifferentemente delle rette *CL*, *BM* (I, 31 e I, 30). E poiché il complemento *CH*

golo, quella di un parallelogrammo avente angoli dati. Ciò fa anche per le applicazioni ellittica e iperbolica, che vengono risolte nel libro VI degli *Elementi*, utilizzando la teoria delle proporzioni. Nel libro II, tuttavia, c'è una specie di anticipazione relativa al rettangolo (indipendentemente dalle proporzioni) nella proposizione quinta per l'applicazione ellittica, nella sesta per l'applicazione iperbolica, come ora vedremo.

Nell'applicazione ellittica, oltre all'area del rettangolo da costruire, è dato dunque il segmento *AB*, che deve essere la somma della base e dell'altezza del rettangolo stesso. Sicché se una parte di *AB* (poniamo *AC*) si assume come base del rettangolo, la parte restante (cioè *CB*) è l'altezza. Si costruisce, cioè, il rettangolo *ACDE* assumendo *CD* = *CB*. Segue che la parte tratteggiata *CBFD* è un quadrato. Si suol anche dire che il rettangolo *ACDE* è *mancante* (rispetto al rettangolo *totale ABFE*) di un quadrato. Si *applica*, cioè, su *AB* un rettangolo avente per base una parte di *AB* e *mancante*, *deficiente*, di un quadrato. E siccome il termine greco per *mancanza*, *deficienza*, *difetto*, è ἔλλειψις (*èlleipsis*), l'applicazione in questione è chiamata applicazione *ellittica*, che val quanto dire *applicazione per difetto*.

L'applicazione iperbolica è, invece, un'applicazione per eccesso: il termine greco ὑπερβολή (*yperbolè*) significa appunto *eccesso*.

Questa volta il segmento dato *AB* deve essere la differenza tra base ed altezza del rettangolo da costruire. Quindi se detto rettangolo è *ACED*, la *linea aggiunta BC* deve essere uguale all'altezza *CE* del rettangolo. Il rettangolo così costruito *ACED* è dunque, rispetto al rettangolo *ABFD* costruito sul segmento dato *AB*, *in eccesso*, e l'*eccesso* è costituito dal quadrato *BCEF*.

La denominazione *applicazione parabolica*, invece, val quanto dire semplice *applicazione*, o applicazione propriamente detta; infatti il termine greco παραβολή (*parabolè*) significa appunto « applicazione ».

Va finalmente accennato al fatto che i nomi delle tre curve (sezioni coniche) ellisse, parabola, iperbole, furono introdotti più tardi dal grande geometra Apollonio (secolo III a. C.), nel suo trattato sulle sezioni coniche, prendendo a prestito i termini relativi da quelli, più antichi, dell'applicazione delle aree. Apollonio trovò infatti che ciascuna delle tre specie

è uguale al complemento *HF* (I, 43), si aggiunga in comune [ai due] *DM*; tutto quanto *CM* è quindi uguale a tutto quanto *DF*. Ma *CM* è uguale ad *AL*, poiché pure *AC* è uguale a *CB* (I, 36); anche *AL*, *DF* sono perciò uguali (noz.

di coniche è in relazione con una delle tre specie di applicazione delle aree: diede quindi alle tre coniche i nomi delle tre «applicazioni».

Mostriamo ora in qual senso la II, 5, della quale ci stiamo occupando, si riferisce anche al problema dell'applicazione delle aree.

La relazione è costituita dal fatto che il *teorema* II, 5 può essere appunto utilizzato per risolvere il problema dell'applicazione ellittica.

Dato il segmento *AB* che deve essere la somma delle due dimensioni del rettangolo da costruire, e data l'area di detto rettangolo, supponiamo che sia *ADHK* il rettangolo che risolve il problema. Naturalmente deve essere: $DH = DB$. Ora il teorema II, 5 ci dice che è:

$$r\,(AD \cdot DB) + q\,(CD) = q\,(CB)$$

dove C è il punto medio di AB.

Se, per individuare la posizione del punto-chiave D, indichiamo con x la lunghezza del segmento DB, e con a la lunghezza dell'intero segmento AB, abbiamo, sempre per le lunghezze:

$$AC = \frac{a}{2}\,; \quad AD = a - x\,; \quad CD = \frac{a}{2} - x$$

sicché il teorema II, 5 afferma che è:

$$(a - x)\,x + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

(relazione della quale si può immediatamente verificare la validità). Ma, siccome l'area del rettangolo *ADHK* è data (sia per es. espressa da c) porremo

$$(a - x)\,x = c$$

e la relazione precedente diviene:

$$c + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

ossia:

$$\left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - c$$

Ma c è dato, e così è dato a, quindi anche $\frac{a}{2}$: il problema si è dunque ridotto a costruire un quadrato $\left(\text{il quadrato di } \frac{a}{2} - x\right)$ di area data $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - c$.

Dal punto di vista aritmetico, basterà, per trovare la lunghezza del lato di detto quadrato, estrarre la radice quadrata del numero $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - c$ cioè:

$$\frac{a}{2} - x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - c}$$

com. I). Si aggiunga in comune ai due *CH*; quindi tutto quanto *AH* è uguale al gnomone *NOP*. Ma *AH* è il rettangolo di *AD*, *DB* – difatti *DH* è uguale a *DB* –; anche il gnomone *NOP* è perciò uguale al rettangolo di *AD*, *DB* (noz. com. I). Si aggiunga in comune ai due *LG*, che è uguale al quadrato di *CD*; quindi la somma del gnomone *NOP* e di *LG* è uguale alla somma del rettangolo compreso da *AD*, *DB* e del quadrato di *CD* (noz. com. II). Ma la somma del gnomone *NOP* e di *LG* costituisce tutto quanto il quadrato *CEFB*, che è descritto su *CB*; il rettangolo compreso da *AD*, *DB*, insieme col quadrato di *CD*, è perciò uguale al quadrato di *CB*.

Dunque, se si divide una retta in parti uguali e disuguali... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 30, 31, 36, 43, 46.

È APPLICATA IN: II, 14; III, 35; X, 17, 41 lemma, 59 lemma.

PROPOSIZIONE 6.

Se si divide per metà una linea retta, ed un'altra le è aggiunta per diritto, il rettangolo compreso da tutta la [prima] retta più[a] *quella aggiunta e dalla retta aggiunta, insieme col*

a. Letteralmente: con.

da cui:

$$x = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - c}$$

Abbiamo supposto che x fosse minore di $b - x$, ossia che il punto *C* fosse compreso tra *A* e *D*. Supponendo invece *D* intermedio tra *A* e *C* si troverebbe l'espressione di x corrispondente al segno positivo davanti al radicale. Concludiamo che il teorema II, 5 permette di risolvere il problema dell'applicazione ellittica, con un procedimento perfettamente corrispondente a quello che conduce alla nostra formula risolutiva delle equazioni di secondo grado. Ed una tale soluzione, in termini numerici, ritroviamo appunto in Leonardo Pisano, detto il Fibonacci (inizio del secolo XIII): cfr. nota alla prop. II, 6.

quadrato della metà [della prima], è uguale al quadrato della retta composta dalla metà [della prima] e dalla retta aggiunta [5].

Infatti, si divida per metà una retta AB nel punto C, ed un'altra retta BD sia aggiunta per diritto ad essa; dico che il rettangolo compreso da AD, DB, insieme col quadrato di CB, è uguale al quadrato di CD.

Su CD difatti si descriva il quadrato $CEFD$ (I, 46), si tracci la congiungente DE, per il punto B si conduca BG

[5] Questa proposizione II, 6, dello stesso carattere della precedente, si riferisce all'applicazione iperbolica delle aree.

Mentre nella II, 5 il punto D si trova nell'interno del segmento AB, in questa II, 6 esso si trova sul prolungamento di AB, sicché si ha una *retta aggiunta* BD. L'enunciato della II, 6 è contenuto nella seguente relazione:

$$r\,(AD \cdot BD) + q\,(CB) = q\,(CD)$$

La sua traduzione aritmetica, se si indicano le lunghezze di AB con a e di BD con x, è:

$$(a + x)\,x + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2$$

formula di immediata verifica.

L'equazione di secondo grado

$$(a + x)\,x = S$$

trova quindi la soluzione data dalla relazione:

$$S + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2$$

da cui, estraendo la radice quadrata:

$$x = \sqrt{S + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}$$

Questo metodo viene appunto seguito da Leonardo Pisano, detto il Fibonacci (inizio del secolo XIII) per risolvere l'equazione:

$$x^2 + 4x = 140$$

(*embadum et quatuor eius latera faciunt* 140)

Leonardo Pisano si serve, invece, della precedente II, 5 per risolvere l'equazione:

$$4\,x - x^2 = 3.$$

Nelle matematiche pre-elleniche non vengono utilizzate le proprietà espresse dalla II, 5 e dalla II, 6: bensì quella espressa dalla II, 8 (vedi nota a detta proposizione).

La II, 5 e la II, 6 rappresentano per noi una unica proposizione: il punto D si trova all'interno del segmento AB nella II, 5 e all'esterno di

parallela all'una o all'altra indifferentemente delle rette *EC*, *DF*, si conduca *KM* per il punto *H* parallela all'una o all'altra indifferentemente delle rette *AB*, *EF*, ed infine per *A* si conduca *AK* parallela all'una o all'altra indifferentemente delle rette *CL*, *DM* (I, 31 e I, 30).

Poiché dunque *AC* è uguale a *CB*, pure *AL* è uguale a *CH* (I, 36). Ma *CH* è uguale a *HF* (I, 43). Quindi anche *AL*, *HF* sono uguali (noz. com. I). Si aggiunga in comune ai due *CM*, per cui tutto quanto *AM* è uguale al gnomone *NOP*. Ma *AM* è il rettangolo di *AD*, *DB* – difatti *DM* è uguale a *DB* –; anche il gnomone *NOP* è perciò uguale al rettangolo di *AD*, *DB*. Si aggiunga in comune ai due *LG*, che è uguale al quadrato di *BC*; quindi il rettangolo compreso da *AD*, *DB*, insieme col quadrato di *CB*, è uguale alla somma del gnomone *NOP* e di *LG* (noz. com. II). Ma la somma del gnomone *NOP* e di *LG* costituisce tutto quanto il quadrato *CEFD*, che è descritto su *CD*; il rettangolo compreso da *AD*, *DB*, insieme col quadrato di *CB*, è perciò uguale al quadrato di *CD*.

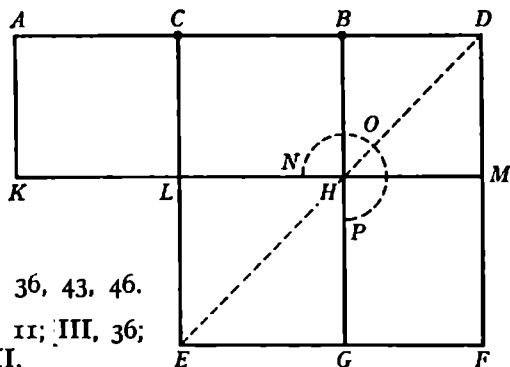
esso (sul suo prolungamento) nella II, 6. Sicché basta cambiar di segno alla x nella *traduzione* aritmetica per passare dall'uno all'altro caso:

$$x(a-x)+\left(\frac{a}{2}-x\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2 \qquad \text{(II, 5)}$$

$$-x(a+x)+\left(\frac{a}{2}+x\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$x(a+x)+\left(\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}+x\right)^2 \qquad \text{(II, 6)}$$

Il passaggio dall'uno all'altro caso si compie facendo coincidere D con l'estremo destro B del segmento dato: in questo caso è $x = 0$, e quindi il rettangolo delle parti disuguali si riduce pure a zero, e si ha l'identità $\left(\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$. Ma un tale ordine di considerazioni (che sono in relazione con un principio di continuità) sono estranee alla mente di Euclide: ciò che noi esprimiamo col doppio segno *più o meno* si divide per Euclide in due casi completamente diversi tra loro. L'esempio più chiaro si ha nel libro decimo, dove la trattazione è addirittura raddoppiata, in relazione a ciascuno dei due segni. Così pure Euclide evita sempre quel tal *passaggio intermedio*, corrispondente all'annullamento di grandezze in gioco.

Dunque, se si divide per metà una linea retta... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 30, 31, 36, 43, 46.

È APPLICATA IN: II, 11; III, 36; X, 28, lemmi I e II.

PROPOSIZIONE 7.

Se si divide a caso una linea retta, il quadrato di tutta la retta e quello di una delle parti, presi ambedue insieme [a], *sono uguali al doppio del rettangolo compreso da tutta la retta e dalla detta parte, insieme col quadrato della parte rimanente* [6].

a. Manteniamo, per quanto è possibile, fedeltà al testo greco.

[6] Mentre la II, 4 ci dà, in veste geometrica, la formula del quadrato del binomio-somma, questa II, 7 ci dà invece la formula del quadrato del binomio-differenza:

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b$$

sotto la forma:

$$a^2 + b^2 = 2\,a\,b + (a - b)^2$$

Geometricamente:

$$q\,(AB) + q\,(CB) = 2\,r\,(AB \cdot CB) + q\,(AC)$$

La dimostrazione ha, come le precedenti, carattere visivo: si ricava cioè dal semplice esame della figura.

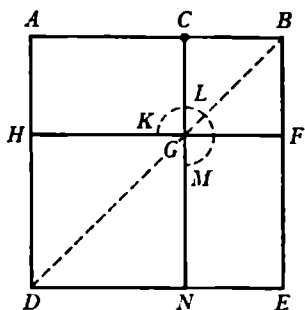
In sostanza la dimostrazione scaturisce dall'osservazione che il quadrato $ABED$, cioè $q\,(AB)$, si scompone nel quadrato $DK = q\,(AC)$, nel rettangolo $AF = r\,(AB \cdot CB)$ e nel rettangolo GE:

$$q\,(AB) = q\,(AC) + r\,(AB \cdot CB) + GE$$

Perché quest'ultimo rettangolo GE divenga uguale al precedente $r\,(AB \cdot CB)$, cioè uguale al rettangolo CE, occorre aggiungere ad esso il quadrato CF, ossia $q\,(CB)$. Aggiungendo appunto $q\,(CB)$ ad ambedue i membri della precedente uguaglianza si ottiene dunque ciò che si voleva dimostrare:

$$q\,(AB) + q\,(CB) = q\,(AC) + 2\,r\,(AB \cdot CB)$$

Infatti, si divida a caso una retta *AB* nel punto *C*; dico che la somma dei quadrati di *AB*, *BC* è uguale al doppio del rettangolo compreso da *AB*, *BC* insieme col quadrato di *CA*. Su *AB* difatti si descriva il quadrato *ADEB* (I, 46), e si tracci la figura[a].

Poiché dunque *AG* è uguale a *GE* (I, 43), si aggiunga *CF* in comune [ai due parallelogrammi]; tutto quanto *AF* è quindi uguale a tutto quanto *CE* (noz. com. II), per cui la somma di *AF*, *CE* è il doppio di *AF*[b]. Ma la somma di *AF*, *CE* è pure la somma del gnomone *KLM* e del quadrato *CF*; quindi la somma del gnomone *KLM* e del quadrato *CF* costituisce il doppio di *AF* (noz. com. I). Ma anche il doppio del rettangolo di *AB*, *BC* è il doppio di *AF* – difatti *BF* è uguale a *BC* –; la somma del gnomone *KLM* e del quadrato *CF* è perciò uguale al doppio del rettangolo di *AB*, *BC*. Si aggiunga in comune alle due somme *DG*, che è il quadrato di *AC*; la somma del gnomone *KLM* e dei quadrati *BG*, *GD* è quindi uguale alla somma del doppio del rettangolo compreso da *AB*, *BC* e del quadrato di *AC*. Ma la somma del gnomone *KLM* e dei quadrati *BG*, *GD* è la somma di tutto quanto *ADEB* e di *CF*, che sono rispettivamente i quadrati di *AB*, *BC*; perciò la somma dei quadrati di *AB*, *BC* è uguale al doppio del rettangolo compreso da *AB*, *BC* insieme col quadrato di *AC*.

Dunque, se si divide a caso una linea retta... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 30, 31, 34, 43, 46.

È APPLICATA IN: II, 13; X, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 80, 81, 84, 97, 98, 99, 100, 101, 102.

a. Vale a dire, come nota Heiberg, quella stessa usata nelle precedenti proposizioni, in modo da condurre la diagonale *BD* e per *C* la parallela *CN* alle rette *AD*, *BE*, per *G* la parallela *HF* alle rette *AB*, *DE*.

b. Letteralmente: *AF*, *CE* sono due volte *AF*.

PROPOSIZIONE 8.

Se si divide a caso una linea retta, il quadruplo del rettangolo compreso da tutta la retta e da una delle parti, insieme col quadrato della parte rimanente, è uguale al quadrato descritto, come su una sola linea retta, sulla somma di tutta la retta iniziale e della detta parte [7].

[7] Questa proposizione II, 8 collega insieme la II, 4 e la II, 7, cioè combina tra loro le due formule dei quadrati del binomio-somma e del binomio-differenza:

$$4\,a\,b + (a - b)^2 = (a + b)^2$$

Geometricamente, passando dalle lunghezze ai segmenti:

$$4\,r\,(AB \cdot CB) + q\,(AC) = q\,(AD)$$

$$(AB = a \;;\; CB = BD = b \;;\; AC = a - b \;;\; AD = a + b)$$

Come è stato già avvertito, nelle matematiche preelleniche troviamo applicata questa proprietà per risolvere equazioni di secondo grado, le quali si presentano similmente ai problemi di applicazione delle aree: si cercano cioè due numeri essendo dati il loro prodotto e la loro somma (o la loro differenza).

D'altra parte, la II, 8 non viene più applicata nel séguito degli *Elementi*. Per quanto essa venga applicata in altra opera di Euclide stesso (*Data*, 86) essa è una proposizione *inutile* nell'economia generale degli *Elementi*.

Sembra però troppo arrischiato il pensare che Euclide l'abbia inserita nel libro II e causa di un suo valore storico: piuttosto potrebbe formularsi la congettura che la proprietà espressa dalla II, 8 venisse adoperata comunemente anche ai tempi di Euclide, accanto ai metodi suggeriti dalle II, 5, 6, per risolvere problemi di secondo grado.

Fatto sta che nella matematica babilonese (epoca della dinastia degli Hammurabi, all'incirca 1700 anni avanti Cristo) troviamo applicato il seguente metodo (cfr. O. NEUGEBAUER, *The exact sciences in antiquity*, Princeton, New Jersey, 1952, pp. 28 segg.; B. L. VAN DER WAERDEN, *Science awakening, Egyptian, Babylonian and Greek Mathematics*, Groningen, 1954, pp. 62 segg.: o anche A. FRAJESE, *Attraverso la storia della matematica*, Roma, Veschi, 1962, pp. 163 segg.; II ediz., Firenze, Le Monnier, 1969).

Si parte dal problema: Trovare due numeri, dati il loro prodotto e la loro somma (o la loro differenza). In simboli nostri:

$$\begin{cases} x + y = s \\ x\,y = p \end{cases}$$

Si eleva al quadrato la somma $x + y$ e da essa si sottrae il quadruplo del prodotto xy:

$$(x + y)^2 - 4xy = s^2 - 4p$$

In base alla proprietà di cui tratta la II, 8 degli *Elementi*, si ottiene così il quadrato del binomio-differenza, sicché:

$$s^2 - 4p = (x - y)^2$$

Infatti, si divida a caso una retta AB nel punto C; dico che il quadruplo del rettangolo compreso da AB, BC, insieme col quadrato di AC, è uguale al quadrato descritto, come su una sola linea retta, sulla somma di AB, BC.

Si prolunghi difatti la retta AB oltre B, sul prolungamento si ponga BD[a] uguale a CB (I, 3 o post. III), su AD si descriva il quadrato $AEFD$ (I, 46), e si tracci – doppia – la figura (I, 31 e I, 30).

Poiché dunque CB è uguale a BD, ma CB è uguale a GK e BD uguale a KN (I, 34), anche GK, KN sono uguali

a. Letteralmente: « risulti infatti prolungata BD per diritto rispetto alla retta AB », al solito.

da cui:

$$x - y = \sqrt{s^2 - 4p}$$

La II, 8 permette dunque di trasformare un sistema somma-prodotto (o anche differenza-prodotto), in un sistema somma-differenza, che è di primo grado:

$$\begin{cases} x + y = s \\ x - y = \sqrt{s^2 - 4p} \end{cases}$$

E questo sistema viene poi risolto presso i Babilonesi per somma e differenza:

$$x = \frac{1}{2}\left(s + \sqrt{s^2 - 4p}\right)$$

$$y = \frac{1}{2}\left(s - \sqrt{s^2 - 4p}\right)$$

Si tratta dunque ancora della nostra formula risolutiva delle equazioni di secondo grado.

Va finalmente osservato che la II, 8, se pure si presenti sotto veste geometrica differente, è strettamente collegata, sotto l'aspetto aritmetico. alla II, 5 e alla II, 6. Ad esempio, nella relazione:

$$(a + x)\,x + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2$$

basta porre:

$$a + x = 2p \;;\; x = 2q$$

perché si abbia:

$$a = 2p - 2q = 2\,(p - q) \;;\; \frac{a}{2} + x = p - q + 2q = p + q$$

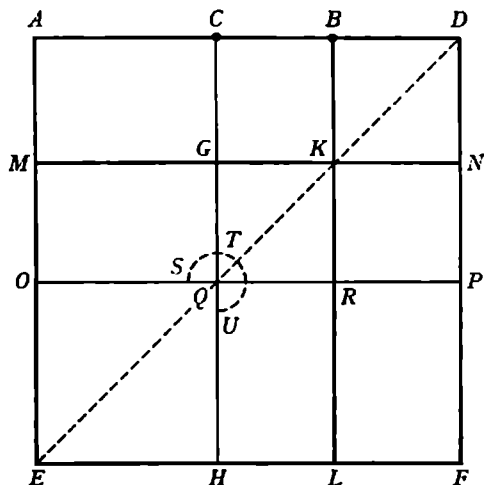
sicché la relazione della II, 5 e della II, 6 si trasforma in:

$$4pq + (p - q)^2 = (p + q)^2$$

cioè proprio nella relazione della II, 8.

(noz. com. I). Per la stessa ragione, pure *QR* è uguale a *RP*. Ora, poiché *BC* è uguale a *BD*, e *GK* a *KN*, anche *CK* è uguale a *KD*, e *GR* è uguale a *RN* (I, 36). Ma *CK* è uguale a *RN* – difatti essi sono complementi del parallelogrammo *CP* (I, 43) –; quindi anche *KD*, *GR* sono uguali, per cui i quattro parallelogrammi[a] *DK*, *CK*, *GR*, *RN* sono uguali fra loro. Dunque la somma dei quattro parallelogrammi è il quadruplo di *CK*. Di nuovo, poiché *CB* è uguale a *BD*, ma *BD* è uguale a *BK*, cioè a *CG*, e *CB* è uguale a *GK*, cioè a *GQ*, si ha che pure *CG*, *GK* sono uguali. E poiché *CG* è uguale a *GQ*, e *QR* è uguale a *RP*, sono anche uguali *AG* a *MQ*, e *QL* a *RF* (I, 36). Ma *MQ* è uguale a *QL* – essi sono difatti complementi del parallelogrammo *ML* (I, 43) –; quindi anche *AG*, *RF* sono uguali; i quattro parallelogrammi *AG*, *MQ*, *QL*, *RF* sono così uguali fra loro. Dunque la somma dei quattro parallelogrammi è il quadruplo di *AG*. Ma fu dimostrato che la somma dei quattro parallelogrammi *CK*, *KD*, *GR*, *RN* è il quadruplo di *CK*, per cui la somma degli otto parallelogrammi, che comprendono il gnomone *STU*, è il quadruplo di *AK*. Ora, poiché *AK* è il rettangolo di *AB*, *BD* – è difatti *BK* uguale a *BD* –, il quadruplo del rettangolo di *AB*, *BD* è [anche] il quadruplo di *AK*. Ma fu dimostrato che pure il gnomone *STU* è il quadruplo di *AK*; perciò il quadruplo del rettangolo di *AB*, *BD* è uguale al gnomone *STU* (noz. com. I). Si aggiunga in comune [ai due termini] *OH*, che è uguale al quadrato di *AC*; il quadruplo del rettangolo compreso da *AB*, *BD*, insieme col quadrato di *AC*, è quindi uguale alla somma del gnomone *STU* e di *OH* (noz. com. II). Ma la somma del gnomone *STU* e di *OH* costituisce tutto quanto il quadrato *AEFD*, che è descritto su *AD*, per cui il quadruplo del rettangolo di *AB*, *BD*, insieme col quadrato di *AC*, è uguale al quadrato di *AD*. Ma *BD* è uguale a *BC*; il quadruplo del rettangolo compreso da *AB*, *BC*, insieme col quadrato di *AC*, è quindi

a. Letteralmente: le quattro aree.

uguale al quadrato di AD, cioè al quadrato descritto sulla somma di AB e BC come su una sola linea retta.

Dunque, se si divide a caso una linea retta... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 30, 31, 34, 36, 43, 46.

PROPOSIZIONE 9.

Se si divide una linea retta in parti uguali e disuguali, la somma dei quadrati delle parti disuguali è il doppio della somma del quadrato della metà della retta e del quadrato della parte compresa fra i punti di divisione[8].

[8] Come osservò lo Zeuthen, questa proposizione (con la seguente II, 10- esprime in forma geometrica il procedimento che i matematici greci segui) rono per calcolare valori che progressivamente sempre meglio approssimano la radice quadrata di 2.

Con opportuni complementi, presenteremo la questione nel modo seguente.

Non è possibile esprimere esattamente la radice quadrata di 2 mediante un numero razionale m/n, vale a dire che è impossibile trovare due numeri interi m, n tali che si abbia:

$$\frac{m^2}{n^2} = 2$$

ossia:

$$m^2 = 2n^2$$

cioè il doppio di un numero quadrato ($2n^2$) non può essere un numero quadrato m^2 (ciò che è alla radice della incommensurabilità tra il lato e la diagonale di un quadrato).

Sorge allora l'idea, per trovare valori approssimati della radice quadrata di 2, di cercare due numeri interi m, n tali che con essi ci si avvicini

Infatti, si divida una retta AB in parti uguali in C, ed in parti disuguali in D; dico che la somma dei quadrati di AD, DB è il doppio della somma dei quadrati di AC, CD.

quanto possibile alla relazione $m^2 = 2n^2$ e precisamente tali che per essi valga una delle due relazioni: $m^2 = 2n^2 \pm 1$.

Corrispondentemente si avranno valori approssimati della radice quadrata di 2 sotto la forma m/n: valori approssimati per eccesso se davanti all'unità c'è il segno $+$, per difetto se c'è il segno $-$.

Risulta inoltre che i valori saranno tanto meglio approssimati quanto più grandi saranno i numeri m, n soddisfacenti alle relazioni sopra scritte: si tratta quindi di imparare a ricavare valori *più grandi* di m, n partendo da valori più *piccoli*. Partiamo allora dai valori $m = 1$, $n = 1$. Essi soddisfano alla relazione $m^2 = 2n^2 - 1$; infatti: $1^2 = 2 \cdot 1^2 - 1$ vale a dire il quadrato di $m = 1$ differisce soltanto per una unità dal doppio del quadrato di $n = 1$. Possiamo perciò dire che un valore approssimato *per difetto* della radice quadrata di 2 è dato da:

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{1} = 1$$

Facciamo ora crescere il valore del numero intero n: per esempio poniamo $n = 2$. Il suo quadrato è 4, il cui doppio è 8. Ebbene: il numero 3 ha il quadrato 9, che differisce soltanto di 1 dal doppio 8, cioè:

$$9 = 2 \cdot 4 + 1$$

Quindi per $n = 2$ deve prendersi $m = 3$, e la frazione $3/2$ ci offre un nuovo valore approssimato (questa volta per eccesso) della radice quadrata di 2: valore evidentemente meglio approssimato del precedente.

Proseguiamo ora con $n = 3$. Il quadrato è 9, il cui doppio è 18. Non c'è un quadrato che differisca da 18 soltanto di una unità: il numero quadrato più vicino (che è 16) ne differisce per 2 unità.

Proviamo allora con $n = 4$. Nulla da fare neppure questa volta. Infatti: $4^2 = 16$; $16 \cdot 2 = 32$. Il quadrato più vicino è 36, che differisce da 32 di ben 4 unità! Le cose vanno bene, invece, per $n = 5$.

Infatti: $5^2 = 25$; $25 \cdot 2 = 50$ e c'è 49, quadrato di 7, che differisce da 50 di una sola unità: $7^2 = 2 \cdot 5^2 - 1$.

Perciò per $n = 5$ si avrà: $m = 7$ e la frazione $7/5$ rappresenta un valore approssimato (questa volta per difetto) della radice quadrata di 2, e meglio approssimato del precedente $3/2$.

Per continuare in modo più rapido, scriviamo in una prima riga i successivi valori di m (cioè del numeratore della frazione approssimante) ed in una seconda riga i corrispondenti valori di n (cioè del denominatore della frazione stessa), così:

m)	1	3	7
n)	1	2	5

Continuando nei tentativi, si vede che per trovare nuovi valori di m, n soddisfacenti alla relazione che c'interessa, si deve giungere fino a $n = 12$. E si ha:

$$12^2 = 144 \qquad 144 \cdot 2 = 288 \qquad 17^2 = 289$$

Si innalzi difatti la perpendicolare ad AB dal punto C [di questa] (I, 11), su essa si ponga CE uguale a ciascuna delle due rette AC, CB (I, 3 o post. III), e si traccino le

ossia:

$$17^2 = 2 \cdot 12^2 + 1$$

Quindi la frazione 17/12 ci offre un valore meglio approssimato dei precedenti: questa volta per eccesso (i valori approssimati per difetto e per eccesso si vanno alternando).

Se ora osserviamo lo schema:

m)	1	3	7	17
n)	1	2	5	12

possiamo trovare facilmente una semplice regola per passare da una frazione alla successiva. Si vede sùbito, infatti, che i valori di n si ottengono addizionando i due valori precedenti di m, n:

$$2 = 1 + 1 \qquad 5 = 3 + 2 \qquad 12 = 7 + 5$$

I valori di m, invece, si ottengono addizionando il precedente valore di m col doppio del precedente valore di n:

$$3 = 1 + 2 \qquad 7 = 3 + 4 \qquad 17 = 7 + 10$$

Si è condotti così a trovare valori M, N successivi di m, n applicando le stesse regole:

$$N = m + n \qquad M = m + 2n$$

m)	1	3	7	17	41	99	. . . . .
n)	1	2	5	12	29	70	. . . . .

$(17 + 12 = 29 \; ; \; 17 + 24 = 41 \; ; \; 41 + 29 = 70 \; ; \; 41 + 58 = 99 ...)$

Ad esempio, la frazione $\frac{99}{70}$ ci dà un valore ottimamente approssimato di $\sqrt{2}$, come si vede scrivendo la frazione stessa sotto forma decimale: 1,4142... E si può continuare quanto si vuole nel semplice calcolo di nuovi valori di m, n!

Questa determinazione di valori approssimati della radice quadrata di 2 è stata quasi certamente determinata in modo empirico come noi abbiamo esposto: ha lasciato traccia in Teone Smirneo (*Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon*, trad. francese di J. Dupuis, Parigi, Hachette, 1892, pp. 70-75), e in Proclo (nel Commento alla *Repubblica* di Platone). Teone Smirneo chiama numeri laterali quelli della seconda riga, numeri diagonali quelli della prima riga: infatti se i numeri della seconda riga indicano la lunghezza del lato di un quadrato, i numeri della prima riga dànno valori approssimati della lunghezza della diagonale: la *diagonale razionale* alla quale accenna Platone nel famoso brano del *numero nuziale* (*Repubblica*, 546 *b-d*: cfr. A. Frajese, *Platone e la matematica nel mondo antico*, Roma, 1963, Ed. Studium, pp. 145-150).

Ma la *traccia* che maggiormente qui c'interessa è quella lasciata da

congiungenti EA, EB, per D si conduca DF parallela ad EC, per F si conduca FG parallela ad AB (I, 31), e si tracci [infine] la congiungente AF. Ora, poiché AC è uguale a CE, anche l'angolo EAC è uguale all'angolo AEC (I, 5). E poiché l'angolo in C è retto, la somma degli angoli rimanenti EAC, AEC è uguale ad un retto (I, 32); ed essi sono uguali, cosicché ciascuno dei due angoli CEA, CAE è metà di un retto. Per la stessa ragione, pure ciascuno dei due angoli CEB, EBC è metà di un retto; quindi tutto quanto l'an-

Euclide, appunto nelle proposizioni II, 9 e II, 10 delle quali ci stiamo occupando.

Che cosa dice, in sostanza, la II, 9? Essa si riferisce a quattro segmenti di lunghezza m, M, n, N (dei quali $m < M$, $n < N$) scelti in modo che tra essi valga la relazione:

$$M^2 - 2N^2 = 2n^2 - m^2$$

ricavata da quelle utilizzate per trovare valori approssimati di $\sqrt{2}$:

$$2n^2 - m^2 = -1 \qquad 2N^2 - M^2 = +1$$

Vale cioè la relazione:

$$M^2 + m^2 = 2N^2 + 2n^2 = 2\ (N^2 + n^2)$$

E infatti nella II, 9 si parla dei quadrati di due segmenti M, m, i quali quadrati uguagliano il doppio della somma dei quadrati di altri due segmenti. Se come segmenti M, m prendiamo due segmenti consecutivi AD, DB, la somma dei loro quadrati si ottiene sùbito applicando il teorema di Pitagora, cioè staccando $DF = DB$ sulla perpendicolare DF ad AB: l'angolo $\alpha = D\widehat{B}F$ risulta allora metà di un retto (45°). L'ipotenusa AF del triangolo rettangolo AFD ci dà così il segmento, il quadrato del quale ha l'area $M^2 + m^2$. Se ora detta ipotenusa AF deve essere somma dei doppi di due quadrati ($2N^2 + 2n^2$), dobbiamo fare in modo che essa sia ipotenusa anche di un altro triangolo rettangolo, i cateti del quale siano a loro volta ipotenuse di triangoli rettangoli isosceli di cateti N, n, sicché i loro quadrati abbiano le aree rispettive $2N^2$, $2n^2$. Per far ciò basta tracciare AE in modo che $E\widehat{A}B = \beta$ sia uguale ad α: l'angolo AEF risulta così retto. E i due cateti AF, FE di tale nuovo triangolo rettangolo soddisfano alla condizione voluta: si abbassi infatti da E la perpendicolare EC su AB (quindi C è il punto medio di AB, poiché in ogni triangolo isoscele l'altezza è anche mediana rispetto alla base) e da F si conduca FG parallela ad AB: basta assumere $AC = N$, $CD = n$ e si ha appunto, applicando il teorema di Pitagora ai due triangoli rettangoli ADF, AFE:

$$M^2 + m^2 = 2N^2 + 2n^2$$

Risulta così l'enunciato euclideo della II, 9: « Se si divide una retta (AB) in parti uguali ($AC = CB$) e in parti disuguali (AD, DB), la somma dei quadrati costruiti sulle parti disuguali ($\overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 = M^2 + m^2$) è

golo AEB è retto. E poiché l'angolo GEF è metà di un retto, e l'angolo EGF è retto – difatti esso è uguale all'angolo interno ed opposto ECB (I, 29) –, l'angolo rimanente EFG è metà di un retto (I, 32); l'angolo GEF è quindi uguale all'angolo EFG, cosicché anche il lato EG è uguale al lato GF (I, 6). Di nuovo, poiché l'angolo in B è metà di un retto, mentre l'angolo FDB è retto – esso è difatti, nuovamente, uguale all'angolo interno ed opposto ECB (I, 29) –, l'angolo rimanente BFD è metà di un retto (I, 32); l'angolo in B è quindi uguale all'angolo DFB, cosicché pure il lato FD è uguale al lato DB (I, 6). E poiché AC è uguale a CE, anche il quadrato di AC è uguale al quadrato di CE, per cui la somma dei quadrati di AC, CE è il doppio del quadrato di AC. Ma il quadrato di EA è uguale alla somma dei quadrati di AC, CE – difatti l'angolo ACE è retto (I, 47) –; quindi il quadrato di EA è il doppio del quadrato di AC. Di nuovo, poiché EG è uguale a GF, anche il quadrato di EG è uguale al quadrato di GF, per cui la somma dei quadrati di EG, GF è il doppio del quadrato di GF. Ma GF è uguale a CD (I, 34); il quadrato di EF è quindi il doppio del quadrato di CD. Ma pure il quadrato di EA è il doppio del quadrato di AC; perciò la somma dei quadrati di AE, EF è il doppio della somma dei quadrati di

uguale al doppio della somma dei quadrati costruiti sulla metà della retta data ($AC = N$) e sulla differenza tra le due sezioni ($CD = n$) ».

E questo teorema ci permette di trovare la relazione tra M, N e m, n, ossia ci permette di passare da un valore approssimato m/n di $\sqrt{2}$ ad un altro M/N meglio approssimato. Si vede, infatti, che è:

$$M = AD = AC + CD = CB + CD = DB + 2\,CD = m + 2n$$
$$N = AC = CB = DB + CD = m + n$$

Si tratta, cioè, proprio della stessa regola che abbiamo veduta a proposito dei numeri laterali e diagonali.

Finalmente: se vogliamo la *traduzione* aritmetica della proposizione II, 9, poniamo:

$$AB = 2a \quad ; \quad DB = x \ ;$$

quindi:

$$AD = 2a - x$$

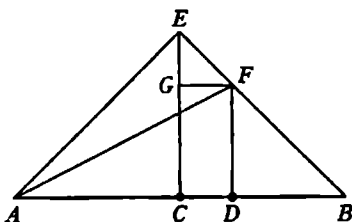
e si ha:

$$(2a - x)^2 + x^2 = 2a^2 + 2\,(a - x)^2$$

relazione di immediata verifica.

AC, CD. Ma il quadrato di AF è uguale alla somma dei quadrati di AE, EF – difatti l'angolo AEF è retto (I, 47) –; il quadrato di AF è quindi il doppio della somma dei quadrati di AC, CD. Ma [anche] la somma dei quadrati di AD, DF è uguale al quadrato di AF – l'angolo in D è difatti retto (I, 47) –; perciò la somma dei quadrati di AD, DF è il doppio della somma dei quadrati di AC, CD. Ma DF è uguale a DB; la somma dei quadrati di AD, DB è quindi il doppio della somma dei quadrati di AC, CD.

Dunque, se si divide una retta in parti uguali e disuguali... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 5, 6, 11, 29, 31, 32, 34, 47.

PROPOSIZIONE 10.

Se si divide per metà una linea retta ed un'altra le è aggiunta per diritto, il quadrato di tutta la prima retta più quella aggiunta ed il quadrato della retta aggiunta, presi ambedue insieme, sono il doppio della somma del quadrato della metà della prima retta e del quadrato descritto, come su una sola linea retta, sulla retta composta dalla metà della prima e da quella aggiunta [9].

Infatti, si divida per metà una retta AB in C, ed un'altra retta BD sia aggiunta ad essa per diritto; dico che la somma dei quadrati di AD, DB è il doppio della somma dei quadrati di AC, CD.

Si innalzi difatti la perpendicolare ad AB dal punto C di questa (I, 11), su essa si ponga CE uguale a ciascuna delle due rette AC, CB (I, 3 o post. III), si traccino le

[9] Questa proposizione II, 10 è la *gemella* della precedente II, 9. Ne differisce soltanto per il fatto che il punto D si trova non già tra A e B, ma sul prolungamento di AB dalla parte di B.

La *traduzione* aritmetica è la seguente (posto $AB = 2a$; $BD = x$):

$$(2a + x)^2 + x^2 = 2a^2 + 2(a + x)^2$$

congiungenti *EA*, *EB*, e per *E* si conduca *EF* parallela ad *AD*, mentre si conduca *FD* per *D* parallela a *CE* (I, 31). Ora, poiché una retta *EF* cade sulle rette parallele *EC*, *FD*, la somma degli angoli *CEF*, *EFD* è uguale a due retti (I, 29); la somma degli angoli *FEB*, *EFD* è perciò minore di due retti. Ma rette prolungate, a partire da angoli la cui somma sia minore di due retti, si incontrano (post. V); quindi *EB*, *FD*, se prolungate nelle direzioni *B*, *D*, si incontreranno. Si prolunghino esse e si incontrino in *G*, e si tracci la congiungente *AG*. Ma poiché *AC* è uguale a *CE*, anche l'angolo *EAC* è uguale all'angolo *AEC* (I, 5); e l'angolo in *C* è retto; ciascuno dei due angoli *CEA*, *EAC* è quindi metà di un retto (I, 32). Per la stessa ragione, pure ciascuno dei due angoli *CEB*, *EBC* è metà di un retto; quindi l'angolo *AEB* è retto. E poiché l'angolo *EBC* è metà di un retto, pure l'angolo *DBG* è metà di un retto (I, 15). Ma anche l'angolo *BDG* è retto: esso infatti è uguale all'angolo *DCE* – sono difatti angoli alterni (I, 29) –; perciò l'angolo rimanente *DGB* è metà di un retto (I, 32) e gli angoli *DGB*, *DBG* sono dunque uguali, cosicché anche il lato *BD* è uguale al lato *GD* (I, 6). Di nuovo, poiché l'angolo *EGF* è metà di un retto, e l'angolo in *F* è retto – difatti esso è uguale all'angolo opposto in *C* (I, 34) –, [pure] l'angolo rimanente *FEG* è metà di un retto (I, 32); gli angoli *EGF*, *FEG* sono dunque uguali, cosicché sono uguali anche il lato *GF* al lato *EF* (I, 6). E poiché il quadrato di *EC* è uguale al quadrato di *CA*, la somma dei quadrati di *EC*, *CA* è il doppio del quadrato di *CA*. Ma il quadrato di *EA* è uguale alla somma dei quadrati di *EC*, *CA*, per cui il quadrato di *EA* è il doppio del quadrato di *AC* (noz. com. I). Di nuovo, poiché *FG* è uguale ad *EF*, anche il quadrato di *FG* è uguale al quadrato di *FE*; la somma dei quadrati di *GF*, *FE* è perciò il doppio del quadrato di *EF*. Ma il quadrato di *EG* è uguale alla somma dei quadrati di *GF*, *FE* (I, 47); quindi il quadrato di *EG* è il doppio del quadrato di *CD*. Ma fu dimostrato che pure il quadrato di *EA* è il doppio del quadrato di *AC*, per cui la somma dei quadrati di *AE*, *EG* è il doppio della somma dei quadrati di *AC*, *CD*. Ma il quadrato di

AG è uguale alla somma dei quadrati di AE, EG (I, 47); quindi il quadrato di AG è il doppio della somma dei quadrati di AC, CD. Ma la somma dei quadrati di AD, DG è uguale al quadrato di AG (I, 47); perciò la somma dei quadrati di AD, DG è il doppio della somma dei quadrati di AC, CD. Ora, DG è uguale a DB; la somma dei quadrati di AD, DB è quindi il doppio della somma dei quadrati di AC, CD.

Dunque, se si divide per metà una linea retta... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 5, 6, 11, 15, 29, 31, 34, 47.

PROPOSIZIONE II.

Dividere una retta data in modo che il rettangolo compreso da tutta la retta e da una delle parti sia uguale al quadrato della parte rimanente [10].

Sia AB la retta data; si deve dunque dividere AB in modo che il rettangolo compreso da tutta la retta e da una delle parti sia uguale al quadrato della parte rimanente.

[10] Il problema di cui tratta questa proposizione viene proposto e risolto anche nel libro sesto degli *Elementi* (prop. XXX) con l'impiego della teoria delle proporzioni. Sicché questa specie di anticipazione con l'impiego della teoria dell'equivalenza costituisce un altro esempio della ben nota tendenza di Euclide a *svincolare* fin quando possibile la sua trattazione dalla teoria delle proporzioni. Nella VI, 30 il problema viene presentato sotto la denominazione: *dividere un segmento in media ed estrema ragione*. Modernamente, invece, si parla di « divisione di un segmento in *sezione aurea* », chiamandosi sezione, o parte, aurea la maggiore delle due parti nelle quali il segmento viene diviso.

Dovendosi qui dividere il segmento AB in due parti AH, HB tali che il quadrato di AH sia equivalente al rettangolo dell'intero segmento AB

Infatti, si descriva su AB il quadrato $ABDC$ (I, 46), si divida AC per metà nel punto E (I, 10), e si tracci la congiungente BE; si prolunghi CA oltre A, e sul prolungamento si ponga EF uguale a BE (I, 3 o post. III), su AF si descriva il quadrato $AFGH$, e si prolunghi GH oltre H sino a K: dico che AB è stata divisa nel punto H in modo che il rettangolo compreso da AB, BH risulti uguale al quadrato di AH.

Poiché si è difatti divisa la retta AC per metà in E, e ad essa è aggiunta FA, il rettangolo compreso da CF, FA, insieme col quadrato di AE, è uguale al quadrato di EF (II, 6). Ma EF è uguale ad EB, per cui il rettangolo di CF, FA, insieme col quadrato di AE, è uguale al quadrato di EB. Ma la somma dei quadrati di BA, AE è uguale al quadrato di EB – difatti l'angolo in A è retto (I, 47) –; quindi il rettangolo di CF, FA, insieme col quadrato di AE, è uguale alla somma dei quadrati di BA, AE (noz. com. I). Si sottragga il quadrato di AE da ambedue le somme; il rettan-

e dell'altra parte HB, supponiamo che il punto H risolva appunto il problema. Dovrà quindi essere:

$$q\,(AH) = r\,(AB \cdot HB)$$

Se, perciò, aggiungiamo ad ambedue i membri dell'uguaglianza il rettangolo $r\,(AH \cdot AC)$ dovremo avere:

$$r\,(FG \cdot FC) = q\,(AB).$$

Trasformiamo ora il rettangolo $FGKC$ nella differenza di due quadrati. Possiamo far ciò applicando la II, 6, precisamente considerando il segmento AC, che divideremo per metà nel punto E, e considerando AF come *segmento aggiunto*. La II, 6 ci dà allora:

$$r\,(FC \cdot FG) = q\,(EF) - q\,(EA)$$

Ma applicando il teorema di Pitagora si ha:

$$q\,(AB) = q\,(EB) - q\,(EA)$$

Uguagliando i secondi membri delle due uguaglianze si ha quindi:

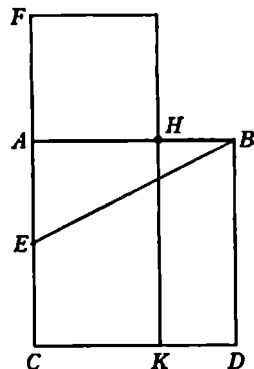
$$q\,(EF) = q\,(EB) \quad \text{ossia:} \quad EF = EB.$$

Questa è dunque la condizione perché il punto H risolva il problema: basta costruire $EF = EB$.

È questa appunto l'analisi del procedimento seguito da Euclide.

Osserviamo infine che con la II, 11 comincia l'applicazione delle prime dieci proposizioni del libro secondo: nella II, 11, ad esempio, è stata applicata la II, 6.

golo che rimane della prima, compreso da CF, FA, è perciò uguale al quadrato di AB che rimane della seconda (noz. com. III). Ma il rettangolo di CF, FA è FK – difatti AF è uguale a FG –, mentre il quadrato di AB è AD; quindi FK è uguale ad AD. Si sottragga AK che è comune; quindi FH, che rimane del primo, è uguale a HD che rimane del secondo (noz. com. III). Ma HD è il rettangolo di AB, BH – difatti AB è uguale a BD –, mentre FH è il quadrato di AH; il rettangolo compreso da AB, BH è perciò uguale al quadrato di HA.

Dunque, la retta data AB è stata divisa in H in modo che il rettangolo compreso da AB, BH risulta uguale al quadrato di HA. – C.D.F.

APPLICA: I, 10, 46, 47; II, 6.

È APPLICATA IN: IV, 10.

PROPOSIZIONE 12.

Nei triangoli ottusangoli il quadrato del lato opposto all'angolo ottuso è maggiore, rispetto alla somma dei quadrati dei lati comprendenti l'angolo ottuso, del doppio del rettangolo compreso da uno dei lati che contengono l'angolo ottuso e dalla proiezione dell'altro su esso [a] [11].

a. Abbiamo usato il termine moderno « proiezione » per esprimere più brevemente ciò che Euclide dice nel modo che segue: « ... del doppio del rettangolo compreso da uno dei lati intorno all'angolo ottuso, cioè il lato sul [prolungamento del] quale viene a cadere la perpendicolare [all'angolo ottuso, nella direzione cioè

[11] Questo teorema II, 12, insieme al seguente II, 13, rappresenta l'estensione del toerema di Pitagora al lato opposto all'angolo ottuso di

Sia *ABC* un triangolo ottusangolo avente ottuso l'angolo *BAC*, e dal punto *B* si conduca la retta *BD* perpendicolare al prolungamento di *CA*. Dico che il quadrato di *BC* è maggiore, rispetto alla somma dei quadrati di *BA*, *AC*, del doppio del rettangolo compreso da *CA*, *AD* [a].

Infatti, poiché la retta *CD* risulta divisa a caso nel punto *A*, il quadrato di *DC* è uguale alla somma dei quadrati di *CA*, *AD* e del doppio del rettangolo compreso da *CA*, *AD* (II, 4). Si aggiunga in comune il quadrato di *DB* al quadrato di *DC* ed alla somma dei quadrati di *CA*, *AD*; la somma dei quadrati di *CD*, *DB* è quindi uguale alla somma dei quadrati di *CA*, *AD*, *DB* e del doppio del rettangolo compreso da *CA*, *AD* (noz. com. II). Ma il quadrato di *CB* è uguale alla somma dei quadrati di *CD*, *DB* – difatti l'angolo in *D* è retto (I, 47) –, mentre alla somma dei quadrati di *AD*, *DB* è uguale il quadrato di *AB* (I, 47), per cui il quadrato di *CB* è uguale alla somma dei quadrati di *CA*, *AB* e del doppio del rettangolo compreso da *CA*, *AD*; cosic-

dell'angolo ottuso], e dalla parte [di retta prolungata] che la perpendicolare all'angolo ottuso [nella direzione dell'angolo ottuso] taglia esternamente [al lato suddetto] (= e dalla parte del prolungamento di quel lato che è compresa fra il vertice dell'angolo ottuso e la perpendicolare condotta al prolungamento dal vertice opposto) ».

a. Appunto *DA* è detta oggi « proiezione » del lato *BA* sulla retta *DC*, cioè sul lato *AC*.

un triangolo ottusangolo, oppure al lato opposto ad un angolo acuto. Ambedue i teoremi verranno più tardi riuniti nel noto teorema di Carnot della trigonometria.

Per la II, 12, ossia per il caso del triangolo ottusangolo *ABC*, si ha:

$$q\,(BC) = q\,(AC) + q\,(BA) + 2\,r\,(AC \cdot DA)$$

Per la dimostrazione, si applica la II, 4 alla somma $DA + AC = DC$ ottenendosi:

$$q\,(DC) = q\,(DA) + q\,(AC) + 2\,r\,(DA \cdot AC)$$

Si passa ora dai quadrati di *DC*, *DA* a quelli di *BC*, *BA* aggiungendo a ciascuno di essi il quadrato di *BD* e applicando il teorema di Pitagora:

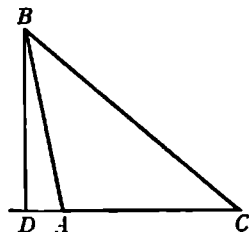
$$q\,(DC) + q\,(BD) = q\,(BC) \qquad q\,(DA) + q\,(BD) = q\,(BA)$$

Si ottiene dunque la relazione da dimostrare aggiungendo $q\,(BD)$ ad ambedue i membri dell'uguaglianza prima scritta.

ché il quadrato di CB è maggiore, rispetto alla somma dei quadrati di CA, AB, del doppio del rettangolo compreso da CA, AD.

Dunque, nei triangoli ottusangoli... (secondo l'enunciato). - C.D.D.

B

D A C

APPLICA: I, 47; II, 4.

PROPOSIZIONE 13.

Nei triangoli acutangoli il quadrato del lato opposto all'angolo acuto è minore, rispetto alla somma dei quadrati dei lati comprendenti l'angolo acuto, del doppio del rettangolo compreso da uno dei lati che contengono l'angolo acuto e dalla proiezione dell'altro su esso [a] [12].

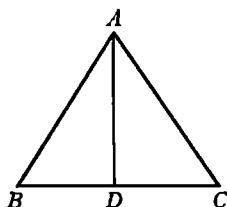
Sia ABC un triangolo acutangolo avente l'angolo in B acuto, e dal punto A si conduca AD perpendicolare a BC; dico che il quadrato di AC è minore, rispetto alla somma

a. Il testo euclideo risulta (cfr. nota *a*, p. 187 della proposizione precedente): « ... del doppio del rettangolo compreso da uno dei lati intorno all'angolo acuto, cioè il lato su cui viene a cadere la perpendicolare [all'angolo acuto, nella direzione dell'angolo acuto], e dalla parte di retta che la perpendicolare all'angolo acuto [nella direzione dell'angolo acuto] taglia internamente al lato (= e dalla parte di quel lato che è compresa fra il vertice dell'angolo acuto e la perpendicolare condotta al lato dal vertice opposto) ».

[12] Euclide limita il teorema al caso di un triangolo acutangolo, ma avrebbe potuto applicare il teorema stesso al caso del lato opposto ad un angolo acuto, in triangoli di qualunque specie.

La dimostrazione ricalca quella del teorema precedente (con doppia applicazione del teorema di Pitagora): viene però utilizzata la II, 7 (quadrato della differenza tra due segmenti) anziché la II, 4 (quadrato della somma). Ciò in relazione al fatto che questa volta l'altezza cade nell'interno della base e non sul prolungamento di essa, come nel caso della II, 12.

dei quadrati di *CB*, *BA*, del doppio del rettangolo compreso da *CB*, *BD*[a].

Infatti, poiché la retta *CB* risulta divisa a caso in *D*, la somma dei quadrati di *CB*, *BD* è uguale alla somma del doppio del rettangolo compreso da *CB*, *BD* e del quadrato di *DC* (II, 7). Si aggiunga in comune alle due somme il quadrato di *DA*; la somma dei quadrati di *CB*, *BD*, *DA* è quindi uguale alla somma del doppio del rettangolo compreso da *CB*, *BD* e dei quadrati di *AD*, *DC* (noz. com. II). Ma il quadrato di *AB* è uguale alla somma dei quadrati di *BD*, *DA* – difatti l'angolo in *D* è retto (I, 47) –, mentre alla somma dei quadrati di *AD*, *DC* è uguale il quadrato di *AC* (I, 47), per cui la somma dei quadrati di *CB*, *BA* è uguale alla somma del quadrato di *AC* e del doppio del rettangolo compreso da *CB*, *BD*; cosicché il quadrato di *AC*, da solo, è minore – rispetto alla somma dei quadrati di *CB*, *BA* – del doppio del rettangolo compreso da *CB*, *BD*.

Dunque, nei triangoli acutangoli... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 47; II, 7.

PROPOSIZIONE 14.

Costruire un quadrato uguale ad una figura rettilinea data.

Sia *A* la figura rettilinea data; si deve dunque costruire un quadrato uguale alla figura rettilinea *A* [13].

a. Appunto *BD* è detta oggi «proiezione» del lato *BA* sul lato *BC*.

[13] Con questa proposizione II, 14 si completa la soluzione del problema della quadratura del poligono, compiendosi l'ultima tappa del complesso procedimento: la trasformazione di un rettangolo nel quadrato equivalente.

Quest'ultimo problema è equivalente a quello della costruzione del medio proporzionale x tra due segmenti dati, a, b:

$$a : x = x : b.$$

Da questa proporzione si ricava infatti: $x^2 = ab$ sicché il problema

Infatti, si costruisca il rettangolo *BD* uguale alla figura rettilinea *A* (I, 45); se dunque *BE* risultasse in tal caso uguale ad *ED*, si sarebbe conseguito già quanto proposto: si sarebbe difatti in tal caso costruito un quadrato *BD* uguale alla figura rettilinea *A*. Se invece non è così, una delle rette *BE*, *ED* è maggiore. Sia maggiore *BE*, e si prolunghi allora *BE* oltre *E*, sul prolungamento si ponga *EF* uguale ad *ED* (I, 3 o post. III), e si divida *BF* per metà in *G* (I, 10); con centro *G* e per raggio una delle rette *GB*, *GF* si descriva il semicerchio *BHF* (post. III), si prolunghi *DE* oltre *E* sino al punto *H*, e si tracci la congiungente *GH*.

Poiché dunque la retta *BF* è stata divisa in parti uguali in *G* ed in parti disuguali in *E*, il rettangolo compreso da *BE*, *EF*, insieme col quadrato di *EG*, è uguale al quadrato di *GF* (II, 5). Ma *GF* è uguale a *GH*, per cui il rettangolo di *BE*, *EF*, insieme col quadrato di *GE*, è uguale al quadrato di *GH*. Ma la somma dei quadrati di *HE*, *EG* è uguale al quadrato di *GH* (I, 47); quindi il rettangolo di *BE*, *EF*, insieme col quadrato di *GE*, è uguale alla somma dei quadrati di *HE*, *EG*. Si sottragga il quadrato di *GE* da ambedue le somme; il rettangolo che rimane della prima, compreso da *BE*, *EF*, è perciò uguale al quadrato di *EH* che rimane della seconda (noz. com. III). Ma il rettangolo di *BE*, *EF* è *BD* – difatti *EF* è uguale ad *ED* –; quindi il parallelogrammo rettangolo *BD* è uguale al quadrato di *HE*. Ma *BD* è uguale

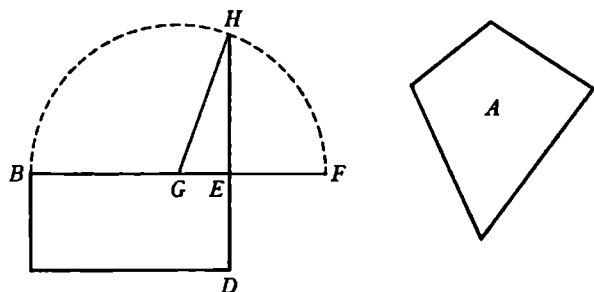
diviene quello della costruzione di un quadrato (il cui lato x è appunto da determinare) che sia equivalente ad un rettangolo di dimensioni a, b.

Ma Euclide risolve qui il problema senza far ricorso alla teoria delle proporzioni, e la soluzione è particolarmente elegante per il fatto che la costruzione che si esegue è perfettamente uguale a quella (contenuta nella proposizione tredicesima del libro sesto) che si impiega per costruire la media proporzionale: è differente soltanto la giustificazione.

Qui Euclide applica la II, 5 che, come sappiamo, permette di trasformare un rettangolo nella differenza di due quadrati: trasforma finalmente detta differenza in un unico quadrato applicando il teorema di Pitagora.

Osserviamo infine che la costruzione si esegue ugualmente anche se il lato *BE* non è quello maggiore del rettangolo.

alla figura rettilinea *A*. Anche la figura rettilinea *A* è perciò uguale al quadrato che venga descritto su *EH* (I, 46).

Dunque, è stato costruito un quadrato, cioè quello che può essere descritto su *EH*, uguale alla figura rettilinea data *A*. – C.D.F.

APPLICA: I, 10, 45, 46, 47; II, 5.

È APPLICATA IN: X, 54, 55, 91, 95, 96.

LIBRO TERZO

Nel libro terzo vengon trattate, indipendentemente dalla teoria delle proporzioni, le proprietà fondamentali del cerchio. E nel libro quarto si applicano le suddette proprietà ad una serie di costruzioni riguardanti i poligoni regolari.

Il cerchio, la circonferenza, il centro, il diametro, il semicerchio, sono stati già tutti definiti nelle def. XV, XVI, XVII, XVIII premesse al libro primo. All'inizio di questo libro terzo si trovano altre undici definizioni riguardanti sempre il cerchio, sue parti, e figure ad esso collegate.

Vogliamo ora prospettare il collegamento tra i primi quattro libri e il resto degli Elementi: *vogliamo cioè studiare la struttura degli* Elementi, *che si presenta in modo unitario.*

Il libro terzo è in stretto collegamento col libro primo, del quale applica parecchie proposizioni. Ma anche due proposizioni del libro secondo (la quinta e la sesta) trovano applicazione nel libro terzo (III, 35-36): d'altra parte s'è già veduto come il libro secondo sia immediatamente collegato al primo. E poiché le costruzioni del libro quarto costituiscono in un certo senso una sorta di appendice al libro terzo, si può concludere che i primi quattro libri degli Elementi *(cioè la trattazione della geometria piana indipendentemente dalla teoria delle proporzioni) costituiscono una unità inscindibile, un tutto unico.*

Gli Elementi *presentano poi una specie di interruzione nel libro quinto, che è dedicato esclusivamente alle proporzioni tra grandezze considerate in generale, se pur soddisfacenti a deter-*

minate condizioni. E le proposizioni del libro quinto non utilizzano nessuna proposizione dei quattro libri precedenti (teoremi e problemi) [1]. *Ma il filo interrotto della trattazione viene ripreso nel libro sesto, nel quale vengono esposte le applicazioni della teoria delle proporzioni alla geometria piana (essenzialmente si tratta dei poligoni simili e delle applicazioni ellittica e iperbolica delle aree). Va anche osservato che nel libro sesto vengono applicate, oltre a proposizioni del libro quinto, anche proposizioni di altri libri precedenti: in particolar modo del libro primo.*

Seguono i libri aritmetici (settimo, ottavo, nono) che son dedicati ai numeri interi, e, tra l'altro, alle proporzioni tra di essi: poi il libro decimo che tratta delle varie specie di irrazionalità quadratiche. Il legame entro questo secondo gruppo di libri (dal quinto al decimo) è costituito dai fatti seguenti. Per le grandezze del libro quinto non si fa distinzione tra il caso della commensurabilità e quello dell'incommensurabilità: la relativa teoria delle proporzioni si rivolge cioè indifferentemente ad ambedue i casi e può trovare quindi applicazione (nel libro sesto) alle linee e alle aree della geometria, per le quali ambedue i casi possono appunto presentarsi. Al solo caso della commensurabilità sono invece dedicati i libri settimo, ottavo, nono, mentre al solo caso dell'incommensurabilità è dedicato essenzialmente il libro decimo.

Segue la geometria solida nel libro decimoprimo, sotto l'aspetto (per dir così) del finito, e nel libro decimosecondo in relazione a problemi che mettono in gioco l'infinito matematico.

Ed eccoci all'ultimo libro degli Elementi: *il decimoterzo, dedicato alla costruzione dei poliedri regolari: esso si ricollega quindi al libro quarto, che fornisce le costruzioni di vari poligoni regolari.*

Detto libro quarto costituisce appunto una specie di continuazione del libro terzo, e si compone esclusivamente di problemi.

[1] C'è solo un legame implicito tra la definizione quarta del libro quinto (contenente il postulato di Archimede) e la prop. 16 del libro terzo (che offre un esempio di grandezze non-archimedee.

Non c'è, in verità, nulla di particolare da segnalare su questo breve libro quarto, le costruzioni del quale corrispondono quasi esattamente a quelle che ancor oggi adoperiamo.

Per quanto riguarda, infine, il libro terzo, rinviamo il lettore alle note particolari (ai princìpi e alle proposizioni).

E vogliamo richiamare la sua attenzione sulla nota alla proposizione seconda, nella quale si mette in relazione la proposizione stessa con la costruzione della I, 12 (abbassamento della perpendicolare a una retta da un punto esterno ad essa).

Una tal relazione appare tanto più evidente, se si pone mente al fatto che la I, 12, pur appartenendo per ragioni di simmetria al libro primo, non viene utilizzata che dopo la tredicesima proposizione del libro terzo, cosicché a detto libro può dirsi in sostanza appartenente.

E del resto la I, 12, insieme alla III, 2 (v.) e alla I, 22 (costruzione di un triangolo di lati dati) considera la questione fondamentale delle intersezioni tra retta e cerchio, servendosi in sostanza di un postulato, esplicitamente inespresso ma sostanzialmente presente, che costituisce un caso particolare del moderno postulato della continuità.

Particolare importanza ha anche, nel libro terzo, la proposizione sedicesima, la quale dimostra che tra la retta tangente e la circonferenza di un cerchio non può interporsi alcuna altra retta uscente dal punto di contatto. L'angolo cosiddetto di contingenza *compreso tra la circonferenza e la retta tangente è dunque sempre minore di qualsiasi angolo acuto rettilineo, e quindi è minore anche di qualunque sottomultiplo di esso. Se, dunque, insieme agli angoli rettilinei, si considerano anche angoli di contingenza (o, più in generale, angoli a lati curvilinei) si ha un insieme per il quale non vale il cosiddetto postulato di Archimede. Gli angoli curvilinei vengono perciò eliminati dalla geometria di Euclide, come dimostra la definizione quarta del libro quinto.*

A. F.

DEFINIZIONI

I. Sono uguali i cerchi i cui diametri sono uguali, o di cui sono uguali i raggi [a] [1].

a. Euclide dice αἱ ἐκ τῶν κέντρων (εὐθεῖαι, ossia εὐθεῖαι γραμμαί), le (rette) condotte dai centri, in quanto i Greci non avevano una parola specifica per *raggio*: per loro esso è *la linea retta condotta dal centro*, ἡ ἐκ τοῦ κέντρου (εὐθεῖα γραμμή), al punto che ἐκ τοῦ κέντρου, letteralmente « dal centro », può trovarsi usato anche senza l'articolo, quale un predicato, cioè, e come se fosse un'unica parola. Per questo e per ἡ διάμετρός (γραμμή), la retta diametrale, cfr. nota 1 seg.

[1] Il libro terzo ha inizio con questa definizione di cerchi uguali. Ricordiamo che con la parola « cerchio » (κύκλος) Euclide intende la figura piana racchiusa dalla « circonferenza » (περιφέρεια: cfr. def. XV del libro primo). L'uguaglianza dei diametri (o dei raggi) viene dunque assunta da Euclide come proprietà definitoria dell'uguaglianza dei cerchi.

Osserviamo che il diametro di un cerchio è stato già definito nel libro primo (def. XVII) come una *retta* passante per il centro ed avente gli estremi, da ambedue le parti, sulla circonferenza. Euclide aggiunge ivi che detta linea divide il cerchio in due parti uguali. Quest'ultima parte della definizione I, 17 contiene in sostanza un teorema, che da Proclo viene attribuito a Talete di Mileto. Fatto sta che il termine *diametro* (διάμετρος, femminile in greco perché è sottintesa la parola γραμμή = linea) viene adoperato non soltanto per il cerchio, ma anche per indicare la diagonale di un parallelogrammo: uso antecedente a Euclide, come si rileva dal celebre passo del *Menone* platonico sul raddoppiamento del quadrato (in 85*b*): « I sapienti (σοφισταί) chiamano diametro (διάμητρον) questa linea » (la quale linea è la diagonale di un quadrato). Se si cerca, quindi, che cosa abbiano in comune la diagonale di un parallelogrammo e il diametro di

II. Si dice che è tangente ad un cerchio una retta, la quale raggiunge[a] il cerchio e, prolungata, non lo taglia [2].

a. Da Euclide in avanti fu appunto regola fraseologica distinguere nell'uso ἅπτεσθαι per « incontrare », che qui è tradotto *raggiunge*, ed il suo composto ἐφάπτεσθαι per « toccare » nel senso di tangenza, come alle deff. II e III all'inizio, anche se qualche eccezione per ἅπτεσθαι vi sia, ed in Euclide stesso esso significhi proprio « toccare » in IV, Def. V.

un cerchio, così da poter essere indicati con un unico termine nel linguaggio matematico greco, si vede che in ambedue i casi si ha una linea retta che *attraversa* la figura (da un capo all'altro *diametralmente* opposto): si spiega così l'uso del διά, che significa appunto *attraverso*.

Altro carattere comune è quello di dividere la figura in due parti uguali. Per i parallelogrammi la divisione per metà è dimostrata da Euclide nella proposizione 34 del libro primo: per il cerchio, invece, la divisione per metà operata dal diametro è contenuta, come s'è visto, nella def. XVII del libro primo. E forse una tale aggiunta alla def. I, 17 è in relazione, appunto, col significato più generale del termine « diametro ».

Circa il *raggio*, va osservato che i matematici greci non usano un termine vero e proprio, ma per indicarlo usano la perifrasi: ἐκ τοῦ κέντρου = *dal centro*, alludendo al fatto che il raggio parte appunto dal centro del cerchio. La lingua greca trasforma facilmente perifrasi del genere in sostantivi o aggettivi (il termine *parallelo* è uno di questi): le tre parole restano nel caso del « raggio » staccate l'una dall'altra, ma il tutto riceve l'articolo, che è femminile perché si sottintende anche qui, come per il « diametro », il sostantivo femminile γραμμή = *linea*. Così è fatto appunto in questa definizione prima del libro terzo. Tra parentesi, facciamo osservare la somiglianza formale (se pure con diversità di significato) col nostro termine *eccentrico*, che può essere usato anche come sostantivo.

[2] La seconda definizione è quella di retta tangente ad un cerchio: tuttavia nella sua forma parzialmente negativa essa fa pure comprendere che cosa Euclide intenda per retta secante. Essa ha dato luogo a qualche perplessità interpretativa, messa in luce nelle edizioni di Heath e di Enriques.

La retta tangente *raggiunge* il cerchio, cioè parte da un punto esterno e giunge fino ad un punto comune col cerchio. Se viene prolungata, essa *non taglia* il cerchio. Qui *tagliare* sembra vada inteso nel senso di *dividere in parti* (non necessariamente uguali, anzi disuguali in linea generale). Così, del resto, viene usato il verbo τέμνειν = *tagliare*, nel libro primo (cfr. ad es. la prop. I, 34). La retta secante (cioè *tagliante*) divide il cerchio in due parti (ciascuna delle quali è detta segmento circolare, cfr. def. III, 6). La retta tangente, invece, non taglia il cerchio in due (o più) parti. Avvertiamo che questa è soltanto una possibile interpretazione, che però si riconnette ad analoga interpretazione della definizione seguente.

III. Si dicono tangenti fra loro cerchi i quali si raggiungono[a] e non si tagliano scambievolmente[3].

IV. Si dice che in un cerchio linee rette distano ugualmente dal centro, quando le perpendicolari condotte ad esse dal centro sono uguali[b].

V. E si dice che dista maggiormente dal centro quella su cui cade la perpendicolare maggiore.

VI. Segmento di un cerchio è la figura compresa da una retta e da un arco della circonferenza del cerchio[c] (= da un arco di cerchio e dalla corda sottesa dall'arco).

VII. Ed angolo di un segmento è l'angolo compreso da una retta e da un arco della circonferenza del cerchio (= da un arco di cerchio e dalla corda relativa)[4].

a. Letteralmente: si incontrano fra loro.

b. Letteralmente appunto qui si dice « rette », e nella def. VI posteriore « da una retta », per *corde* e *corda*, come noi diciamo, termine di probabile derivazione araba.

c. Euclide dice « da una retta (da una corda) e da una circonferenza di cerchio », vale a dire da *un* certo tratto *della* circonferenza di un cerchio, mentre il termine che noi usiamo, e che è pure di probabile derivazione araba, è « arco »; Euclide usa invece il termine letterale περιφέρεια, « periferia, o circonferenza » del cerchio, ed è norma della geometria greca.

[3] Anche in questa terza definizione, di cerchi tangenti, c'è una espressione parzialmente negativa. I due cerchi *si raggiungono*, ossia hanno un punto comune, ma non si tagliano, ossia non si dividono scambievolmente in parti. Se due cerchi sono secanti, invece, ciascuno di essi, mediante un arco della sua circonferenza, viene a dividere l'altro in due parti. La definizione di cerchi tangenti, così intesa, si riferisce sia al caso dei cerchi tangenti esternamente sia a quello dei cerchi tangenti internamente. Per quest'ultimo caso, è vero che il cerchio minore *taglia* in due parti il cerchio maggiore, ma non si ha la richiesta *reciprocità*, perché il cerchio maggiore non taglia in parti il cerchio minore: i due cerchi, pertanto, non si tagliano scambievolmente (οὐ τέμνουσιν ἀλλήλους). Per queste possibili interpretazioni delle definizioni seconda e terza, e per altre questioni riguardanti intersezioni di retta e cerchio, o di cerchio e cerchio, cfr. A. FRAJESE, *Il sesto postulato di Euclide*, in « Periodico di matematiche », 1968, n. 1-2, pp. 150-159.

[4] In questa definizione viene introdotto un angolo curvilineo (o, meglio, mistilineo) uno dei lati del quale è un arco di circonferenza, mentre l'altro

VIII. E quando sull'arco di un segmento [circolare] si prenda un punto e si traccino da esso le congiungenti alle estremità della retta (= corda) che è base del segmento, l'angolo che è compreso dalle rette congiungenti è un angolo [che si dice iscritto] in un segmento circolare.

IX. E quando le rette che comprendono un angolo vengono a tagliare un arco, si dice che l'angolo insiste su quello.

X. E quando [con vertice] nel[a] centro di un cerchio si costruisca un angolo, la figura che è compresa dai lati dell'angolo[b] e dall'arco da essi tagliato, è [detto] settore di un cerchio (= settore circolare)[c].

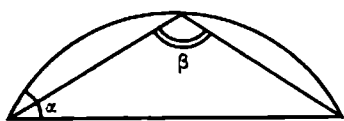
XI. Segmenti simili di cerchi sono quelli che contengono angoli uguali, ossia quelli i cui angoli sono fra loro uguali.

a. Letteralmente: al.

b. Letteralmente: dalle rette comprendenti.

c. Settore di cerchio è detto da Euclide τομεὺς κύκλου e la parola τομεύς deriva forse, per rassomiglianza di forma, dal *coltello da falegname*, σκυτοτομικὸς τομεύς.

lato è una corda del cerchio. Questa definizione è necessaria per introdurre la proposizione III, 16 nella quale è esposto il motivo principale per il quale la considerazione degli angoli curvilinei, già di uso comune, venne abbandonata dai geometri greci (ciò anche in relazione alla definizione quarta del libro quinto: si vedano le note a detta definizione e alla prop. III, 16).

L'angolo curvilineo α (o mistilineo che dir si voglia) di cui tratta questa definizione è detto angolo *del* segmento (circolare), da distinguere dall'angolo *nel* segmento, di cui tratta la seguente definizione ottava: l'angolo *nel* segmento è un angolo rettilineo β, cioè uno degli angoli che noi comunemente consideriamo: ha il vertice in un punto dell'arco del segmento circolare e ciascun lato passante per un estremo della relativa corda.

PROPOSIZIONI

PROPOSIZIONE I.

Trovare il centro di un cerchio dato.

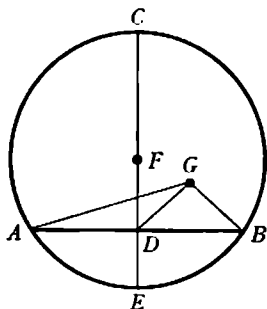
Sia *ABC* il cerchio dato; si deve dunque trovare il centro del cerchio *ABC*.

Si tracci in esso a caso una retta (= corda) *AB* e la si divida per metà nel punto *D* (I, 10), da *D* si innalzi *DC* perpendicolare ad *AB* (I, 11), si prolunghi *CD* oltre *D* sino ad *E*, e si divida *CE* per metà in *F* (I, 10); dico che *F* è il centro del cerchio *ABC*.

Infatti, supponiamo che non lo sia, ma, se possibile, sia esso *G*, e si traccino le congiungenti *GA*, *GD*, *GB*. Ora, poiché *AD* è uguale a *DB*, e *DG* è comune, i due lati *AD*, *DG* sono uguali rispettivamente ai due lati *BD*, *DG* [a]; e la base *GA* è uguale alla base *GB* – difatti sono raggi –; quindi l'angolo *ADG* è uguale all'angolo *GDB* (I, 8). Ma quando una retta innalzata su un'altra retta forma gli angoli adiacenti uguali fra loro, ciascuno degli angoli uguali è retto (I, def. X), per cui l'angolo *GDB* è retto. Ma pure l'angolo *FDB* è retto; perciò *FDB* è in tal caso uguale a *GDB* (post. IV), l'angolo maggiore uguale al minore: il che è impossibile (noz. com. VIII). Non è quindi *G* il centro del cerchio *ABC*. Similmente potremo dimostrare che nessun altro punto lo è, eccetto *F*.

Dunque, il punto *F* è il centro del cerchio *ABC* [1].

a. Letteralmente si dice che « i due lati *AD*, *DG* sono uguali rispettivamente ai due lati *GD*, *DB* », mentre – se Euclide fosse stato attento, come sempre non è, a porre i termini uguali in ordine corrispondente – dovrebbe dirsi « ai due lati *BD*, *DG* »; abbiamo quindi corretto nella traduzione.

[1] La costruzione eseguita da Euclide permette di dimostrare facilmente l'unicità del centro di un cerchio, facendo vedere che nessun altro punto, come *G*, fuori di *CE* può essere il centro. D'altra parte è immediato che, dal momento che il centro deve trovarsi sulla perpendicolare *EC* ad una

APPLICA: I, 8, 10, 11.

È APPLICATA IN: III, 2, 4, 8, 11, 14, 17, 18, 21, 28, 29, 31, 35, 36, 37; IV, 3, 6, 7, 12, 15; XIII, 9, 10, 11, 16.

COROLLARIO.

È da ciò evidente che in un cerchio il centro si trova sulla retta perpendicolare ad una corda qualsiasi nel suo punto medio[a]. – C.D.F.

È APPLICATO IN: III, 9, 10.

PROPOSIZIONE 2.

Se in un cerchio si prendono sulla circonferenza due punti a piacere, la retta che congiunge i punti cadrà internamente al cerchio.

Sia ABC un cerchio, e sulla sua circonferenza si prendano

a. Letteralmente: « che, se in un cerchio una retta divide una retta per metà e ad angoli retti, il centro del cerchio è sulla retta secante ». Da notare che il corollario di III, 1 si trova, come sarà d'uso in Euclide per i corollari, prima delle parole ὅπερ ἔδει ποιῆσαι, c.d.f. o *come si doveva fare*, trattandosi qui di un problema; avremmo trovato ὅπερ ἔδει δεῖξαι, c.d.d. o *come si doveva dimostrare*, se si fosse trattato di un teorema. Insomma, Euclide inserisce tali clausole dopo il corollario, come se considerasse quest'ultimo quale parte di fatto della proposizione che discute.

corda AB per il suo punto medio (contenuto del corollario della III, 1) detto centro deve essere il punto medio F di EC (mostrar ciò sarebbe estremamente facile, come del resto si vede anche in III, 13): l'unicità del centro risulta così dimostrata, da qualunque corda si parta.

Per altre questioni riguardanti il posto che la III, 1 dovrebbe giustamente occupare nella trattazione, si veda la parte finale della nota alla seguente III, 2.

i due punti *A*, *B* a piacere; dico che la retta la quale congiunge *A* con *B* cadrà internamente al cerchio.

Infatti, non cada in tal modo, ma, se possibile, venga a cadere esternamente, come fa la retta *AEB*, si prenda il centro del cerchio *ABC* e sia esso *D* (III, 1), si traccino le congiungenti *DA*, *DB*, e si tracci [infine] la retta *DFE*.

Poiché dunque *DA* è uguale a *DB*, anche l'angolo *DAE* è uguale all'angolo *DBE* (I, 5); e poiché nel triangolo *DAE* un lato, *AE*, risulta prolungato oltre *E* sino a *B*, l'angolo *DEB* è maggiore dell'angolo *DAE* (I, 16). Ma l'angolo *DAE* è uguale all'angolo *DBE*, per cui *DEB* è maggiore di *DBE*. E ad angolo maggiore è opposto lato maggiore (I, 19); *DB* è quindi maggiore di *DE*. Ma *DB* è uguale a *DF*; perciò *DF* è in tal caso maggiore di *DE*, il lato minore del maggiore: il che è impossibile (noz. com. VIII). Quindi la retta che congiunge *A* con *B* non cadrà esternamente al cerchio. Similmente potremo dimostrare che essa non può cadere neppure sulla circonferenza stessa; verrà quindi a cadere internamente [al cerchio].

Dunque, se in un cerchio si prendono sulla circonferenza... (secondo l'enunciato) [2]. – C.D.D.

[2] Questa proposizione seconda è fondamentale nella teoria del cerchio. Essa dice che se si congiungono con una retta due punti qualunque della circonferenza di un cerchio, la retta stessa cade *nell'interno del cerchio*. Il teorema, in altri termini, afferma che il cerchio è una figura convessa. La dimostrazione è assai semplice: ha soltanto il difetto (grave dal punto di vista didattico) di far riferimento ad una *figura impossibile*. Essa procede per assurdo: la retta congiungente *AB* non cada nell'interno del cerchio, ma proceda come *AEB*. Sia *D* il centro del cerchio, e si congiunga *D* con *A* e con *B*: inoltre si tracci un raggio come *DF* e lo si prolunghi fino a tagliare in un punto *E* la retta *AEB* supposta esterna al cerchio (qui c'è un'ammissione relativa al fatto che una semiretta condotta da un vertice internamente all'angolo di un triangolo, incontra il lato opposto). Il triangolo *ADBEA* è isoscele, quindi sono uguali gli angoli alla base *DAE* = *DBE*. Ma l'angolo *DEB* è angolo esterno del triangolo *ADE*, quindi è maggiore dell'angolo interno non adiacente *DAE*, e pertanto è anche *m* maggiore di *DBE* che è uguale a *DAE*. Nel triangolo *DEB* quindi: $DEB > DBE$. Ma ad angolo maggiore si oppone lato maggiore, quindi è: $DB > DE$, ciò che è assurdo perché, essendosi supposto *E* esterno al cerchio, *DE* è maggiore del raggio, ossia di *DB*. Similmente, aggiunge Euclide, si dimostrerebbe che la retta congiungente *A* con *B*

APPLICA: I, 5, 16, 19; III, 1.

È APPLICATA IN: III, 13.

non può cadere *sulla* circonferenza: in questo caso, ripetendo lo stesso ragionamento, si giungerebbe all'assurdo $DF > DF$.

Tra parentesi, osserviamo che questo secondo caso ci dice che sulla circonferenza di un cerchio non possono esistere tre punti in linea retta.

Ci si può domandare, a questo punto, perché Euclide abbia messo, in così grande evidenza questa proposizione III, 2 collocandola in testa al libro terzo. Ciò tanto più che essa non viene applicata immediatamente ma soltanto nella III, 13 (e solo in essa).

Ci è sembrato di vedere che la prop. III, 2 si riannodi immediatamente alla trattazione precedente, e precisamente alla proposizione I, 12 della quale in certo senso, sia pur solo parzialmente, costituisce l'inversa. Detta proposizione I, 12 è un problema, consistente nell'abbassare la perpendicolare ad una retta da un punto ad essa esterno. Come il lettore potrà vedere nella nota relativa a detta proposizione, il problema viene risolto costruendo un cerchio avente il centro nel punto dato O e tale che la sua circonferenza venga tagliata in due punti A, B dalla retta data r. E perché questa condizione sia verificata, si prende C da parte opposta di O rispetto ad r, sicché r passa certamente per un punto D interno al cerchio di raggio OC. Si ammette quindi, in I, 12, che se una retta passa per un punto interno ad un cerchio essa (prolungata) taglia la circonferenza in due punti (caso particolare del postulato della continuità sulla retta). Nel caso della III, 2, invece, si parte dall'ipotesi di una retta che tagli la circonferenza d'un cerchio in due punti, e si mostra che essa ha (almeno) un punto interno al cerchio. E se si pone mente al fatto che la III, 2 fa vedere che una retta non può incontrare la circonferenza di un cerchio in più di due punti (altrimenti sulla circonferenza vi sarebbero tre punti allineati, cosa che s'è visto essere impossibile), possiamo affermare che ambedue le proposizioni del gruppo I, 12 III, 2 affrontano la difficile questione delle intersezioni di una retta con la circonferenza di un cerchio.

Osserviamo ancora che la I, 12 viene data nel libro primo solo per ragioni di simmetria espositiva (come è spiegato nella nota a detta prop.)

PROPOSIZIONE 3.

Se in un cerchio una retta, che passa per il centro (= un diametro), divide per metà un'altra retta[a] *che non passi per il centro*[b], *è ad essa perpendicolare*[c]; *e se è ad essa perpendicolare, la divide anche per metà.*

Sia *ABC* un cerchio, ed in esso una retta *CD*, che passa per il centro, divida per metà nel punto *F* un'altra retta

a. Abbiamo in Euclide: « Se... una qualche retta (quella, cioè, che sia presa in considerazione) ... divide... una qualche retta... », e così d'ordinario nelle formule similari; noi diciamo, magari: una qualunque retta; preferiamo tradurre con *una*... *altra*...

b. Letteralmente abbiamo: *retta attraverso il centro* e *retta non attraverso il centro*, cioè « Se in un cerchio una retta attraverso il centro divide per metà un'altra retta non attraverso il centro »; Euclide specificherà poco dopo ἡ ΓΔ... διὰ τοῦ κέντρου οὖσα, « ... *CD* che è retta la quale è (la quale passa, come stato di fatto) per il centro ».

c. Letteralmente: la divide anche ad angoli retti.

ma che essa viene utilizzata soltanto a partire dalla proposizione 14 del libro terzo. Così la III, 2 viene utilizzata soltanto nella III, 13. Sicché possiamo dire che la coppia delle due proposizioni I, 12 e III, 2, pur collocate negli *Elementi* così lontane tra loro, troverebbe il suo giusto posto dopo la prop. III, 12.

Va infine osservato che, come già notò il Todhunter, un risultato della III, 2 viene utilizzato nella III, 1. In quest'ultima, infatti, si assume che una retta come *CE*, condotta per il punto *D*, tagli la circonferenza in due punti *C*, *E*. Ciò risulta nell'ordine di idee della I, 12 se si può far vedere che il punto *D* è interno al cerchio. Ma ciò risulta proprio in base alla III, 2 (la retta congiungente due punti della circonferenza cade nell'interno del cerchio). Si potrebbe allora formulare l'ipotesi che nel testo originale la III, 1 e la III, 2 si seguissero in ordine opposto a quello poi recepito: l'inversione sarebbe avvenuta più tardi, forse a causa della convinzione che (dato che nella III, 2 viene considerato il centro del cerchio) fosse necessario premettere la III, 1 che insegna a *costruire* il centro stesso. Ma il *centro* della III, 2 è semplicemente utilizzato come un punto dal quale si conducono tre rette uguali alla circonferenza, e che esso *esista* si sa in base alla definizione XVII del libro primo (inversamente la prop. III, 9 ci dirà che se da un punto interno possono condursi alla circonferenza tre rette uguali, quel punto è il centro del cerchio).

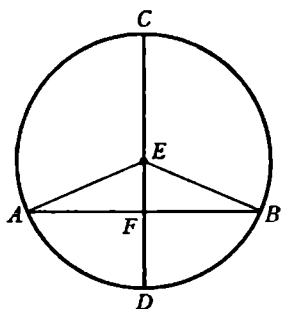
D'altra parte non sorge la questione esistenziale nel senso di Zeuthen (dimostrazione di esistenza mediante la costruzione): va ricordato infatti che la costruzione del cerchio di dato centro (e dato raggio) viene *postulata* in Euclide (post. III). In altri termini, non si può concepire l'esistenza di un cerchio senza concepire al tempo stesso l'esistenza del suo centro.

AB che non passi per il centro; dico che *CD* è perpendicolare ad *AB*.

Infatti, si prenda il centro del cerchio *ABC* e sia esso *E* (III, 1 e I, 10), e si traccino le congiungenti *EA*, *EB*.

Ora, poiché *AF* è uguale a *FB*, e *FE* è comune, due lati sono uguali a due lati, e la base *EA* è uguale alla base *EB*; quindi l'angolo *AFE* è uguale all'angolo *BFE* (I, 8). Ma quando una retta innalzata su un'altra retta forma gli angoli adiacenti uguali fra loro, ciascuno dei due angoli uguali è retto (I, def. X), per cui ciascuno dei due angoli *AFE*, *BFE* è retto. Dunque *CD*, che è retta passante per il centro e che divide per metà *AB*, la quale invece non è retta che passi per il centro, è ad essa perpendicolare.

Ma sia adesso il caso in cui *CD* è perpendicolare ad *AB*; dico che la divide anche per metà, ossia che *AF* è uguale a *FB*.

Infatti, eseguita la medesima costruzione, poiché *EA* è uguale ad *EB*, pure l'angolo *EAF* è uguale all'angolo *EBF* (I, 5). Ma anche l'angolo retto *AFE* è uguale all'angolo retto *BFE*, per cui *EAF*, *EBF* sono due triangoli che hanno due angoli uguali a due angoli ed un lato uguale ad un lato, cioè *EF* ad essi comune e che è opposto [in ciascun triangolo] ad uno degli angoli uguali; perciò essi avranno uguali anche i lati rimanenti ai [rispettivi] lati rimanenti (I, 26); *AF* è quindi uguale a *FB*.

Dunque, se in un cerchio una retta... (secondo l'enunciato)[3]. – C.D.D.

Applica: I, 5, 8, 10, 26.

È applicata in: III, 4, 14, 35, 36; XII, 16.

[3] Questa proposizione contiene due teoremi, parzialmente inversi l'uno dall'altro. Il primo dei due (quello che deduce la perpendicolarità dalla bisezione della corda) è lo stesso che è stato già dimostrato e applicato

Fot. Pineider

Una pagina degli *Elementi* di Euclide

(Firenze, Biblioteca Laurenziana, Cod. Plut. 28.3, f. 61, sec. x).

PROPOSIZIONE 4.

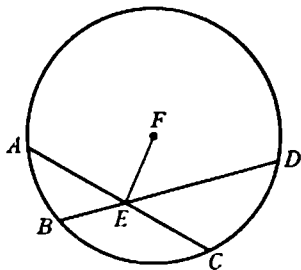
Se in un cerchio due rette, che non passino per il centro, si tagliano fra loro, non si dividono fra loro per metà.

Sia *ABCD* un cerchio, ed in esso le due rette *AC*, *BD*, che non passano per il centro, si taglino fra loro in *E*; dico che non si dividono fra loro per metà.

Infatti, se fosse possibile, si dividano fra loro per metà, in modo che *AE* sia uguale ad *EC* e *BE* uguale ad *ED*, si prenda il centro del cerchio *ABCD* (III, 1) e sia esso *F*, e si tracci la congiungente *FE*.

Poiché dunque una retta *FE*, che passa per il centro, divide per metà un'altra retta *AC* che non passa per il centro, è ad essa perpendicolare (III, 3); l'angolo *FEA* è quindi retto; di nuovo, poiché una retta *FE* divide per metà un'altra retta *BD*, è pure ad essa perpendicolare (III, 3); quindi l'angolo *FEB* è retto. Ma fu dimostrato che anche l'angolo *FEA* è retto, per cui gli angoli *FEA*, *FEB* sarebbero fra loro uguali (post. IV), il minore al maggiore: il che è impossibile (noz. com. VIII). Quindi *AC*, *BD* non si dividono fra loro per metà.

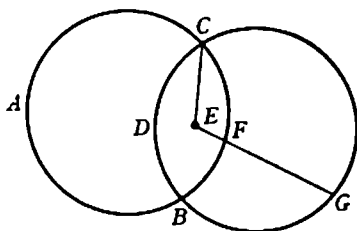
Dunque, se in un cerchio due rette... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: III, 1, 3.

PROPOSIZIONE 5.

Se due cerchi si tagliano fra loro, essi non avranno lo stesso centro.

Infatti, i due cerchi *ABC*, *CDG* si taglino fra loro nei punti *B*, *C*; dico che non avranno lo stesso centro.

nella I, 12 (abbassamento della perpendicolare su una retta), sicché qui Euclide nella III, 3 ripete quasi interamente *parola per parola* quanto in I, 12 ha già esposto.

Se fosse difatti possibile, sia *E* il centro [comune]: si traccino la congiungente *EC*, ed a caso[, per il punto *E*,] la retta *EFG*. Ora, poiché il punto *E* è il centro del cerchio *ABC*, si ha che *EC* è uguale ad *EF* (I, def. XV). Di nuovo, poiché il punto *E* è il centro del cerchio *CDG*, si ha che *EC* è uguale ad *EG* (id.); ma fu dimostrato che *EC* è uguale pure ad *EF*, per cui anche *EF*, *EG* sono in tal caso uguali fra loro (noz. com. I), la retta minore alla maggiore: il che è impossibile (noz. com. VIII). Il punto *E* non è quindi il centro dei cerchi *ABC*, *CDG*.

Dunque, se due cerchi si tagliano fra loro... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

È APPLICATA IN: III, 10.

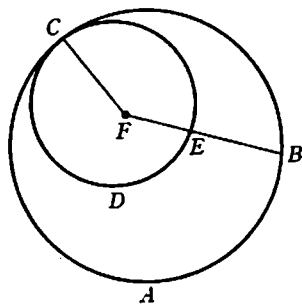
PROPOSIZIONE 6.

Se due cerchi sono tangenti fra loro, essi non possono avere lo stesso centro.

Infatti, i due cerchi *ABC*, *CDE* siano tangenti fra loro nel punto *C*; dico che non possono avere lo stesso centro.

Se fosse difatti possibile, sia *F* il centro comune: si traccino la congiungente *FC*, ed a caso, per il punto *F*, la retta *FEB*.

Poiché dunque il punto *F* è il centro del cerchio *ABC*, si ha che *FC* è uguale a *FB* (I, def. XV). Di nuovo, poiché il punto *F* è il centro del cerchio *CDE*, si ha che *FC* è uguale a *FE* (id.). Ma fu dimostrato che *FC* è uguale a *FB*, per cui anche *FE*, *FB* sono in tal caso uguali fra loro (noz. com. I), la retta minore alla maggiore: il che è impos-

sibile (noz. com. VIII). Quindi F non è il centro dei cerchi ABC, CDE.

Dunque, se due cerchi sono tangenti fra loro... (secondo l'enunciato)[4]. – C.D.D.

PROPOSIZIONE 7.

Se in un cerchio si prende sul diametro un punto che non sia centro del cerchio, ed altre rette vengono condotte dal punto alla circonferenza[a], *sarà massima la retta su cui è il centro, minima quella che rimane del diametro, sottratta da esso la prima, e delle altre la più vicina alla retta che passa per il centro è sempre maggiore di quella più lontana, e dal punto potranno condursi alla circonferenza soltanto due rette uguali, una da ciascun lato della minima.*

Sia $ABCD$ un cerchio e sia AD un suo diametro, si prenda su AD un punto F che non sia il centro del cerchio, mentre centro del cerchio sia E, e da F si conducano alla circonferenza del cerchio $ABCD$ altre rette FB, FC, FG; dico che FA è massima, FD è minima e, delle altre, FB è maggiore di FC, e FC maggiore di FG.

[4] Le due proposizioni 5 e 6 costituiscono un unico teorema, che può essere enunciato così: *Se le circonferenze di due cerchi hanno un punto comune, i due cerchi non hanno lo stesso centro.* Infatti nel caso della prop. 5 non si ricorre al secondo punto d'intersezione delle due circonferenze. Nella prop. 6, poi, Euclide si limita al caso dei cerchi tangenti internamente, ma la stessa dimostrazione potrebbe applicarsi anche a cerchi tangenti esternamente, come osserva lo Heath. D'altra parte, per questi ultimi cerchi il teorema è pressoché evidente.

Se prendiamo la proposizione *contronominale* delle 5 e 6 riunite (cioè la contraria dell'inversa o inversa della contraria) ricaviamo la proposizione: «Se due cerchi hanno lo stesso centro, le loro circonferenze non possono avere nessun punto comune» (infatti, se l'avessero, non potrebbero avere lo stesso centro, per la 5 e la 6). Segue ancora che è *unico* il cerchio avente un dato centro C, e la circonferenza del quale passi per un punto dato A: è impossibile infatti (come s'è or ora veduto) che vi siano due cerchi distinti aventi lo stesso centro C e tali che ambedue le loro circonferenze abbiano un punto comune A.

a. Letteralmente: vengono a cadere sul cerchio.

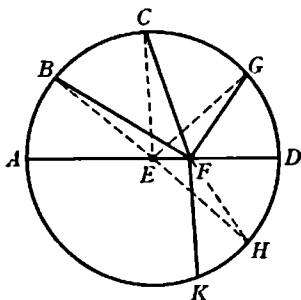
Infatti, si traccino le congiungenti *BE*, *CE*, *GE*. E poiché in ogni triangolo la somma di due lati è maggiore del lato rimanente (I, 20), la somma di *EB*, *EF* è maggiore di *BF*. Ma *AE* è uguale a *BE* (I, def. XV)[a]; perciò *AF* è maggiore di *BF*. Di nuovo, poiché *BE* è uguale a *CE* (I, def. XV), e *FE* è comune, i due lati *BE*, *EF* sono uguali ai due lati *CE*, *EF*. Ma d'altra parte l'angolo *BEF* è maggiore dell'angolo *CEF*; la base *BF* è quindi maggiore della base *CF* (I, 24). Per la stessa ragione, pure *CF* è maggiore di *FG*.

Di nuovo, poiché la somma di *GF*, *FE* è maggiore di *EG* (I, 20), ed *EG* è uguale ad *ED* (I, def. XV), la somma di *GF*, *FE* è maggiore di *ED*. Si sottragga in comune *EF* [alla somma di *GF*, *FE* ed alla retta *ED*]; la parte che rimane [della somma], *GF*, è quindi maggiore di quella *FD* che rimane [della retta] (noz. com. III). Perciò la retta *FA* è massima, *FD* è minima, *FB* è maggiore di *FC*, e *FC* è maggiore di *FG*.

Dico inoltre che dal punto *F* potranno condursi alla circonferenza del cerchio *ABCD* soltanto due rette uguali, una da ciascun lato della minima *FD*. Infatti, sulla retta *EF* e con vertice nel suo punto *E* si costruisca l'angolo *FEH* uguale all'angolo *GEF* (I, 23), e si tracci la congiungente *FH*. Poiché dunque *GE* è uguale ad *EH* (I, def. XV), ed *EF* è comune, i due lati *GE*, *EF* sono uguali ai due lati *HE*, *EF*; e l'angolo *GEF* è uguale all'angolo *HEF*; la base *FG* è perciò uguale alla base *FH* (I, 4). Dico adesso che dal punto *F* non potrà condursi alla circonferenza del cerchio nessun'altra retta uguale a *FG*. Infatti, se fosse possibile, sia *FK* uguale a *FG* a venir condotta in tal modo. Ora, poiché *FK* è uguale a *FG*, ma a *FG* è uguale *FH*, anche *FK*, *FH* sono in tal caso uguali (noz. com. I), la retta più vicina a quella che passa per il centro risultando uguale a quella più lontana: il che è impossibile. Perciò nessun'altra retta

a. Qui si troverebbe un « perciò *BE*, *EF* prese insieme formano *AF* (letteralmente, " perciò *BE*, *EF* sono uguali ad *AF* ") » che è espunto da Heiberg.

uguale a *GF* potrà condursi dal punto *F* alla circonferenza del cerchio; una sola retta, *FH*, potrà quindi condursi in tal modo.

Dunque, se in un cerchio si prende sul diametro un punto... (secondo l'enunciato)[a]. – C.D.D.

APPLICA: I, 4, 20, 23, 24.

PROPOSIZIONE 8.

Se si prende un punto esternamente ad un cerchio, e dal punto si conducono linee rette alla circonferenza del cerchio[b], *di cui una per il centro e le altre condotte a caso, delle rette che cadono sulla circonferenza [dalla parte] concava è massima quella che passa per il centro, mentre delle altre la retta più vicina a quella che passa per il centro è sempre maggiore di quella più lontana; delle rette, invece, che cadono sulla circonferenza [dalla parte] convessa è minima quella il cui prolungamento è il diametro*[c], *mentre delle altre la retta più vicina a quella minima è sempre minore di quella più lontana; e [dal punto dato] si potranno condurre alla circonferenza*[d] *soltanto due rette uguali, una da ciascun lato della retta minima.*

Sia *ABC* un cerchio, esternamente ad *ABC* si prenda un punto *D*, si conducano da esso delle rette *DA*, *DE*, *DF*, *DC*, e *DA* passi per il centro. Dico che, delle rette che cadono

a. Una dimostrazione alternativa a III, 7 è posta da Heiberg in Appendice; anticipiamo fin da ora che in Appendice sono ritrovabili, là poste da Heiberg, prove alternative pure di III, 8, 9, 10, 11 e 31.

b. Letteralmente: si conducono linee rette al cerchio.

c. Letteralmente: quella compresa fra il punto ed il diametro.

d. Letteralmente: e sul cerchio cadranno, *cioè* potranno *o* possono cadere.

sulla parte concava *AEFC* della circonferenza[a], è massima quella che passa per il centro, cioè *DA*, mentre *DE* è maggiore di *DF* e *DF* maggiore di *DC*, e che invece, delle rette che cadono sulla parte convessa *HLKG* della circonferenza, è minima *DG*, [compresa] fra il punto ed il diametro *AG*, mentre la retta più vicina alla minima *DG* è sempre minore di quella più lontana, cioè *DK* minore di *DL*, e *DL* minore di *DH*[b].

Infatti, si prenda il centro del cerchio *ABC* (III, 1 o I, 10) e sia esso *M*, e si traccino le congiungenti *ME*, *MF*, *MC*, *MK*, *ML*, *MH*.

Ora, poiché *AM* è uguale ad *EM*, si aggiunga in comune ai due raggi *MD*; quindi *AD* è uguale alla somma di *EM*, *MD* (noz. com. II). Ma la somma di *EM*, *MD* è maggiore di *ED* (I, 20), per cui anche *AD* è maggiore di *ED*. Di nuovo, poiché *ME* è uguale a *MF*, e *MD* è comune, *EM*, *MD* sono uguali a *FM*, *MD*; e l'angolo *EMD* è maggiore dell'angolo *FMD*. Perciò la base *ED* è maggiore della base *FD* (I, 24). Similmente potremo dimostrare che pure *FD* è maggiore di *CD*; quindi *DA* è massima, mentre *DE* è maggiore di *DF*, e *DF* è maggiore di *DC*.

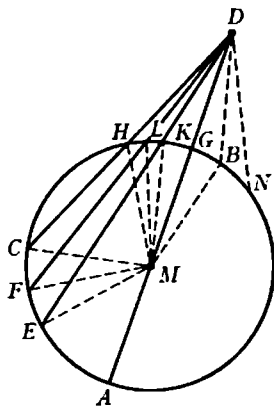
E poiché la somma di *MK*, *KD* è maggiore di *MD* (I, 20), e *MG* è uguale a *MK*, si ha che *KD*, la quale così rimane, è maggiore della [parte] rimanente *GD* (noz. com. III); cosicché *GD* è minore di *KD*. E poiché su uno dei lati del triangolo *MLD*, cioè su *MD*, si costruirono le due rette *MK*, *KD* [con punto d'incontro] internamente allo stesso, la somma di *MK*, *KD* è minore della somma di *ML*, *LD*

a. Letteralmente: « sulla circonferenza concava *AEFC* »; e così dopo per la parte convessa.

b. Heiberg ha un po' rivisto, seguendo una emendazione di Gregory (*Euclidis quae supersunt omnia. Ex recensione Davidis Gregorii*, edizione oxoniense del testo greco, Oxford, 1703, p. 54), l'ordine espositivo di « Dico che... ecc. », sebbene i codici contrastino: ma il posto è stato guastato da un matematico inabile in tempo assai antico, e ciò spiega il fatto dei codici, mentre alla correzione inducono il tenore e l'ordine della proposizione e dimostrazione stesse.

(I, 21); ma MK è uguale a ML, per cui DK, che rimane, è minore della [parte] rimanente DL. Similmente potremo dimostrare che pure DL è minore di DH; quindi DG è minima, mentre DK è minore di DL, e DL è minore di DH.

Dico inoltre che dal punto D si potranno condurre alla circonferenza del cerchio soltanto due rette uguali, una da ciascun lato della retta minima DG. Sulla retta MD e con vertice nel punto M di[a] essa si costruisca l'angolo DMB uguale all'angolo KMD (I, 23), e si tracci la congiungente DB. E poiché MK è uguale a MB, e MD è comune, i due lati KM, MD sono uguali rispettivamente ai due lati BM, MD; e l'angolo KMD è uguale all'angolo BMD; la base DK è quindi uguale alla base DB (I, 4). Dico [infine] che dal punto D non potrà condursi alla circonferenza del cerchio nessun'altra retta uguale alla retta DK. Difatti, se fosse possibile, tale sia la retta[b] DN. Poiché dunque DK è uguale a DN, ma DK è uguale a DB, anche DB, DN sono in tal caso uguali (noz. com. I), ossia la retta più vicina alla minima DG uguale a quella più lontana: il che fu dimostrato impossibile. Sulla circonferenza del cerchio ABC non cadranno quindi dal punto D più di due rette uguali, una da ciascun lato della retta minima DG.

Dunque, se si prende un punto esternamente ad un cerchio... (secondo l'enunciato)[5]. – C.D.D.

APPLICA: I, 4, 20, 21, 23, 24; III, 1.

a. Letteralmente: su.
b. Letteralmente: venga una tal retta a cadere e sia essa.

[5] Le due proposizioni 7 e 8 sono, per dir così, gemelle: l'unica differenza tra loro consiste essenzialmente nel fatto che il punto considerato è interno al cerchio nella prop. 7, mentre è esterno nella prop. 8. In ambe-

PROPOSIZIONE 9.

Se si prende un punto internamente ad un cerchio, e dal punto possono condursi alla circonferenza[a] *più di due rette uguali, il punto preso è il centro del cerchio.*

Sia *ABC* un cerchio, *D* un punto interno ad esso, e da *D* si conducano alla circonferenza del cerchio *ABC* più di due

a. Letteralmente sarebbe « vengono a cadere sul cerchio », come anche dopo: « da *D* risultino cadere ».

due i casi il punto non deve essere il centro del cerchio: ciò è esplicitamente stabilito nell'enunciato della prop. 7, mentre non occorre neppure dirlo, nella prop. 8, trattandosi di un punto esterno.

Il risultato più importante delle prop. 7 e 8 è che dal punto dato (interno o esterno che sia al cerchio) possono tracciarsi, fino a raggiungere la circonferenza, soltanto due *rette* uguali. Non è già che si possa tracciare una sola coppia di tali rette: le coppie sono infinite. Ma si tratta sempre di *coppie* di rette uguali tra loro a due a due: Euclide dimostra che è impossibile che dal punto dato si possano tracciare tre segmenti di retta uguali tra loro che raggiungano la circonferenza. Ma la III, 7 e la III, 8 si riferiscono ad un punto rispettivamente interno o esterno al cerchio: le due proposizioni andrebbero completate da una terza che si riferisse ad un punto situato sulla circonferenza. Soltanto allora si potrebbero riunire le proposizioni 7 e 8 (insieme alla ipotetica terza) nel teorema: « Se un punto non è il centro di un cerchio, da esso non si possono condurre alla circonferenza più di due *rette* uguali ».

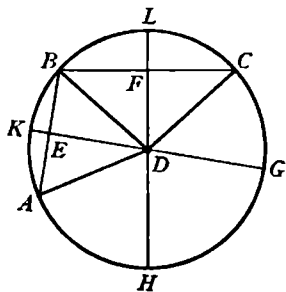
La proposizione contronominale della 7 (che si ottiene *invertendo e negando*, cioè assumendo come nuova ipotesi la negazione della vecchia tesi, e come nuova tesi la negazione della vecchia ipotesi) è invece: « Se da un punto interno al cerchio si possono condurre alla circonferenza più di due rette uguali, esso è il centro del cerchio ». E questo è appunto l'enunciato della proposizione III, 9. Sembra strano a Heath che Euclide non abbia tratto dalla III, 7 l'immediata dimostrazione per assurdo della III, 9 (se quel punto non fosse il centro del cerchio non potrebbero da esso condursi alla circonferenza più di due rette uguali). Egli ha invece preferito un metodo di dimostrazione diretta della III, 9. Per spiegare ciò Heath aggiunge: « Euclide non si permette queste deduzioni (*inferences*) logiche, come abbiamo avuto occasione di osservare anche altrove » (HEATH, *Euclid's Elements*, vol. II, p. 22).

Ma a noi sembra, al contrario, che Euclide ben volentieri si dedichi a tali *logical inferences*, come mostrano i numerosi quadrilateri di proposizioni (diretta, inversa, contraria, contronominale), che abbiamo trovato nel libro primo (cfr. nota alla prop. I, 17) e che ritroveremo, ad esempio, nel libro quinto e nel decimo.

rette uguali, cioè DA, DB, DC; dico che il punto D è il centro del cerchio ABC.

Infatti, si traccino le rette congiungenti AB, BC, dividendole per metà nei punti E, F (I, 10), si traccino le congiungenti ED, FD, e si prolunghino [queste, ambedue dalle due parti, fino a raggiungere la circonferenza rispettivamente] nei punti G, K e H, L[a].

Poiché dunque AE è uguale ad EB, ed ED è comune, i due lati AE, ED sono uguali ai due lati BE, ED; e la base DA è uguale alla base DB; l'angolo AED è perciò uguale all'angolo BED (I, 8), e ciascuno dei due angoli AED, BED è retto (I, def. X); quindi GK divide AB per metà ed è ad essa perpendicolare[b]. E poiché, se in un cerchio una retta divide un'altra retta per metà ed è perpendicolare ad essa, il centro del cerchio è sulla retta secante (III, 1, coroll.), il centro del cerchio è su GK. Per la stessa ragione, il centro del cerchio ABC è pure su HL. E le rette GK, HL non hanno nessun altro punto in comune tranne il punto D; il punto D è quindi il centro del cerchio ABC.

Dunque, se si prende un punto internamente ad un cerchio... (secondo l'enunciato)[6]. – C.D.D.

APPLICA: I, 8, 10; III, 1 coroll.

È APPLICATA IN: III, 25.

a. Letteralmente: risultino infatti tracciate le rette congiungenti AB, BC, divise esse per metà nei punti E, F, e le rette congiungenti EF, FD trasportate, condotte oltre, nei punti G, K, H, L.

b. Letteralmente: «quindi GK divide AB per metà e ad angoli retti», naturalmente.

[6] Per quanto riguarda il metodo seguito per la dimostrazione di questo teorema III, 9 che dà una proprietà caratteristica del centro di un cerchio, si veda la nota alla prop. 8 precedente. La conoscenza delle proprietà del

PROPOSIZIONE 10.

Un cerchio non taglia un altro cerchio in più di due punti [a].

Infatti, se fosse possibile, il cerchio *ABC* tagli il cerchio *DEF* in più di due punti, cioè in *B*, *G*, *F*, *H*, si traccino le congiungenti *BH*, *BG* e si dividano esse per metà nei punti *K*, *L* (I, 10), e, dopo aver condotto *KC*, *LM* perpendicolarmente a *BH*, *BG* rispettivamente per *K*, *L* (I, 11), si prolunghino *KC*, *LM* oltre *K*, *L* sino ai punti *A*, *E* [b].

Poiché dunque nel cerchio *ABC* una retta *AC* divide un'altra retta *BH* per metà ed è perpendicolare ad essa, il centro del cerchio *ABC* è su *AC* (III, 1, coroll.). Di nuovo, poiché nello stesso cerchio *ABC* una retta *NO* divide un'altra retta *BG* per metà e le è perpendicolare, il centro del cerchio *ABC* è su *NO* (id.). Ma fu dimostrato che esso è pure su *AC*, e le rette *AC*, *NO* non si incontrano in nessun altro punto eccetto che in *P*; quindi il punto *P* è il centro del cerchio *ABC*. Similmente potremo dimostrare che *P* è centro anche del cerchio *DEF*; perciò i due cerchi *ABC*, *DEF*, che si tagliano fra loro, avrebbero lo stesso centro, cioè *P*: il che è impossibile (III, 5).

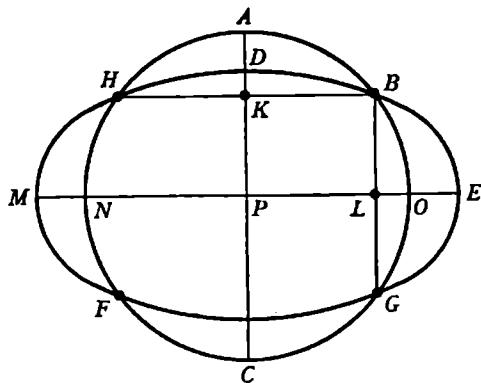
a. Ad essere precisi, è la circonferenza di un cerchio che non taglia quella di un altro in più di due punti; la parola *cerchio* (κύκλος) è qui usata, e non ordinariamente, al posto di *circonferenza* (περιφέρεια) di un cerchio.

b. Letteralmente: « e dopo che si siano tracciate le congiungenti *BH*, *BG*, siano esse divise per metà nei punti *K*, *L*, e dopo che *KC*, *LM* siano state condotte ad angoli retti da *K*, *L* a *BH*, *BG*, risultino esse trasportate sino ai punti *A*, *E* ». L'avverbio *rispettivamente* è spesso usato nella traduzione, per perspicuità, anche se il testo non lo rechi.

cerchio si arricchisce notevolmente con questa prop. III, 9, la quale viene utilizzata nel séguito del libro III nella prop. 25, per la risoluzione del problema fondamentale della costruzione dell'intero cerchio partendo da un segmento circolare dato.

Dunque, un cerchio non taglia un altro cerchio... (secondo l'enunciato)[7]. - C.D.D.

APPLICA: I, 10, 11; III, 1 coroll., III, 5.

È APPLICATA IN: III, 24.

PROPOSIZIONE 11.

Se due cerchi sono tangenti fra loro internamente e si trovano i loro centri[a]*, la retta che congiunge i centri* [*stessi*][b], *se inoltre prolungata, cadrà nel*[c] *punto di contatto dei cerchi*[d].

a. Letteralmente: e si prendono i loro centri.
b. Letteralmente: «la retta congiunta ai loro centri».
c. Letteralmente: sul.
d. Il *punto di contatto* è qui detto in greco συναφή, mentre nell'enunciato di III, 12 troviamo ἐπαφή. Dobbiamo a questo

[7] Nella figura le due circonferenze sembrerebbero avere quattro punti comuni, ma effettivamente la dimostrazione parte dall'ipotesi (che vien mostrata assurda) che le due circonferenze abbiano tre punti comuni H, B, G: il quarto punto F non viene preso in considerazione.

Secondo Heath (*op. cit.*, vol. II, p. 24), «la dimostrazione di Euclide contiene un'assunzione non provata, cioè che le rette che bisecano BG, BH ad angoli retti s'incontrano in un punto P». Ma ciò non è esatto. Una dimostrazione del genere va fatta quando si vuole far vedere che per tre punti non allineati passa un cerchio: va allora applicato il quinto postulato. Anzi, come ricorda l'ENRIQUES (*op. cit.*, vol. I, p. 206), «l'esistenza d'un cerchio passante per tre punti arbitrari costituisce un'assunzione capace di surrogare il postulato di Euclide delle parallele».

Ma qui nulla di tutto ciò. Il cerchio ABC è dato, e deve avere un centro: centro che è univocamente determinato, come mostra la III, 1.

Quindi se il centro del cerchio deve trovarsi tanto sulla AC quanto sulla NO, necessariamente queste due rette si devono incontrare. Lo stesso si dica per il centro del secondo cerchio, centro che viene così a coincidere col primo. Ma ciò è contro la proposizione III, 5 la quale mostra che se due cerchi si tagliano non possono avere lo stesso centro: il teorema III, 10 risulta così dimostrato.

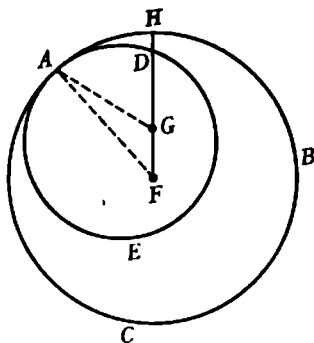
Infatti, i due cerchi ABC, ADE siano tangenti fra loro internamente nel punto A, e si prendano il centro F del

punto indicare qualcosa d'importante: ad evidenziare interpolazioni avvenute nel testo prima di Teone, accanto all'evidenza interna, al codice P, e ad alcuni frammenti di antichi papiri, di scoperta a lui coeva, Heiberg ha usato il commentario arabo di an-Nairīzī (m. intorno al 922 d. C.) ad Euclide, che ha ricche citazioni di un commentario ad Euclide di Erone di Alessandria (datazione di questi assai oscillante, fra il 50 a. C. ed il III sec. d. C.), commentario che doveva pervenire almeno sino a VIII, 27, poiché l'ultimo riferimento ad Erone in an-Nairīzī è nella nota a VIII, 27 (cfr. per questo *Anaritii in decem libros priores Elementorum Euclidis Commentarii ex interpretatione Gherardi Cremonensis in codice Cracoviensi 569 servata* edidit Maximilianus Curtze, Lipsia, Teubner, 1899, quale volume di supplemento alla edizione di Euclide di Heiberg e Menge). Ora, an-Nairīzī permette così di scoprire spesso differenze fra il nostro testo e quello che evidentemente era a disposizione di Erone, e di identificare certe interpolazioni che si sono introdotte in Euclide proprio partendo dal commentario di Erone. È questo il caso della dimostrazione alternativa di III, 10, cioè della proposizione precedente, e quel che più importa, della fondamentale proposizione III, 12. Dice infatti Erone su III, 11: « Euclide nella proposizione 11 ha supposto che i due cerchi si tocchino internamente, ha fatto trattare dalla sua proposizione questo caso e provato ciò che era cercato in essa. *Ma io mostrerò come ciò debba essere dimostrato se il contatto è esterno* », e poiché egli dà sostanzialmente la prova e la figura di III, 12, né Erone dunque, per quanto è riportato in an-Nairīzī, né lo stesso an-Nairīzī (ed. Curtze, pp. 121-122), dovevano avere III, 12. Anzi, an-Nairīzī, come pure Giovanni Campano di Novara (XIII sec.), uno dei primi traduttori latini degli *Elementi* di Euclide, sia pure da fonte araba, con la sua traduzione dei 15 Libri di *Elementi*, comprendente cioè anche il 14° e 15° non euclidei, numerano ambedue come prop. XII la proposizione 13 del testo di Heiberg. Deriva da ciò, molto probabilmente, che la 12 non sia di Euclide, ma che Teone o qualche altro editore abbia aggiunto, nella sua edizione, la dimostrazione su citata di Erone, facendone appunto la proposizione III, 12 (cfr. HEATH, *op. cit.*, v. 2, p. 28). (Per Campano, cfr. *Euclidis Megarensis philosophi acutissimi mathematicorumque omnium sine controversia principis opera a Campano interprete fidissimo tralata... Lucas Paciolus... detersit... emendavit...*, Venetiis, 1509, 18 *r.*; può servire al posto dell'edizione del 1482).

cerchio ABC ed il centro G del cerchio ADE (III, 1; III, 6); dico che la retta la quale congiunge G con F, se prolungata, verrà a cadere in A.

Non sia difatti in tal modo, ma, se possibile, venga a cadere come fa la retta FGH, e si traccino le congiungenti AF, AG.

Poiché dunque la somma di AG, GF è maggiore di FA (I, 20), cioè di FH, si sottragga in comune la retta FG [alla somma di AG, GF ed alla retta FH]; la retta che rimane [della somma], AG, è quindi maggiore della [parte di retta] rimanente, GH. Ma AG è uguale a GD, per cui anche GD è maggiore in tal caso di GH, la retta minore della maggiore: il che è impossibile (noz. com. VIII); quindi la retta che congiunge F con G non può cadere fuori del punto di contatto[a]; essa perciò verrà a cadere in A, ossia nel punto di contatto.

Dunque, se due cerchi sono tangenti fra loro internamente... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 20; III, 1.

È APPLICATA IN: III, 13.

PROPOSIZIONE 12.

Se due cerchi sono tangenti fra loro esternamente, la retta che congiunge i loro centri passerà per il punto di contatto.

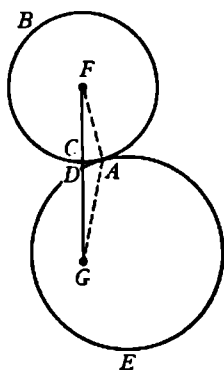
Infatti, i due cerchi ABC, ADE siano tangenti fra loro esternamente nel punto A, e si prendano il centro F di ABC ed il centro G di ADE (III, 1; III, 6); dico che la retta, la

a. Letteralmente: « esternamente al cerchio »; la traduzione *fuori del punto di contatto* si giustifica anche dalla proposizione seguente.

quale congiunge *F* con *G*, passerà per il punto di contatto in *A*.

Non sia difatti in tal modo, ma, se possibile, venga a passare come fa la retta *FCDG*, e si traccino le congiungenti *AF*, *AG*.

Poiché dunque il punto *F* è il centro del cerchio *ABC*, si ha che *FA* è uguale a *FC*. Di nuovo, poiché il punto *G* è il centro del cerchio *ADE*, si ha che *GA* è uguale a *GD*. Ma fu dimostrato che pure *FA*, *FC* sono uguali; la somma di *FA*, *AG* è quindi uguale alla somma di *FC*, *GD*, cosicché tutta quanta la retta *FG* è maggiore della somma di *FA*, *AG*; ma essa sarebbe anche minore (I, 20): il che è impossibile. Perciò la retta che congiunge *F* con *G* non potrà cadere sulla circonferenza fuori del[a] punto di contatto *A*; passerà quindi per il medesimo.

Dunque, se due cerchi sono tangenti fra loro esternamente... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 20; III, 1.

PROPOSIZIONE 13.

Un cerchio non può toccare[b] *un altro cerchio in più di un punto, sia ad esso tangente internamente, sia esternamente*[8].

a. Letteralmente: non potrà non passare per il contatto nel punto *A*.

b. Letteralmente: « non tocca »; useremo il verbo *potere* altre volte, quando vi sia la sfumatura.

[8] Nelle precedenti proposizioni 11 e 12 viene mostrato in quale posizione i centri di due cerchi tangenti si trovano rispetto al punto di contatto: nella proposizione 13, poi, viene mostrato (utilizzando le due precedenti) che il punto di contatto è unico: che due cerchi, cioè, non possono *toccarsi* in più di un punto, ossia ancora che *non esistono cerchi*

Infatti, se fosse possibile, il cerchio *ABDC*[a] sia tangente al cerchio *EBFD* – dapprima internamente – in più punti di uno, cioè in *D*, *B*.

E si prendano il centro *G* del cerchio *ABDC*, ed il centro *H* del cerchio *EBDF* (III, 1 e III, 6).

Quindi, la retta che congiunge *G* con *H* cadrà in *B* ed in *D* (III, 11). Venga essa a cadere in tal modo, come fa la retta *BGHD*. Ora, poiché il punto *G* è il centro del cerchio *ABDC*, si ha che *BG* è uguale a *GD*, per cui *BG* è maggiore di *HD*; quindi *BH* è molto maggiore di *HD*. Di nuovo, poiché il punto *H* è il centro del cerchio *EBFD*, si ha che *BH* è uguale a *HD*; ma fu dimostrato che è anche

a. Euclide scrive *ABCD*, in III, 13 ed in III, 14, mentre per mantenere l'ordine dei punti nella figura noi diremmo, come tradotto, *ABDC*.

bitangenti. Che possano considerarsi *i centri* dei due cerchi tangenti, è conseguenza della precedente prop. III, 6 (due cerchi tangenti non hanno lo stesso centro).

Vengono distinti nella prop. 13 i due casi dei cerchi tangenti internamente o esternamente: così pure la prop. 11 si rivolge al primo caso, la prop. 12 al secondo.

Va però avvertito che è assai dubbia l'autenticità della III, 12 (cfr. nota *d*, prop. 11): infatti, come ricorda Heath (*op. cit.*, vol. II, p. 28) Erone cita Euclide per la sua dimostrazione della III, 11, ma poi aggiunge: « Ed io farò vedere come (il teorema) va dimostrato se i cerchi sono tangenti esternamente » e dà una dimostrazione che è press'a poco uguale a quella della III, 12.

La III, 13 si fonda sulla proprietà dell'allineamento dei centri con il punto di contatto, dimostrata in III, 11, 12.

La dimostrazione della III, 13 può offrire qualche difficoltà interpretativa nella parte finale, riguardante i cerchi tangenti internamente. Si suppone che, se possibile, i punti di contatto siano due (*A* e *C*) e si congiungono mediante la retta *AC*. Per la III, 2 la retta *AC* deve cadere internamente tanto ad un cerchio quanto all'altro. Ma i due cerchi sono per ipotesi tangenti, quindi *non si tagliano* (definizione terza del libro terzo).

Ma se avessero una corda comune *AC*, questa taglierebbe in parti i due cerchi, che avrebbero una parte comune (somma di due segmenti circolari aventi in comune la corda *AC*, considerata una volta come corda d'un cerchio, altra volta come corda dell'altro cerchio).

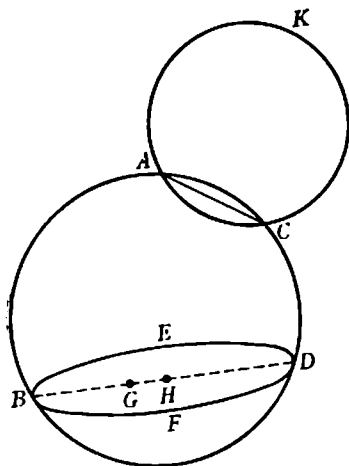
Per evitare il *taglio* dei due cerchi, Euclide ricava che se la retta *AC* è interna ad uno dei due cerchi, essa deve essere esterna all'altro, contro il risultato ricavato dalla III, 2; di qui l'assurdità dell'ipotesi della *bitangenza* dei due cerchi.

molto maggiore di essa: il che è impossibile; dunque un cerchio non è tangente internamente ad un altro cerchio in più di un punto.

Dico adesso che ciò non può darsi neppure [per cerchi tangenti] esternamente.

Infatti, se fosse possibile, sia il cerchio *ACK* tangente al cerchio *ABDC* in più punti di uno, cioè in *A*, *C*, e si tracci la congiungente *AC*.

Poiché dunque risultano presi sulle circonferenze dei due cerchi *ABDC*, *ACK*, due punti *A*, *C* a piacere, la retta che congiunge i punti cadrà all'interno di ciascuno dei due cerchi (III, 2); ma essa cade di necessità internamente al cerchio *ABDC* (III, def. III) e risulta insieme cadere esternamente a quello *ACK*[a]: il che è assurdo; quindi un cerchio non può esser tangente esternamente ad un altro cerchio in più di un punto. E fu dimostrato che ciò non si dà neppure internamente.

Dunque, un cerchio non può toccare un altro cerchio... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: III, 2, 11.

a. Testo non chiaro – in greco abbiamo soltanto: « ma essa venne a cadere, risulta cadere, internamente al cerchio *ABCD* ed esternamente a quello *ACK* ».

PROPOSIZIONE 14.

In un cerchio rette (= corde) uguali distano ugualmente dal centro, e quelle che distano ugualmente dal centro sono uguali fra loro[9].

Sia $ABDC$ un cerchio, ed AB, CD siano in esso corde uguali; dico che AB, CD distano ugualmente dal centro.

Infatti, si prenda il centro del cerchio $ABDC$ e sia esso E (III, 1), da E si conducano EF, EG perpendicolari ad AB, CD (I, 12), e si traccino le congiungenti AE, EC.

Poiché dunque una retta EF, che passa per il centro, è perpendicolare ad[a] un'altra retta AB che non passa per il centro, la divide anche per metà (III, 3). Quindi AF è uguale a FB, ed AB è doppia[b] di AF. Per la stessa ragione, pure CD è doppia di CG; ed AB, CD sono uguali; perciò anche AF, CG sono uguali (noz. com. VI). E poiché AE è

a. Letteralmente: divide ad angoli retti.

b. Qui l'aggettivo è letteralmente *doppia*, διπλῆ; ne viene che la traduzione *il doppio, il triplo*, corrisponde di solito all'aggettivo διπλάσιος, τριπλάσιος, due volte, tre volte tanto, e *doppio*, *doppia*, alla letterale corrispondenza greca. Ricordiamo inoltre, per completezza, che pure con *il doppio del*, e formule similari, traduciamo espressioni come τὸ ὀρθογώνιον περιεχόμενον ὑπὸ δὶς τῶν εὐθειῶν, cioè il rettangolo compreso da due volte i lati, ecc.

[9] Euclide non dà una definizione generale della distanza di un punto da una retta, ma si riferisce al caso della distanza tra il centro e una corda del cerchio. Anzi non definisce neppure tale distanza, ma solo l'uguaglianza delle distanze tra il cerchio e due corde dello stesso cerchio (definizione quarta del libro terzo).

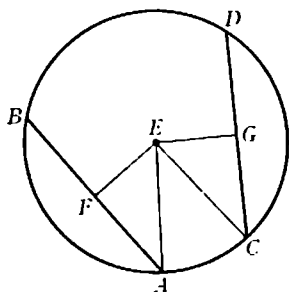
È tale definizione che viene applicata in questa prop. 14. Finalmente nella seguente prop. 15 Euclide si riferisce alla definizione quinta per quanto riguarda la disuguaglianza tra distanze dello stesso genere.

La distanza tra centro e corda viene cioè definita *per astrazione* (cfr. nota alla def. IV del libro quinto).

Per dimostrare l'uguaglianza dei due triangoli rettangoli AFE, EGC Euclide non ricorre al cosiddetto quarto criterio di uguaglianza (che dall'uguaglianza delle ipotenuse e di una coppia di cateti, deduce l'uguaglianza dei cateti dell'altra coppia), ma ricorre al teorema di Pitagora (I, 47), assumendo che se due quadrati hanno i lati uguali essi sono uguali, e inversamente che se due quadrati sono uguali essi hanno i lati uguali.

uguale ad *EC*, pure il quadrato di *AE* è uguale al quadrato di *EC*. Ma al quadrato di *AE* è uguale la somma dei quadrati di *AF*, *EF* – difatti l'angolo in *F* è retto –, ed al quadrato di *EC* è uguale la somma dei quadrati di *EG*, *GC* – l'angolo in *G* è difatti retto (I, 47) –; la somma dei quadrati di *AF*, *FE* è quindi uguale alla somma dei quadrati di *CG*, *GE*, e di esse il quadrato di *AF* è uguale al quadrato di *CG* – difatti *AF* è uguale a *CG* –, per cui il quadrato di *FE*, che rimane [sottraendo], è uguale al quadrato di *EG* (noz. com. III); quindi *EF* è uguale ad *EG*. Ma in un cerchio si dice che rette distano ugualmente dal centro, quando le perpendicolari condotte ad esse dal centro sono uguali (III, def. IV); dunque *AB*, *CD* distano ugualmente dal centro.

Ma si supponga ora che le rette *AB*, *CD* distino ugualmente dal centro, ossia *EF* sia uguale ad *EG*. Dico che sono uguali anche *AB*, *CD*.

Infatti, eseguita la medesima costruzione, dimostreremo similmente che *AB* è doppia di *AF*, e *CD* doppia di *CG*; e poiché *AE* è uguale a *CE*, il quadrato di *AE* è uguale al quadrato di *CE*; ma la somma dei quadrati di *EF*, *FA* è uguale al quadrato di *AE*, mentre al quadrato di *CE* è uguale la somma dei quadrati di *EG*, *GC* (I, 47). La somma dei quadrati di *EF*, *FA* è quindi uguale alla somma dei quadrati di *EG*, *GC*; e di esse il quadrato di *EF* è uguale al quadrato di *EG* – difatti *EF* è uguale ad *EG* –, per cui il quadrato di *AF*, che rimane sottraendo, è uguale al quadrato di *CG* (noz. com. III); quindi *AF* è uguale a *CG*. Ma *AB* è doppia di *AF*, e *CD* doppia di *CG*; perciò *AB* è uguale a *CD* (noz. com. V).

Dunque, in un cerchio rette (= corde) uguali distano ugualmente dal centro... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 12, 47; III, 1, 3.

È APPLICATA IN: III, 15.

PROPOSIZIONE 15.

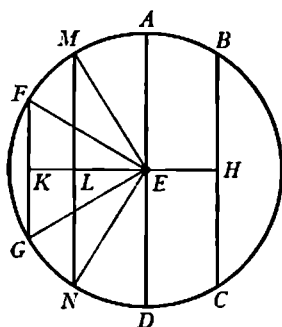
In un cerchio il diametro è la corda massima, e delle altre corde quella che è più vicina al centro è sempre maggiore di quella più lontana.

Siano *ABCD* un cerchio, *AD* un suo diametro ed *E* il suo centro (I, 10), e *BC* sia una corda più vicina, e *FG* una più lontana, rispetto al diametro *AD*; dico che *AD* è la corda massima, e che *BC* è maggiore di *FG*.

Infatti, dal centro *E* si conducano *EH*, *EK* perpendicolari a *BC*, *FG* (I, 12). E poiché *BC* è più vicina al centro e *FG* ne è più lontana, *EK* è maggiore di *EH* (III, def. V). Si ponga *EL* uguale ad *EH*, si conduca per *L* la perpendicolare *LM* ad *EK* (I, 11), prolungandola poi sino a *N* [a], e si traccino le congiungenti *ME*, *EN*, *FE*, *EG*.

Ora, poiché *EH* è uguale ad *EL*, anche *BC* è uguale a *MN* (III, 14) [10]. Di nuovo, poiché *AE* è uguale ad *EM*, ed *ED* è uguale ad *EN*, si ha che *AD* è uguale alla somma di *ME*, *EN*. Ma la somma di *ME*, *EN* è maggiore di *MN* (I, 20); e *MN* è uguale a *BC*; quindi *AD* è maggiore di *BC*. E poiché i due lati *ME*, *EN* sono uguali ai due lati *FE*, *EG*, e l'angolo *MEN* è maggiore dell'angolo *FEG*, la base *MN* è maggiore della base *FG* (I, 24). Ma fu dimostrato che *MN* è uguale a *BC*. Perciò il diametro *AD* è la corda massima e la corda *BC* è maggiore di quella *FG*.

a. Letteralmente: e risulti *LM*, condotta ad angoli retti per *L* ad *EK*, trasportata, condotta oltre, sino a *N*,...

[10] Euclide costruisce $MN = BC$ dall'altra parte di *BC* rispetto al diametro *AD* per poter applicare nella seconda parte del teorema la prop. I, 24 (caso di due triangoli aventi due lati rispettivamente uguali e gli angoli compresi disuguali: si deduce la disuguaglianza, nello stesso senso dei rispettivi angoli, dei terzi lati), proposizione che, a parte l'applicazione per l'inversa I, 25, trova impiego esclusivamente nel libro terzo, in questa III, 15 ed anche per le proposizioni III, 7 e III, 8, come abbiamo già veduto.

Dunque, in un cerchio il diametro... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 10, 11, 12, 14, 20, 24.

PROPOSIZIONE 16.

In un cerchio, una retta che sia tracciata perpendicolare al diametro[a] *partendo da un estremo di questo, cadrà esternamente al cerchio, nessun'altra retta potrà interporsi nello spazio fra la retta e la circonferenza, e l'angolo del semicerchio è maggiore, e quello che rimane [fra la retta e la circonferenza] minore, di ogni angolo acuto rettilineo*[11].

a. Alla lettera, è ripetuto ancora *del cerchio*.

[11] Questa proposizione sedicesima del libro terzo è assai importante, sia dal punto di vista strettamente storico, sia da quello della comprensione della pur importante definizione quarta del libro quinto (cfr. nota ivi).

La proposizione in questione è, infatti, la più vistosa traccia che la considerazione degli angoli a lati curvilinei abbia lasciato negli *Elementi* euclidei. Ed è proprio questa proposizione che spiega i motivi che hanno indotto Euclide (e, quasi certamente, Eudosso prima di lui) ad *abbandonare* gli angoli curvilinei.

Questi ultimi venivano ancora considerati, tuttavia, ai tempi di Aristotele, cioè circa una trentina d'anni prima degli *Elementi*: lo rileviamo dalla dimostrazione che, per mezzo degli angoli curvilinei, Aristotele dà del teorema sull'uguaglianza degli angoli alla base del triangolo isoscele (*Analytica priora*, I, 24, 41*b*, 13-22: cfr. inoltre l'edizione degli *Elementi* di Heath, vol. I, p. 253, e quella di Enriques, vol. I, pp. 60-61).

E, del resto, ancora nella definizione di angolo che Euclide dà all'inizio degli *Elementi*, c'è, sia pure in linea indiretta, un riferimento agli angoli curvilinei: nella def. VIII, infatti, si parla di *linee* che sono i lati dell'angolo, mentre nella def. IX si precisa che se dette linee sono rette, l'angolo si chiama rettilineo. Altre tracce degli angoli curvilinei si trovano pure nella def. VII del libro terzo.

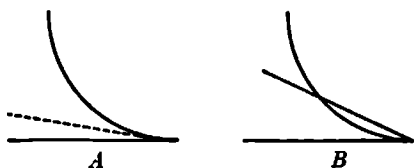
Qui, in questa III, 16, si viene in sostanza a dimostrare una proposizione che in linguaggio moderno esprimeremmo dicendo che l'insieme

Sia ABC un cerchio, di centro D e diametro AB[a]; dico che la retta, tracciata perpendicolarmente ad AB dal suo estremo A, cadrà esternamente al cerchio.

a. Letteralmente: Sia ABC un cerchio, intorno (cioè, descritto intorno) al centro D ed al diametro AB.

degli angoli rettilinei e curvilinei non è archimedeo, cioè non soddisfa al cosiddetto postulato di Archimede. E poiché detto postulato costituisce elemento basilare per la teoria delle proporzioni tra grandezze, Euclide lo enuncia sotto forma di definizione (def. IV del libro quinto, cfr. ivi) dichiarando che le grandezze che egli prenderà in considerazione, cioè aventi tra loro a due a due rapporto, sono soltanto quelle soddisfacenti alla condizione che ciascuna di esse, moltiplicata, superi l'altra, cioè soddisfacenti a quello che i tardi posteri chiameranno impropriamente il postulato di Archimede.

Sicché, una volta dimostrato in questa III, 16 che gli angoli rettilinei e curvilinei presi insieme non soddisfano al postulato in questione, la def. V, 4 viene a stabilire che gli angoli curvilinei vanno esclusi dalla trattazione.

In questa III, 16 Euclide considera la condizione espressa dal postulato di Archimede sotto la forma del sottomultiplo oltre che sotto quella del multiplo. Cioè mostra che è impossibile che un sottomultiplo di un angolo rettilineo possa essere minore di un certo angolo curvilineo (il cosiddetto *angolo di contingenza*). Infatti egli dimostra che dato un cerchio e una retta ad esso tangente è impossibile inserire una retta tra la circonferenza e la retta tangente. È impossibile, cioè, realizzare la figura *A*: si presenta invece sempre la figura *B*: l'angolo di contingenza (quello compreso tra la tangente e la circonferenza) è minore di qualunque angolo (acuto) rettilineo, e quindi minore di qualunque sottomultiplo di esso, che è pur sempre ancora un angolo (acuto) rettilineo.

La dimostrazione è estremamente semplice, e procede col metodo di riduzione all'assurdo: la retta che si suppone di poter inserire tra circonferenza e tangente, essendo distinta da quest'ultima, non è perpendicolare al raggio condotto per il punto di contatto. Abbassando perciò dal centro del cerchio la perpendicolare su detta retta supposta *infiltrata* tra cerchio e tangente, si viene a generare un triangolo rettangolo nel quale l'ipotenusa (il raggio del cerchio) risulterebbe minore di uno dei cateti (il segmento di perpendicolare): di qui l'assurdo.

Dell'angolo di contingenza si occuparono a più riprese i matematici attraverso i secoli: detto angolo è nullo o non è nullo?

Per una storia di queste discussioni si veda l'edizione degli *Elementi* di Enriques (vol. I, pp. 216-220), in particolar modo il cenno su Newton,

Infatti, supponiamo non sia così, ma, se possibile, la retta cada internamente come fa *CA*, e si tracci la congiungente *DC*.

Poiché *DA* è uguale a *DC*, anche l'angolo *DAC* è uguale all'angolo *ACD* (I, 5). Ma *DAC* è retto, per cui anche *ACD* è retto; dunque nel triangolo *ACD* la somma dei due angoli *DAC*, *ACD* sarebbe uguale a due retti: il che è impossibile (I, 17). Quindi la retta tracciata dal punto *A* perpendicolarmente a *BA* non cadrà internamente al cerchio. Similmente potremo dimostrare che non verrà a cadere neppure sulla circonferenza; dunque cadrà esternamente.

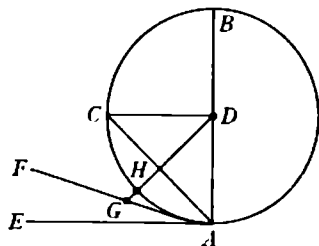
Cada essa come fa *AE*; dico ora che nessun'altra retta potrà interporsi fra la retta *AE* e la circonferenza *CHA*.

Infatti, se fosse possibile, venga un'altra retta ad interporsi, com'è della retta *FA*, e dal punto *D* si conduca *DG* perpendicolare a *FA* (I, 12). E poiché l'angolo *AGD* è retto, e l'angolo *DAG* è minore di un retto, *AD* è maggiore di *DG* (I, 19). Ma *DA* è uguale a *DH*; quindi *DH* è in tal caso maggiore di *DG*, la retta minore della maggiore: il che è impossibile (noz. com. VIII). Dunque nello spazio fra la retta e la circonferenza non potrà interporsi nessun'altra retta.

Dico inoltre che l'angolo del semicerchio, ossia quello compreso dalla retta *BA* e dalla circonferenza *CHA*, è maggiore di ogni angolo acuto rettilineo, e che l'angolo restante, compreso dalla circonferenza *CHA* e dalla retta *AE*, è minore di ogni angolo acuto rettilineo. Infatti, se potesse esservi un angolo acuto rettilineo maggiore dell'angolo compreso dalla retta *BA* e dalla circonferenza *CHA*, e minore invece di quello compreso dalla circonferenza *CHA* e dalla retta *AE*, nello spazio fra *CHA* e la retta *AE* verrebbe ad interporsi una retta, la quale formerebbe un angolo rettilineo che sarebbe maggiore di quello compreso dalla retta *BA* e dalla

il quale trovò nelle osservazioni di alcuni predecessori *il nodo del problema*: « cioè che la misura dell'angolo di contingenza mette in giuoco non più le direzioni delle tangenti (prime derivate), bensì le curvature (seconde derivate) ».

circonferenza CHA, e minore invece dell'angolo compreso dalla circonferenza CHA e dalla retta AE. Ma nessuna retta può interporsi; non potrà quindi esservi alcun angolo acuto rettilineo che sia maggiore dell'angolo compreso dalla retta BA e dalla circonferenza CHA, né che sia minore dell'angolo compreso dalla circonferenza CHA e dalla retta CE.

Dunque, in un cerchio, una retta... (secondo l'enunciato).

APPLICA: I, 5, 12, 17, 19.

COROLLARIO.

È da ciò evidente che la retta tracciata perpendicolarmente al diametro di un cerchio, da un estremo del diametro, è tangente al cerchio[a]. – C.D.D.

È APPLICATO IN: III, 17, 33, 37; IV, 3, 4, 7, 8, 12, 13; XII, 16.

PROPOSIZIONE 17.

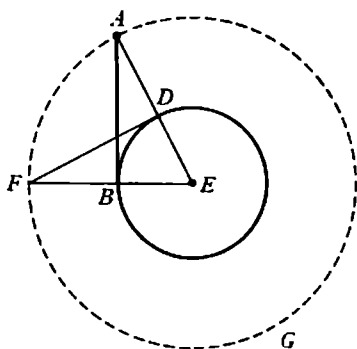
Condurre da un punto dato una linea retta che sia tangente ad un cerchio dato.

Siano A il punto dato, e BCD il cerchio dato; si deve dunque condurre dal punto A una linea retta che sia tangente al cerchio BCD.

Infatti, si prenda il centro E del cerchio (III, 1), si tracci la congiungente AE e con centro E e per raggio EA si descriva il cerchio AFG, da D si conduca DF perpendicolare

a. Heiberg omette, ritenendola sicura interpolazione di Teone, la parte del corollario ritrovabile in greco e che dice « e che una retta è tangente ad un cerchio in un punto soltanto, poiché è stato difatti dimostrato che una retta la quale lo incontri in due punti cade internamente ad esso ».

ad *EA* (I, 11), e si traccino le congiungenti *EF*, *AB*; dico che *AB* è stata condotta dal punto *A* in modo da essere tangente al cerchio *BCD*.

Poiché difatti *E* è il centro dei cerchi *BCD*, *AFG*, sono uguali *EA* ad *EF*, ed *ED* ad *EB*; quindi i due lati *AE*, *EB* sono uguali ai due lati *FE*, *ED*; e comprendono un angolo comune, cioè l'angolo in *E*; la base *DF* è quindi uguale alla base *AB*, il triangolo *DEF* è uguale al triangolo *BEA*, e gli angoli rimanenti del primo sono uguali agli angoli rimanenti del secondo (I, 4); perciò l'angolo *EDF* è uguale all'angolo *EBA*. Ma *EDF* è retto; quindi anche *EBA* è retto. Ora, *EB* è un raggio, ed una retta tracciata perpendicolarmente ad un diametro da un estremo di esso è tangente al cerchio [cui il diametro appartiene] (III, 16, coroll.); la retta *AB* è perciò tangente al cerchio *BCD*.

Dunque, dal punto dato *A* è stata condotta la linea retta *AB* tangente al cerchio dato *BCD*. – C.D.F.

APPLICA: I, 4, 11; III, 1, 16 coroll.

È APPLICATA IN: III, 37.

PROPOSIZIONE 18.

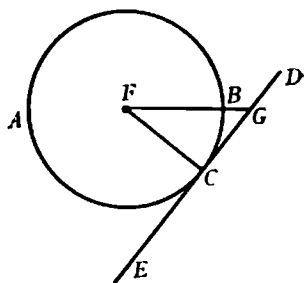
Se una retta è tangente ad un cerchio, e si congiunge[a] *il centro col punto di contatto, la retta congiungente sarà perpendicolare alla tangente.*

Infatti, una retta *DE* sia tangente al cerchio *ABC* nel punto *C*: si prenda il centro *F* del cerchio *ABC* (III, 1), e da *F* a *C* si tracci la congiungente *FC*; dico che *FC* è perpendicolare a *DE*.

a. Letteralmente: e si traccia un'altra retta che congiunga.

Se difatti non lo fosse, sia *FG* la perpendicolare condotta da *F* a *DE*.

Poiché dunque l'angolo *FGC* è retto, l'angolo *FCG* è acuto (I, 17); ma ad angolo maggiore è opposto lato maggiore (I, 19), per cui *FC* è maggiore di *FG*; ma *FC* è uguale a *FB*; quindi anche *FB* sarebbe maggiore di *FG*, la retta minore della maggiore: il che è impossibile (noz. com. VIII). Quindi *FG* non è perpendicolare a *DE*. Similmente potremo dimostrare che non lo è nessun'altra retta, eccetto *FC*; perciò *FC* è perpendicolare a *DE*.

Dunque, se una retta è tangente ad un cerchio... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 17, 19.

È APPLICATA IN: III, 19, 36, 37; IV, 7.

PROPOSIZIONE 19.

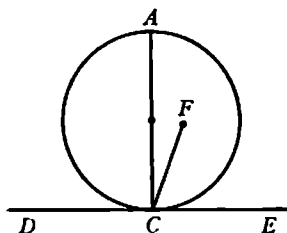
Se una retta è tangente ad un cerchio, e dal punto di contatto si conduce ad essa una perpendicolare[a], *il centro del cerchio sarà sulla retta così condotta.*

Infatti, una retta *DE* sia tangente al cerchio *ABC* nel punto *C*, e dal punto *C* si conduca la retta *CA* perpendicolare a *DE* (I, 11); dico che il centro del cerchio è su *AC*.

Non sia difatti in tal modo, ma, se possibile, sia *F* il centro, e si tracci la congiungente *CF*.

Poiché una retta *DE* è tangente al cerchio *ABC*, e dal centro al punto di contatto si è tracciata la congiungente *FC*, si ha che *FC* è perpendicolare a *DE* (III, 18); l'angolo *FCE* è quindi retto. Ma anche l'angolo *ACE* è retto, per cui gli angoli *FCE*, *ACE* sarebbero uguali, l'angolo minore

a. Letteralmente: si conduce ad angoli retti una linea retta alla tangente.

al maggiore: il che è impossibile (noz. com. VIII). Quindi F non è il centro del cerchio ABC. Similmente potremo dimostrare che nessun altro punto lo è, eccetto un punto su AC.

Dunque, se una retta è tangente ad un cerchio... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 11; III, 18.

È APPLICATA IN: III, 32.

PROPOSIZIONE 20.

In un cerchio, l'angolo al centro è il doppio dell'angolo alla circonferenza quando essi abbiano lo stesso arco come base.

Sia ABC un cerchio, l'angolo BEC sia un suo angolo al centro, mentre BAC sia un angolo alla circonferenza, ed abbiano essi lo stesso arco BC come base; dico che l'angolo BEC è il doppio dell'angolo BAC.

Infatti, si tracci la congiungente AE e la si prolunghi sino a F [a].

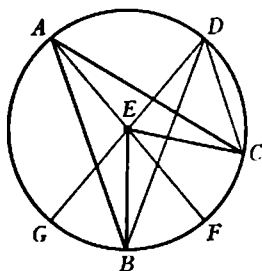
Poiché dunque EA è uguale ad EB, anche l'angolo EAB è uguale all'angolo EBA (I, 5), per cui la somma degli angoli EAB, EBA è il doppio dell'angolo EAB. Ma l'angolo BEF è uguale alla somma degli angoli EAB, EBA (I, 32); quindi anche l'angolo BEF è doppio di EAB. Per la stessa ragione, pure l'angolo FEC è doppio dell'angolo EAC. Quindi tutto quanto l'angolo BEC è doppio di tutto quanto l'angolo BAC.

Adesso si tracci, di nuovo, per B la retta BD e si congiunga D con C, in modo da formare [b] un altro angolo BDC, si tracci la congiungente DE e la si prolunghi oltre E sino al punto G. Similmente potremo dimostrare che l'angolo

a. Letteralmente: risulti la congiungente AE – dopo che sia stata tracciata – condotta sino a F.

b. Letteralmente: risulti l'angolo BEC tagliato da una retta in modo che vi sia.

GEC è doppio dell'angolo *EDC*; ma[a] l'angolo *GEB* è doppio dell'angolo *EDB*; l'angolo *BEC*, che rimane sottraendo, è perciò doppio dell'angolo *BDC*.

Dunque, in un cerchio, l'angolo al centro... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 5, 32.

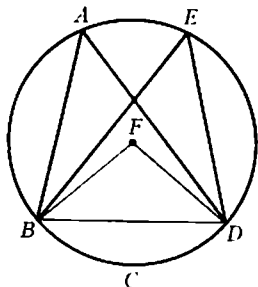
È APPLICATA IN: III, 21, 27; VI, 33.

PROPOSIZIONE 21.

In un cerchio, angoli [alla circonferenza iscritti][b] *in uno stesso segmento [circolare] sono uguali fra loro.*

Sia *ABCD* un cerchio, e *BAD*, *BED* siano angoli iscritti nello stesso segmento circolare *BAED*; dico che gli angoli *BAD*, *BED* sono uguali fra loro.

Infatti, si prenda il centro del cerchio *ABCD* e sia esso *F* (III, 1), e si traccino le congiungenti *BF*, *FD*.

Ora, poiché l'angolo *BFD* è un angolo al centro, e *BAD* è un angolo alla circonferenza, ed essi hanno lo stesso arco *BCD* come base, l'angolo *BFD* è il doppio dell'angolo *BAD* (III, 20). Per la stessa ragione, l'angolo *BFD* è pure il doppio dell'angolo *BED*; l'angolo *BAD* è quindi uguale all'angolo *BED* (noz. com. VI).

Dunque, in un cerchio, angoli alla circonferenza... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: III, 1, 20.

È APPLICATA IN: III, 22.

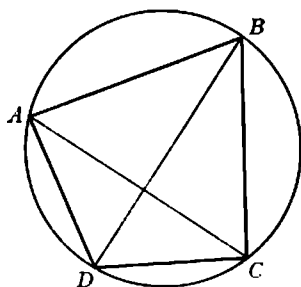
a. Letteralmente: e di essi.
b. Letteralmente: gli angoli nello stesso segmento.

PROPOSIZIONE 22.

In quadrilateri che siano [iscritti] in cerchi la somma degli angoli opposti è uguale a due retti.

Sia *ABCD* un cerchio, ed *ABCD* sia un quadrilatero [iscritto] in esso; dico che la somma degli angoli opposti è uguale a due retti.

Si traccino le congiungenti *AC*, *BD*.

Poiché dunque in ogni triangolo la somma dei tre angoli è uguale a due retti (I, 32), nel triangolo *ABC* la somma dei tre angoli *CAB*, *ABC*, *BCA* è uguale a due retti. Ma l'angolo *CAB* è uguale all'angolo *BDC* – sono difatti angoli alla circonferenza iscritti nello stesso segmento circolare *BADC* (III, 21) –; e l'angolo *ACB* è uguale all'angolo *ADB* – sono difatti angoli alla circonferenza iscritti nello stesso segmento circolare *ADCB* (id.) –; perciò tutto quanto l'angolo *ADC* è uguale alla somma degli angoli *BAC*, *ACB* (noz. com. II). Si aggiunga in comune l'angolo *ABC* [all'angolo *ADC* ed alla somma di *BAC*, *ACB*]; la somma degli angoli *ABC*, *BAC*, *ACB* è quindi uguale alla somma degli angoli *ABC*, *ADC* (noz. com. II). Ma la somma di *ABC*, *BAC*, *ACB* è uguale a due retti (I, 32). Perciò anche la somma di *ABC*, *ADC* è uguale a due retti (noz. com. I). Similmente potremo dimostrare che pure la somma degli angoli *BAD*, *DCB* è uguale a due retti.

Dunque, in quadrilateri che siano iscritti in cerchi... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 32; III, 21.

È APPLICATA IN: III, 31, 32.

PROPOSIZIONE 23.

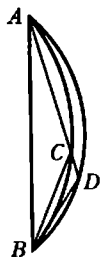
Su una stessa retta non si possono costruire, dalla stessa parte, due segmenti circolari simili e disuguali [a].

Infatti, se possibile, si costruiscano sulla stessa retta *AB*, dalla stessa parte, due segmenti circolari simili e disuguali, cioè *ACB*, *ADB*, e si traccino la retta *ACD* e le congiungenti *CB*, *DB* [b].

Poiché dunque il segmento *ACB* è simile al segmento *ADB*, e sono segmenti circolari simili quelli che contengono angoli uguali (III, def. XI), si ha che l'angolo *ACB* è in tal caso uguale all'angolo *ADB*, l'angolo esterno uguale all'angolo interno: il che è impossibile (I, 16).

Dunque, su una stessa retta... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

A
C
D
B

APPLICA: I, 16.

PROPOSIZIONE 24.

Segmenti circolari simili [che siano posti] su rette uguali sono uguali fra loro.

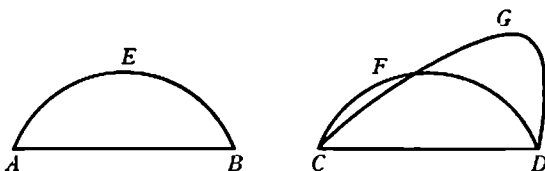
Infatti, siano *AEB*, *CFD* segmenti circolari simili posti sulle rette uguali *AB*, *CD*; dico che il segmento *AEB* è uguale al segmento *CFD*.

Se sovrapponiamo difatti il segmento circolare *AEB* al segmento circolare *CFD* ed il punto *A* viene a coincidere col punto *C* e la retta *AB* con la retta *CD*, anche il punto *B* verrà a coincidere col punto *D*, essendo *AB* uguale a *CD*;

a. Letteralmente: « due segmenti simili e disuguali di cerchi ». Usiamo per opportunità l'aggettivo *circolare* in simili espressioni in cui si parla di segmenti *di cerchi*, ma con altre parole interposte tra *segmenti* e *cerchi*.

b. Letteralmente: e condotta la retta *ACD*, risultino tracciate.

ed una volta che AB coincida con CD, pure il segmento circolare AEB coinciderà col segmento circolare CFD. Se difatti la retta AB coincidesse con la retta CD, ma il segmento AEB non coincidesse col segmento CFD, esso verrebbe a cadere internamente od esternamente all'altro, oppure verrebbe a deviare [dall'interno all'esterno][a] come fa il segmento circolare CGD, ed allora un cerchio taglierebbe un altro cerchio in più di due punti: il che è impossibile (III, 23 e III, 10). Perciò, se la retta AB coincide [in sovrapposizione] con la retta CD, anche il segmento circolare AEB non potrà non coincidere col segmento circolare CFD; coinciderà quindi con esso e sarà ad esso uguale (noz. com. VII).

Dunque, segmenti circolari simili... (secondo l'enunciato). - C.D.D.

APPLICA: III, 10.

È APPLICATA IN: III, 26.

PROPOSIZIONE 25.

Dato un segmento circolare, completare il cerchio di cui esso è segmento.

Sia ABC il segmento circolare dato; si deve dunque, del

a. Come nel caso simile di sovrapposizione in I, 8, dove si parlava di elementi di figure, i lati BA, AC ed ED, DF di due triangoli, che non coincidessero, ma « venissero ad incontrarsi in un punto G diverso da D » (in greco, semplicemente παραλλάξουσιν), qui la stessa parola παραλλάξει è usata di una figura che, sovrapposta ad un'altra, in parte verrà a mancarla, cioè a non coincidere con essa, ed in parte addirittura ad eccederla, cioè ancora a non coincidere per sovrabbondanza.

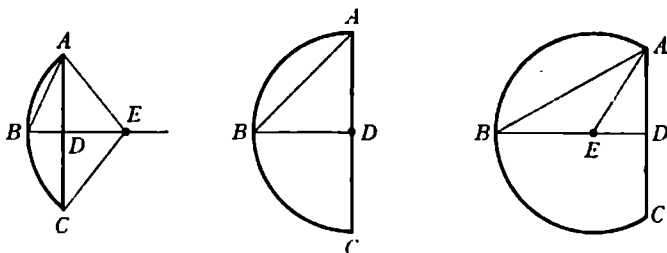
segmento *ABC*, completare il cerchio di cui è segmento (cioè: al quale appartiene).

Infatti, si divida *AC* per metà in *D* (I, 10), dal punto *D* si conduca la perpendicolare *DB* ad *AC* (I, 11), e si tracci la congiungente *AB*: l'angolo *ABD* è quindi maggiore, o uguale, o minore, dell'angolo *BAD*.

Dapprima sia esso maggiore, sulla retta *BA* e con vertice nel punto *A* di questa si costruisca l'angolo *BAE* uguale all'angolo *ABD* (I, 23), si prolunghi *BD* oltre *D* sino ad *E*, e si tracci la congiungente *EC*. Poiché dunque l'angolo *ABE* è uguale all'angolo *BAE*, anche la retta *EB* è uguale alla retta *EA* (I, 6). Ora, poiché *AD* è uguale a *DC* e *DE* è comune, i due lati *AD*, *DE* sono uguali rispettivamente ai due lati *CD*, *DE*; e l'angolo *ADE* è uguale all'angolo *CDE* – difatti ciascuno di essi è retto –; la base *AE* è quindi uguale alla base *CE* (I, 4). Ma fu dimostrato che *AE* è uguale a *BE*, per cui pure *BE*, *CE* sono uguali; le tre rette *AE*, *EB*, *EC* sono perciò uguali fra loro (noz. com. I); quindi il cerchio descritto con centro *E* e per raggio una delle rette *AE*, *EB*, *EC* verrà a passare anche per i punti rimanenti [del segmento circolare] e risulterà completato (III, 9 e post. III). Dato dunque un segmento circolare, ne è stato completato il cerchio. Ed è chiaro che il segmento circolare *ABC* è minore di un semicerchio, poiché il centro *E* si trova fuori di esso.

Similmente anche, nel caso in cui l'angolo *ABD* sia uguale all'angolo *BAD*, poiché *AD* è [allora] uguale a ciascuna delle due rette *BD*, *DC*, le tre rette *DA*, *DB*, *DC* saranno uguali fra loro, *D* sarà il centro del cerchio completato, ed *ABC* sarà evidentemente un semicerchio.

Qualora invece l'angolo *ABD* sia minore dell'angolo *BAD*, e costruiamo sulla retta *BA* con vertice nel suo punto *A* un angolo uguale all'angolo *ABD* (I, 23), il centro cadrà su *DB* internamente al segmento circolare *ABC*, ed il segmento circolare *ABC* sarà evidentemente maggiore di un semicerchio.

Dunque, dato un segmento circolare, ne è stato completato il cerchio [relativo]. – C.D.F.

APPLICA: I, 4, 6, 10, 11, 23; III, 9.

PROPOSIZIONE 26.

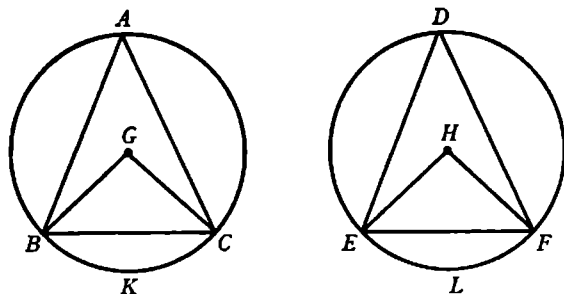
In cerchi uguali angoli uguali insistono[a] *su archi uguali, sia che essi siano angoli al centro o alla circonferenza.*

Siano *ABC*, *DEF* cerchi uguali, e siano in essi uguali gli angoli al centro *BGC*, *EHF*, e gli angoli alla circonferenza *BAC*, *EDF*; dico che l'arco *BKC* è uguale all'arco *ELF*.

Infatti, si traccino le congiungenti *BC*, *EF*.

Ora, poiché i cerchi *ABC*, *DEF* sono uguali, i raggi sono uguali; i due lati *BG*, *GC* sono così uguali ai due lati *EH*, *HF*; e l'angolo in *G* è uguale all'angolo in *H*; quindi la base *BC* è uguale alla base *EF* (I, 4). E poiché l'angolo in *A* è uguale all'angolo in *D*, il segmento circolare *BAC* è simile al segmento circolare *EDF* (III, def. XI), e sono posti su rette uguali; ma segmenti circolari simili che siano posti su rette uguali sono uguali fra loro (III, 24), per cui il segmento circolare *BAC* è uguale al segmento circolare *EDF*. Ma anche tutto quanto il cerchio *ABC* è uguale a tutto quanto il cerchio *DEF*; quindi l'arco *BKC*, che rimane [sottraendo dal cerchio *ABC* il relativo segmento], è uguale all'arco *ELF* [che rimane dell'altro] (noz. com. III).

a. Letteralmente: stanno, βεβήκασιν, risultano stare.

Dunque, in cerchi uguali angoli uguali... (secondo l'enunciato). - C.D.D.

APPLICA: I, 4; III, 24.

È APPLICATA IN: III, 27, 28; IV, 11, 15; XIII, 10.

PROPOSIZIONE 27.

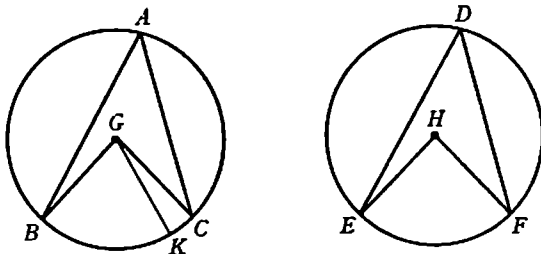
In cerchi uguali angoli che insistano su archi uguali sono uguali fra loro, sia che essi siano angoli al centro od alla circonferenza.

Infatti, nei cerchi uguali *ABC*, *DEF* insistano sugli archi uguali *BC*, *EF* gli angoli *BGC*, *EHF*, che sono angoli al centro [a], e gli angoli *BAC*, *EDF*, che sono angoli alla circonferenza; dico che l'angolo *BGC* è uguale all'angolo *EHF*, e che l'angolo *BAC* è uguale all'angolo *EDF*.

Se l'angolo *BGC* fosse difatti disuguale rispetto all'angolo *EHF*, uno di essi sarebbe maggiore. Sia maggiore *BGC*, e sulla retta *BG*, con vertice nel punto *G* di essa, si costruisca l'angolo *BGK* uguale all'angolo *EHF* (I, 23); ma angoli uguali insistono su archi uguali, quando siano angoli al centro (III, 26); quindi l'arco *BK* è uguale all'arco *EF*. Ma l'arco *EF* è uguale all'arco *BC*, per cui pure gli archi *BK*, *BC* sarebbero fra loro uguali (noz. com. I), l'arco minore al maggiore: il che è impossibile (noz. com. VIII). L'angolo *BGC*

a. Nel testo abbiamo *ai centri G, H* e, dopo, *angoli alle due circonferenze* (parlando degli angoli *BAC*, *EDF*).

non è quindi disuguale rispetto all'angolo *EHF*; dunque è uguale ad esso. E l'angolo in *A* è metà dell'angolo *BGC*, mentre l'angolo in *D* è metà dell'angolo *EHF* (III, 20); perciò anche gli angoli in *A*, *D* sono uguali (noz. com. VI).

Dunque, in cerchi uguali angoli che insistano... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 23; III, 20, 26.

È APPLICATA IN: III, 29; IV, 11, 12, 15; VI, 33; XII, 1, 17.

PROPOSIZIONE 28.

In cerchi uguali corde uguali insistono su archi uguali[a], [*nel senso che*] *l'arco maggiore è uguale a quello maggiore e l'arco minore è uguale al minore*[b].

Siano *ABC*, *DEF* cerchi uguali, ed *AB*, *DE* siano nei cerchi corde uguali che insistono sugli archi *ACB*, *DFE* quali archi maggiori, e sugli archi *AGB*, *DHE* quali archi minori; dico che l'arco maggiore *ACB* è uguale all'arco maggiore *DFE*, e che l'arco minore *AGB* è uguale all'arco *DHE*.

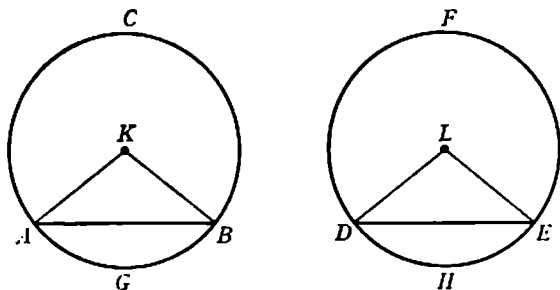
Infatti, si prendano i centri *K*, *L* dei cerchi (III, 1), e si traccino le congiungenti *AK*, *KB*, *DL*, *LE*.

Ora, poiché i cerchi sono uguali, anche i raggi sono uguali, per cui i due lati *AK*, *KB* sono uguali ai due lati

a. Il verbo greco ἀφαιροῦσι significa alla lettera *tolgono, portano via, rimuovono archi uguali*.

b. Letteralmente: l'arco maggiore (al solito, *la circonferenza* in greco) uguale a quello maggiore e l'arco minore al minore.

DL, *LE*; e la base *AB* è uguale alla base *DE*; l'angolo *AKB* è quindi uguale all'angolo *DLE* (I, 8). Ma angoli uguali insistono su archi uguali, quando siano angoli al centro (III, 26); quindi l'arco *AGB* è uguale all'arco *DHE*. Ma pure tutto quanto il cerchio *ABC* è uguale a tutto quanto il cerchio *DEF*; perciò anche l'arco *ACB*, che rimane [sottraendo dalla circonferenza del cerchio *ABC* il primo arco], è uguale all'arco rimanente *DFE* [dell'altra circonferenza] (noz. com. III).

Dunque, in cerchi uguali corde uguali... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

Applica: I, 8; III, 1, 26.

È applicata in: III, 30; IV, 12; XII, 17; XIII, 8.

Proposizione 29.

In cerchi uguali archi uguali sottendono[a] *corde uguali.*

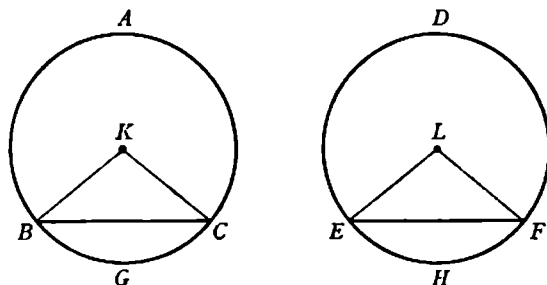
Siano *ABC*, *DEF* cerchi uguali, si prendano in essi gli archi uguali *BGC*, *EHF*, e si traccino le corde congiungenti *BC*, *EF*; dico che la corda *BC* è uguale alla corda *EF*.

Infatti, si prendano i centri dei [due] cerchi (III, 1) e siano essi *K*, *L*, e si traccino le congiungenti *BK*, *KC*, *EL*, *LF*.

Ora, poiché l'arco *BGC* è uguale all'arco *EHF*, anche l'angolo *BKC* è uguale all'angolo *ELF* (III, 27). E poiché

a. Letteralmente: circonferenze uguali sono sottese da rette uguali.

i cerchi ABC, DEF sono uguali, anche i raggi sono uguali (III, def. I), per cui i due lati BK, KC sono uguali ai due lati EL, LF; e comprendono angoli uguali; la base BC è quindi uguale alla base EF (I, 4).

Dunque, in cerchi uguali archi uguali... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 4; III, 1, 27.

È APPLICATA IN: IV, 11, 15; XIII, 10.

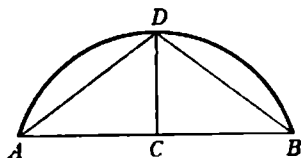
PROPOSIZIONE 30.

Dividere per metà un arco dato.

Sia ADB l'arco dato; si deve dunque dividere per metà l'arco ADB.

Si tracci la congiungente AB, la si divida per metà in C (I, 10), dal punto C si conduca la retta CD perpendicolare alla retta AB (I, 11), e si traccino [infine] le congiungenti AD, DB. Ora, poiché AC è uguale a CB, e CD è comune, i due lati AC, CD sono uguali ai due lati BC, CD; e l'angolo ACD è uguale all'angolo BCD – difatti ciascuno di essi è retto –; quindi la base AD è uguale alla base DB (I, 4). Ma corde uguali insistono su archi uguali, cioè l'arco maggiore uguale a quello maggiore e l'arco minore uguale al minore (III, 28); e ciascuno dei due archi AD, DB è minore di un semicerchio; l'arco AD è perciò uguale all'arco DB.

Dunque, l'arco dato è stato diviso per metà nel punto D. – C.D.F.

APPLICA: I, 4, 10, 11; III, 28.
È APPLICATA: IV, 16.

PROPOSIZIONE 31.

In un cerchio, l'angolo [alla circonferenza iscritto] nel semicerchio è retto, quello [iscritto] in un segmento [circolare] maggiore [del semicerchio] è minore di un retto, e quello [iscritto] in un segmento [circolare] minore [del semicerchio] è maggiore di un retto; ed infine, l'angolo di un segmento [circolare] maggiore [del semicerchio] è maggiore di un retto, e l'angolo di un segmento [circolare] minore [del semicerchio] è minore di un retto[12].

Sia $ABCD$ un cerchio, siano BC un suo diametro ed E il suo centro (III, 1), e si traccino le congiungenti BA, AC, AD, DC; dico che l'angolo alla circonferenza BAC, iscritto nel semicerchio BAC, è retto, mentre l'angolo alla circonferenza ABC, iscritto nel segmento circolare ABC maggiore

[12] La parte fondamentale di questa proposizione III, 31 è quella riguardante l'angolo iscritto in una semicirconferenza: viene dimostrato che esso è retto.

Si tratta di una delle proposizioni che trova più largo impiego nel séguito degli *Elementi*: così ancora nel libro terzo, nel quarto, nel sesto, nel decimo, nel decimosecondo, nel decimoterzo.

Essa doveva essere ben nota, se pure in via intuitiva, fin da tempi più antichi: ve n'è perfino un'attribuzione a Talete di Mileto! Detta attribuzione si trova in Diogene Laerzio (*Vite dei filosofi*, libro I, cap. I, n. 24), e questi si riferisce a Panfila, secondo la quale Talete, *avendo appreso la geometria presso gli Egiziani, per primo avrebbe iscritto nel cerchio il triangolo rettangolo* (trasformazione del teorema in un problema: per iscrivere in un cerchio un triangolo rettangolo occorre assumere il diametro come ipotenusa).

Osserviamo infine che nella dimostrazione Euclide si serve della I, 32 (angolo esterno somma degli angoli interni non adiacenti) e quindi del quinto postulato (che attraverso la I, 29 viene impiegato per dimostrare la I, 32).

del semicerchio, è minore di un retto, e l'angolo alla circonferenza *ADC*, invece, iscritto nel segmento circolare *ADC* minore del semicerchio, è maggiore di un retto.

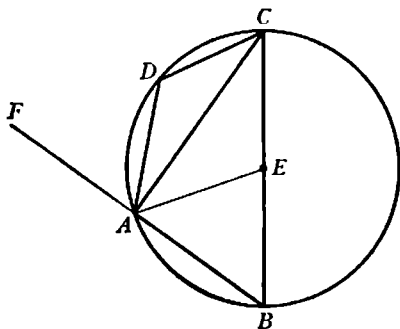
Si tracci la congiungente *AE*, e si prolunghi *BA* oltre *A* sino a *F*.

Ora, poiché *BE* è uguale ad *EA*, anche l'angolo *ABE* è uguale all'angolo *BAE* (I, 5). Di nuovo, poiché *CE* è uguale ad *EA*, pure l'angolo *ACE* è uguale all'angolo *CAE* (id.); quindi tutto quanto l'angolo *BAC* è uguale alla somma dei due angoli *ABC*, *ACB* (noz. com. II). Ma nel triangolo *ABC* pure l'angolo esterno *FAC* è uguale alla somma dei due angoli *ABC*, *ACB* (I, 32), per cui anche gli angoli *BAC*, *FAC* sono uguali fra loro (noz. com. I); ciascuno dei due è quindi retto (I, def. X); dunque l'angolo alla circonferenza *BAC*, iscritto nel semicerchio *BAC*, è retto.

E poiché nel triangolo *ABC* la somma dei due angoli *ABC*, *BAC* è minore di due retti (I, 17), e l'angolo *BAC* è retto, l'angolo *ABC* è minore di un retto – ed è d'altra parte un angolo alla circonferenza iscritto nel segmento circolare *ABC* maggiore del semicerchio.

E poiché *ABCD* è un quadrilatero iscritto in un cerchio, e la somma degli angoli opposti, nei quadrilateri iscritti nei cerchi, è uguale a due retti (III, 22), ma l'angolo *ABC* è minore di un retto, l'angolo rimanente *ADC* è maggiore di un retto – ed è d'altra parte un angolo alla circonferenza iscritto nel segmento circolare *ADC* minore del semicerchio.

Dico, inoltre, che è maggiore di un angolo retto l'angolo del segmento circolare maggiore del semicerchio, ossia quello compreso dall'arco *ABC* e dalla retta *AC*, mentre l'angolo del segmento circolare minore del semicerchio, ossia quello compreso dall'arco *ADC* e dalla retta *AC*, è minore di un retto. E questo è di per sé evidente. Poiché infatti l'angolo compreso dalle rette *BA*, *AC* è retto, l'angolo compreso dall'arco *ABC* e dalla retta *AC* è maggiore di un retto. Di nuovo, poiché l'angolo compreso dalle rette *AC*, *AF* è retto, l'angolo compreso dalla retta *AC* e dall'arco *ADC* è minore di un retto.

Dunque, in un cerchio, l'angolo alla circonferenza iscritto nel semicerchio... (secondo l'enunciato). – C.D.D. [a].

APPLICA: I, 5, 17, 32; III, 22.

È APPLICATA IN: III, 32, 33; IV, 6; VI, 13; X, 13, lemma, 29, 30, 33, 34, 35; XI, 23, scolio; XII, 1, 17; XIII, 12, 14, 16.

PROPOSIZIONE 32.

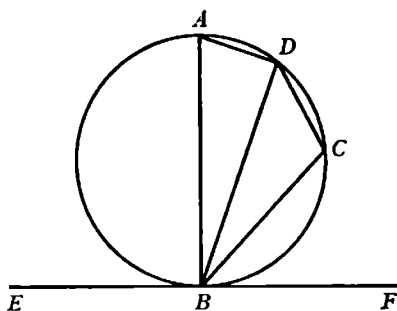
Se una retta è tangente ad un cerchio, e dal punto di contatto si conduce nel cerchio un'altra retta che lo venga a tagliare, gli angoli che essa forma con la tangente saranno uguali agli angoli alla circonferenza iscritti nei segmenti alterni del cerchio.

Infatti, una retta EF sia tangente al cerchio $ABCD$ nel punto B, e dal punto B si conduca nel cerchio $ABCD$ un'altra retta BD che lo tagli. Dico che gli angoli formati da BD con la tangente EF saranno uguali agli angoli alla circonferenza iscritti nei segmenti alterni del cerchio, ossia che l'angolo FBD è uguale ad un angolo alla circonferenza che sia iscritto [b] nel segmento circolare BAD, e che l'angolo EBD è uguale ad un angolo alla circonferenza iscritto nel segmento circolare DCB.

a. Prima di August, vale a dire della sua edizione di Euclide già citata, esisteva nel testo greco una prova alternativa di III, 31, cioè che l'angolo BAC iscritto nel semicerchio è retto, che August appunto, ed Heiberg poi, ritennero di disporre in Appendice.

b. Letteralmente: all'angolo che venga costruito.

Si innalzi difatti da *B* la perpendicolare *BA* ad *EF* (I, 11), si prenda sull'arco *BD* un punto a piacere *C*, e si traccino le congiungenti *AD*, *DC*, *CB*.

Ora, poiché una retta *EF* è tangente al cerchio *ABCD* in *B*, e dal punto di contatto è stata condotta la perpendicolare *BA* alla tangente, il centro del cerchio *ABCD* è su *BA* (III, 19). Quindi *BA* è diametro del cerchio *ABCD*, e l'angolo alla circonferenza *ADB*, che è iscritto in un semicerchio, è retto (III, 31). Perciò la somma degli angoli rimanenti *BAD*, *ABD* è uguale ad un retto (I, 32). Ma anche l'angolo *ABF* è retto; l'angolo *ABF* è quindi uguale alla somma degli angoli *BAD*, *ABD* (noz. com. I). Si sottragga in comune l'angolo *ABD* [dalla somma di *BAD*, *ABD* e dall'angolo *ABF*], per cui l'angolo *DBF*, che rimane sottraendo, è uguale all'angolo alla circonferenza *BAD* iscritto nel segmento circolare alterno *BAD*. E poiché *ABCD* è un quadrilatero iscritto in un cerchio, la somma dei suoi angoli opposti è uguale a due retti (III, 22). Ma pure la somma degli angoli *DBF*, *DBE* è uguale a due retti (I, 13); quindi la somma di *DBF*, *DBE* è uguale alla somma di *BAD*, *BCD* (noz. com. I), e fu dimostrato che, di quegli angoli, l'angolo *BAD* è uguale all'angolo *DBF*; l'angolo rimanente *DBE* è perciò uguale all'angolo alla circonferenza *DCB* iscritto nel segmento circolare alterno *DCB* (noz. com. II).

Dunque, se una retta è tangente ad un cerchio... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 11, 13, 32; III, 19, 22, 31.

È APPLICATA IN: III, 33, 34; IV, 2, 10.

PROPOSIZIONE 33.

Descrivere su una retta data un segmento circolare che contenga (= che sia capace di) un angolo uguale ad un angolo rettilineo dato.

Sia AB la retta data, e l'angolo in C sia l'angolo rettilineo dato; si deve dunque descrivere sulla retta data AB un segmento circolare che sia capace di un angolo uguale all'angolo in C.

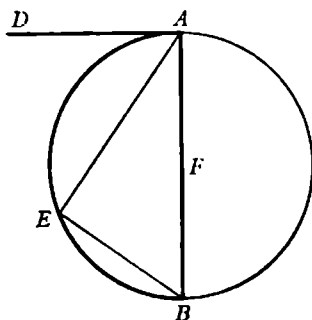
Ora, l'angolo in C è acuto, o retto, od ottuso; sia dapprima acuto e, come nella prima figura, si costruisca sulla retta AB, e con vertice nel punto A, l'angolo BAD uguale all'angolo in C (I, 23); l'angolo BAD è quindi acuto. Si conduca [poi] dal punto A la perpendicolare AE a DA (I, 11), si divida AB per metà in F (I, 10), dal punto F si conduca la perpendicolare FG ad AB (I, 11), e si tracci la congiungente FB.

Ora, poiché AF è uguale a FB, e FG è comune, i due lati AF, FG sono uguali ai due lati BF, FG; e l'angolo AGF è uguale all'angolo BGF; la base AG è quindi uguale alla base BG (I, 4). Perciò il cerchio descritto con centro F e per raggio FA passerà anche per B. Risulti descritto (post. III) e sia il cerchio ABE, e si tracci la congiungente EB. Poiché dunque AD è perpendicolare al diametro AE nel suo estremo A, essa[a] è tangente al cerchio ABE (III, 16, coroll.); e poiché una retta AD è tangente al cerchio ABE, e dal punto

[a]. Letteralmente: Poiché dunque AD è tracciata ad angoli retti, rispetto ad AE, dall'estremo A del diametro AE, quindi AD...

di contatto in *A* risulta tracciata nel cerchio *ABE* un'altra corda *AB*, l'angolo *DAB* è uguale all'angolo alla circonferenza *AEB* iscritto nel segmento circolare alterno (III, 32). Ma l'angolo *DAB* è uguale all'angolo in *C*, per cui all'angolo *AEB* è uguale pure l'angolo in *C* (noz. com. I).

Dunque, sulla retta data *AB* è stato descritto il segmento circolare *AEB* che è capace dell'angolo *AEB* uguale all'angolo dato in *C*.

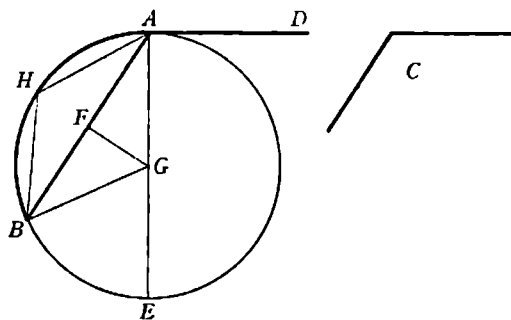
Ma sia adesso il caso in cui l'angolo in *C* è retto, e si debba di nuovo descrivere su *AB* un segmento circolare capace di un angolo uguale all'angolo retto in *C*. Si costruisca l'angolo *BAD* uguale all'angolo retto in *C*, come si ha nella seconda figura (I, 11), si divida *AB* per metà in *F* (I, 10), e con centro *F* e per raggio una delle due rette *FA*, *FB* si descriva il cerchio *AEB* (post. III).

La retta *AD* è quindi tangente al cerchio *ABE*, poiché l'angolo in *A* è retto (III, 16, coroll.). E l'angolo *BAD* è uguale all'angolo alla circonferenza iscritto nel segmento circolare *AEB* – anche questo difatti è retto, poiché è iscritto in un semicerchio (III, 31). Ma l'angolo *BAD* e l'angolo in *C* sono pure uguali fra loro. Anche l'angolo *AEB*, iscritto nel segmento circolare *AEB*, è perciò uguale all'angolo in *C* (noz. com. I).

Dunque, è stato di nuovo descritto su *AB* un segmento circolare *AEB* che è capace di un angolo uguale all'angolo in *C*.

Ma sia adesso il caso in cui l'angolo in *C* è ottuso; si costruisca sulla retta *AB*, e con vertice nel punto *A*, come si ha nella terza figura, l'angolo *BAD* ad esso uguale (I, 23), si conduca da *A* la perpendicolare *AE* ad *AD* (I, 11), si

divida AB di nuovo per metà in F (I, 10), da F si conduca la perpendicolare FG ad AB (I, 11), e si tracci la congiungente GB.

E di nuovo, poiché AF è uguale a FB, e FG è comune, i due lati AF, FG sono uguali ai due lati BF, FG; e l'angolo AFG è uguale all'angolo BFG; la base AG è perciò uguale alla base BG (I, 4); quindi il cerchio descritto con centro G e per raggio GA passerà anche per B. Venga a procedere come fa il cerchio AEB. Ora, poiché la retta AD è perpendicolare al diametro AE nel suo estremo A, essa è tangente al cerchio AEB (III, 16, coroll.). Ed AB è stata tracciata in esso dal punto di contatto A; l'angolo BAD è perciò uguale all'angolo alla circonferenza AHB iscritto nel segmento circolare alterno AHB (III, 32). Ma l'angolo BAD è uguale all'angolo in C. Anche l'angolo iscritto nel segmento circolare AHB è quindi uguale all'angolo in C (noz. com. I).

Dunque, sulla retta data AB è stato descritto il segmento circolare AHB che è capace di un angolo uguale all'angolo in C. – C.D.F.

APPLICA: I, 4, 10, 11, 23; III, 16, coroll., 31, 32.

PROPOSIZIONE 34.

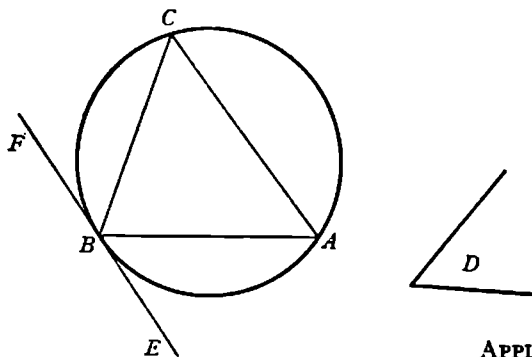
Togliere da un cerchio dato un segmento circolare che sia capace di un angolo uguale ad un angolo rettilineo dato.

Sia ABC il cerchio dato, e l'angolo in D sia l'angolo rettilineo dato; si deve dunque togliere dal cerchio ABC un

segmento circolare che sia capace di un angolo uguale all'angolo rettilineo dato, cioè all'angolo in *D*.

Si conduca *EF* tangente ad *ABC* nel punto *B* (III, 1 e I, 11), e sulla retta *FB*, con vertice nel suo punto *B*, si costruisca l'angolo *FBC* uguale all'angolo in *D* (I, 23).

Poiché dunque una retta *EF* è tangente al cerchio *ABC*, ed in esso è stata tracciata dal punto di contatto *B* la corda *BC*, l'angolo *FBC* è uguale all'angolo alla circonferenza iscritto nel segmento circolare alterno *BAC* (III, 32). Ma l'angolo *FBC* è uguale all'angolo in *D*; anche l'angolo iscritto nel segmento circolare *BAC* è quindi uguale all'angolo in *D* (noz. com. I).

Dunque, dal cerchio dato *ABC* è stato tolto il segmento circolare *BAC* che è capace di un angolo uguale all'angolo rettilineo dato, cioè all'angolo in *D*. – C.D.F.

APPLICA: I, 23; III, 32.

PROPOSIZIONE 35.

Se in un cerchio due corde si tagliano fra loro, il rettangolo compreso dalle parti dell'una è uguale al rettangolo compreso dalle parti dell'altra.

Infatti, nel cerchio *ABCD* le due corde *AC*, *BD* si taglino fra loro nel punto *E*; dico che il rettangolo compreso da *AE*, *EC* è uguale al rettangolo compreso da *DE*, *EB*.

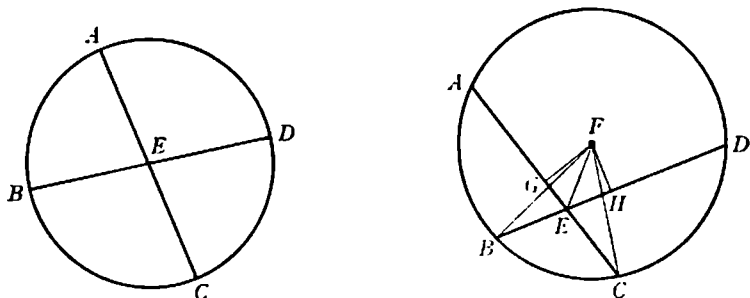
Se è dunque il caso in cui *AC*, *BD* passino per il centro, cosicché *E* sia il centro del cerchio *ABCD*, è evidente che,

essendo uguali *AE*, *EC*, *DE*, *EB*, pure il rettangolo compreso da *AE*, *EC* è uguale al rettangolo compreso da *DE*, *EB*.

Sia adesso il caso in cui *AC*, *DB* non passano per il centro, si prenda il centro di *ABCD* e sia esso *F* (III, 1), da *F* si conducano *FG*, *FH* perpendicolari [rispettivamente] alle due rette *AC*, *DB* (I, 12), e si traccino le congiungenti *FB*, *FC*, *FE*.

Ora, poiché una retta *GF*, che passa per il centro, è perpendicolare ad un'altra retta *AC* [a] che non passa per il centro, essa la divide per metà (III, 3); quindi *AG* è uguale a *GC*. Poiché dunque la retta *AC* è stata divisa in parti uguali in *G* ed in parti disuguali in *E*, la somma del rettangolo compreso da *AE*, *EC* e del quadrato di *EG* è uguale al quadrato di *GC* (II, 5); si aggiunga [alla somma ed al quadrato] il quadrato di *GF*; la somma del rettangolo di *AE*, *EC* e dei quadrati di *GE*, *GF* è perciò uguale alla somma dei quadrati di *CG*, *GF* (noz. com. II). Ma alla somma dei quadrati di *EG*, *GF* è uguale il quadrato di *FE*, ed alla somma dei quadrati di *CG*, *GF* è uguale il quadrato di *FC* (I, 47); quindi la somma del rettangolo di *AE*, *EC* e del quadrato di *FE* è uguale al quadrato di *FC*. Ma *FC* è uguale a *FB*; la somma del rettangolo di *AE*, *EC* e del quadrato di *FE* è così uguale al quadrato di *FB*. Per la stessa ragione, anche la somma del rettangolo di *DE*, *EB* e del quadrato di *FE* è uguale al quadrato di *FB*. Ma fu dimostrato che pure la somma del rettangolo di *AE*, *EC* e del quadrato di *FE* è uguale al quadrato di *FB*, per cui la somma del rettangolo di *AE*, *EC* e del quadrato di *FE* è uguale alla somma del rettangolo di *DE*, *EB* e del quadrato di *FE* (noz. com. I). Si sottragga da ambedue le somme il quadrato di *FE*; il rettangolo compreso da *AE*, *EC*, che rimane sottraendo, è quindi uguale all'altro rettangolo compreso da *DE*, *EB* (noz. com. III).

a. Letteralmente sarebbe: «divide ad angoli retti un'altra retta *AC*», come naturale, e si dice quindi, subito dopo: «essa la divide anche per metà»: omettiamo lo *anche*.

Dunque, se in un cerchio due corde si tagliano fra loro... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

Applica: I, 12, 47; II, 5; III, 1, 3.

Proposizione 36.

Se da un punto preso esternamente si conducono ad un cerchio due rette, una delle quali tagli il cerchio, mentre l'altra sia ad esso tangente, il rettangolo compreso da tutta quanta la retta secante e dalla sua parte esterna sarà uguale al quadrato della retta tangente[13].

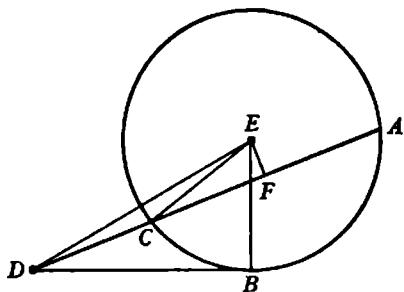
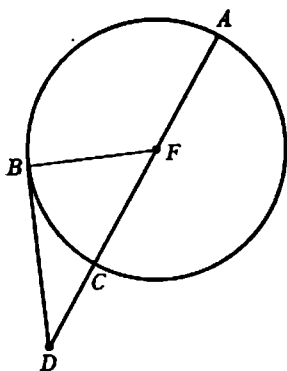
Infatti, si prenda un punto *D* esternamente al cerchio *ABC*, da *D* si conducano al cerchio *ABC* le due rette *DCA*, *DB*, e *DCA* tagli il cerchio *ABC*, mentre *DB* sia ad esso tangente; dico che il rettangolo compreso da *AD*, *DC* è uguale al quadrato di *DB*.

La retta *DCA*, dunque, o passa per il centro, oppure no. Passi dapprima per il centro. Sia *F* il centro del cerchio *ABC* (III, 1), e si tracci la congiungente *FB*; l'angolo *FBD* è quindi retto (III, 18). E poiché la retta *AC* è stata divisa per metà in *F*, e *CD* si aggiunge ad essa, la somma del rettangolo di *AD*, *DC* e del quadrato di *FC* è uguale al quadrato di *FD* (II, 6). Ma *FC* è uguale a *FB*, per cui la

[13] Queste proposizioni III, 35 e III, 36 vengono dimostrate più comodamente ricorrendo alla teoria delle proporzioni: si ha quindi qui un altro esempio della tendenza, da parte di Euclide, a *svincolare* fin dove possibile dalla teoria delle proporzioni la sua esposizione geometrica.

somma del rettangolo di *AD*, *DC* e del quadrato di *FB* è uguale al quadrato di *FD*. Ma al quadrato di *FD* è uguale la somma dei quadrati di *FB*, *BD* (I, 47); la somma del rettangolo di *AD*, *DC* e del quadrato di *FB* è perciò uguale alla somma dei quadrati di *FB*, *BD* (noz. com. I). Si sottragga il quadrato di *FB* da ambedue le somme; dunque il rettangolo di *AD*, *DC*, che rimane [della prima], è uguale al quadrato [che rimane della seconda, cioè a quello] della tangente *DB* (noz. com. III).

Ma sia adesso il caso in cui *DCA* non passa per il centro del cerchio *ABC*, si prenda il centro *E* [del cerchio] (III, 1), da *E* si conduca *EF* perpendicolare ad *AC* (I, 12), e si traccino le congiungenti *EB*, *EC*, *ED*; l'angolo *EBD* è quindi retto (III, 18). E poiché una retta *EF*, che passa per il centro, è perpendicolare ad una retta *AC* che non passa per il centro, essa la divide per metà (III, 3); perciò *AF* è uguale a *FC*. Ora, poiché la retta *AC* è stata divisa per metà nel punto *F*, e si aggiunge ad essa *CD*, la somma del rettangolo compreso da *AD*, *DC* e del quadrato di *FC* è uguale al quadrato di *FD* (II, 6). Si aggiunga in comune il quadrato di *FE* [alla somma ed al secondo quadrato]; la somma del rettangolo di *AD*, *DC* e dei quadrati di *CF*, *FE* è così uguale alla somma dei quadrati di *FD*, *FE* (noz. com. II). Ma il quadrato di *EC* è uguale alla somma dei quadrati di *CF*, *FE* – difatti l'angolo *EFC* è retto (I, 47) –, mentre alla somma dei quadrati di *DF*, *FE* è uguale il quadrato di *ED* (id.); la somma del rettangolo di *AD*, *DC* e del quadrato di *EC* è quindi uguale al quadrato di *ED*. Ma *EC* è uguale ad *EB*, per cui la somma del rettangolo di *AD*, *DC* e del quadrato di *EB* è uguale al quadrato di *ED*. Ma al quadrato di *ED* è uguale la somma dei quadrati di *EB*, *BD* – l'angolo *EBD* è difatti retto (I, 47) –; quindi la somma del rettangolo di *AD*, *DC* e del quadrato di *EB* è uguale alla somma dei quadrati di *EB*, *ED* (noz. com. I). Si sottragga il quadrato di *EB* da ambedue le somme; il rettangolo di *AD*, *DC*, rimanente [della prima], è perciò uguale al quadrato di *DB* [rimanente della seconda] (noz. com. III).

Dunque, se da un punto preso esternamente si conducono ad un cerchio... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 12, 47; II, 6; III, 3, 18.

È APPLICATA IN: III, 37.

PROPOSIZIONE 37.

Se da un punto preso esternamente si conducono ad un cerchio due rette, una delle quali tagli il cerchio, mentre l'altra abbia un estremo sulla sua circonferenza, e se il rettangolo compreso da tutta quanta la retta secante e dalla sua parte esterna è uguale al quadrato della seconda retta, la seconda retta sarà tangente al cerchio.

Infatti, si prenda un punto *D* esternamente al cerchio *ABC*, da *D* si conducano al cerchio *ABC* le due rette *DCA*, *DB*, e *DCA* tagli il cerchio, mentre *DB* abbia l'estremo *B* sulla sua circonferenza: inoltre il rettangolo di *AD*, *DC* sia uguale al quadrato di *DB*.

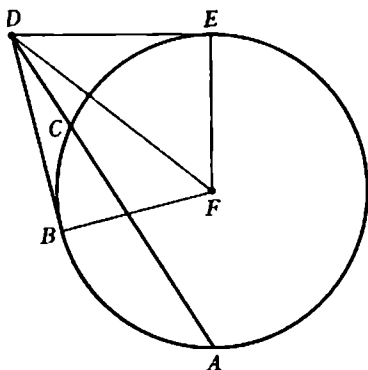
Dico che *DB* è tangente al cerchio *ABC*.

Si conduca difatti [da *D*] la retta *DE* tangente ad *ABC* (III, 17), si prenda il centro del cerchio *ABC* (III, 1) e sia esso *F*, e si traccino le congiungenti *FE*, *FB*, *FD*. Quindi l'angolo *FED* è retto (III, 18). E poiché *DE* è tangente al cerchio *ABC*, e *DCA* lo taglia, il rettangolo di *AD*, *DC* è uguale al quadrato di *DE* (III, 36). Ma il rettangolo di *AD*, *DC* si pose anche uguale al quadrato di *DB*, per cui il quadrato di *DE* è uguale al quadrato di *DB* (noz. com. I); perciò *DE* è uguale a *DB*. Ma pure *FE*, *FB* sono fra loro

Rilievo frammentario di Eudosso, da un prototipo del IV sec. a. C.

(Budapest, Szépmüvészeti Múzeum).

uguali: i due lati *DE*, *EF* sono così uguali ai due lati *DB*, *BF*; e *FD* è base comune dei triangoli; l'angolo *DEF* è quindi uguale all'angolo *DBF* (I, 8). Ma *DEF* è retto; quindi anche *DBF* è retto. Ed il raggio [di un cerchio], cioè *FB*, se prolungato, è un diametro; ma una retta perpendicolare in un suo estremo al diametro di un cerchio, è tangente al cerchio (III, 16, coroll.); perciò *DB* è tangente al cerchio. Similmente potremo procedere alla dimostrazione, anche se il centro venga a trovarsi su *AC*.

Dunque, se da un punto preso esternamente si conducono ad un cerchio... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 8; III, 1, 16, coroll., 17, 18, 36.

È APPLICATA IN: IV, 10.

LIBRO QUARTO

DEFINIZIONI

I. Si dice che una figura rettilinea è iscritta in un'altra figura rettilinea, quando il vertice di ciascuno degli angoli della figura iscritta si trova su un lato della figura in cui è iscritta, e cioè sul lato rispettivo [a].

II. Si dice similmente che una figura è circoscritta ad un'altra figura, quando ciascun lato della figura circoscritta passa per il vertice di un angolo della figura a cui è circoscritta, e cioè per il vertice dell'angolo rispettivo [b].

III. Si dice che una figura rettilinea è iscritta in un cerchio, quando il vertice di ciascun angolo della figura iscritta si trova sulla circonferenza del cerchio [c].

IV. Si dice che una figura rettilinea è circoscritta ad un cerchio, quando ciascun lato della figura circoscritta è tangente alla circonferenza del cerchio.

V. Si dice similmente che un cerchio è iscritto in una figura, quando ciascun lato della figura è tangente alla circonferenza del cerchio [d].

a. Letteralmente: quando ciascuno degli angoli della figura iscritta giace [al vertice] su ciascun lato di quella in cui è iscritta.

b. Letteralmente: quando ciascun lato della figura circoscritta passa per [il vertice di] ciascun angolo di quella a cui è circoscritta.

c. Letteralmente: quando ciascun angolo della figura iscritta giace [al vertice] sulla circonferenza del cerchio.

d. Letteralmente: quando la circonferenza del cerchio tocca, è tangente, a ciascun lato della figura in cui è iscritto.

VI. Si dice che un cerchio è circoscritto ad una figura, quando la circonferenza del cerchio passa per [il vertice] di ciascun angolo della figura a cui esso è circoscritto.

VII. Si dice che una retta è adattata in un cerchio, quando i suoi estremi sono sulla circonferenza del cerchio[a].

a. Abbiamo già visto (III, def. II) che in Euclide la parola greca ἅπτεσθαι significa di solito *incontrare*, ed il composto ἐφάπτεσθαι esprime l'idea di *toccare*, *esser tangente*, *far tangenza*; ora, nelle definizioni I, II, III, V e VI del libro IV la parola greca ἅπτηται (da ἅπτεσθαι) assume tre sensi diversi, da sottolineare. Nella def. V essa significa, eccezionalmente, *toccare*; nelle deff. I e III, *giacere su*, per cui «ciascun angolo» (ἑκάστη γωνία), vale a dire il vertice di ciascun angolo della figura iscritta giace su ciascun lato, rispettivamente, di quella in cui è iscritta (per cui bisogna, appunto, incontrarlo), com'è nella def. I, oppure, nella def. III, il vertice di ciascun angolo della figura iscritta giace sulla circonferenza del cerchio in cui è iscritta; infine, nelle deff. II e VI, significa *incontrare* nel senso di *passare per* un angolo, cioè per il vertice dello stesso: così, def. II, «ciascun lato» (ἑκάστη πλευρά) di una figura circoscritta ad un'altra passa attraverso il vertice di ciascun angolo rispettivo di quella a cui è circoscritta, o – nella def. VI – un cerchio circoscrive una figura quando la sua circonferenza passa per il vertice di ciascun angolo della figura a cui sia circoscritto; e questa, di *passare attraverso*, sembra essere accezione molto rara. Noi abbiamo qui tradotto la stessa parola cercando di valorizzare i suoi diversi significati, o sfumature di significato, ed usando per ragioni di chiarezza l'aggiunta del termine *vertice*.

PROPOSIZIONI

Proposizione I.

Adattare in un cerchio dato una retta uguale ad una retta data, che non sia maggiore del diametro del cerchio [1].

Siano *ABC* il cerchio dato, e *D* la retta data che non sia maggiore del diametro del cerchio. Si deve dunque adattare nel cerchio *ABC* una retta uguale alla retta *D*.

[1] In questa prima proposizione del libro quarto si fa riferimento all'ultima definizione (la settima) dello stesso libro. Si tratta di un caso particolare di *inserzione*, o *adattamento*. Stabilisce appunto la def. VII che una *retta* è detta *adattarsi*, o essere *adattata*, (ἐναρμόζεσθαι) ad un cerchio quando i suoi estremi stanno sulla circonferenza di questo, ossia quando la retta (= segmento di retta) è corda del cerchio stesso.

Nella IV, 1 si risolve il relativo problema: dati una *retta* e un cerchio, *adattare* al cerchio la retta. Quest'ultima, dunque, deve *diventare* corda del cerchio. E poiché nella III, 15 Euclide ha dimostrato che massima corda è il diametro, egli pone sùbito esplicitamente la condizione di risolubilità del problema: la retta non deve essere maggiore del diametro del cerchio. In altri termini, il caso in cui la retta sia uguale al diametro costituisce il *diorisma* del problema, cioè separa i casi di possibilità da quelli di impossibilità di soluzione (per il *diorisma* si veda la nota alla VI, 27).

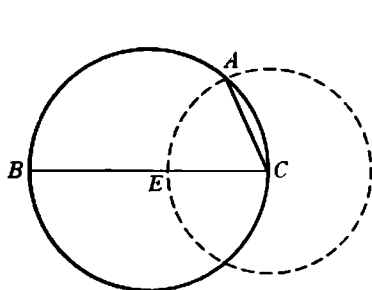
La IV, 1 richiede, in sostanza, un particolare *trasporto* di un segmento di retta. Nella proposizione seconda del libro primo Euclide ha già insegnato a *trasportare* un segmento in modo che esso venga ad avere un estremo in un punto dato: nella I, 3, poi, completa la costruzione (con una ulteriore rotazione, ossia con la costruzione di un cerchio avente il centro nel punto dato) in modo che il segmento *trasportato* abbia anche una direzione prefissata. E qui, nella IV, 1, Euclide applica proprio le costruzioni di I, 2 e I, 3 *trasportando* il segmento dato in modo che venga ad avere un estremo in un punto della circonferenza del cerchio dato (I, 2) e inoltre che abbia la direzione del diametro che passa per quel punto della circonferenza (I, 3).

A questo punto risulterebbe già tracciata la seconda circonferenza: ad ogni modo Euclide ne enuncia ora il tracciamento, conformemente all'uso, da lui seguito, di considerare le costruzioni solo per quanto riguarda il risultato finale, senza ripercorrere le tappe costituite dalle costruzioni intermedie (così è fatto, ad esempio, nel libro primo, con l'uso del triangolo equilatero, considerato già come *prefabbricato*: ad es. in I, 9, 10, 11).

Non resta ora che da tracciare la retta congiungente il punto prescelto sulla prima circonferenza (centro della seconda) con uno dei punti

Si conduca nel cerchio *ABC* il diametro *BC* (III, 1). Di conseguenza, se *BC* risulta uguale a *D*, si sarebbe già conseguito quanto proposto; difatti nel cerchio *ABC* sarebbe stata adattata la retta *BC* uguale alla retta *D*. Se invece *BC* è maggiore di *D*, si ponga *CE* uguale a *D* (I, 3), si descriva con centro *C* e per raggio *CE* il cerchio *EAF*, e si tracci la congiungente *CA*.

Poiché dunque il punto *C* è il centro del cerchio *EAF*, si ha che *CA* è uguale a *CE*. Ma *CE* è uguale a *D*; anche *D*, *CA* sono quindi uguali (noz. com. I).

Dunque, nel cerchio dato *ABC* è stata adattata la retta *CA* uguale alla retta data *D*. – C.D.F.

APPLICA: I, 2, 3; III 1.

È APPLICATA IN: IV, 10, 16; X, 13, lemma; XI, 23, scolio; XII, 16.

di intersezione tra le due circonferenze. Che poi le due circonferenze si taglino può stabilirsi utilizzando la condizione di risolubilità, nello stesso modo veduto per la I, 22 (esistenza del triangolo avente lati dati, soggetti alla condizione che ciascuno di essi sia minore della somma degli altri due). Come s'è avvertito nella nota a detta proposizione, non è già che Euclide *dimostri* che le due circonferenze si taglino, ma egli si pone nelle condizioni necessarie e sufficienti perché le intersezioni vi siano. La nostra *dimostrazione* di oggi ricorre al postulato della continuità: in Euclide un tal postulato non viene esplicitamente enunciato (si veda tuttavia la nota alla def. IV del libro quinto), e l'esposizione presenta pertanto una lacuna, che già viene rilevata nella proposizione iniziale degli *Elementi* (I, 1: costruzione del triangolo equilatero, caso particolare della I, 22, costruzione del triangolo qualunque).

Come si vede, la IV, 1 coinvolge postulati espressi o inespressi: si tratta di un esempio del fatto che Euclide considera assai spesso le prime proposizioni di un libro come aventi carattere introduttivo, quasi non appartenessero in tutto e per tutto allo svolgimento sistematico del libro stesso.

PROPOSIZIONE 2.

Iscrivere in un cerchio dato un triangolo equiangolo rispetto ad un triangolo dato[2].

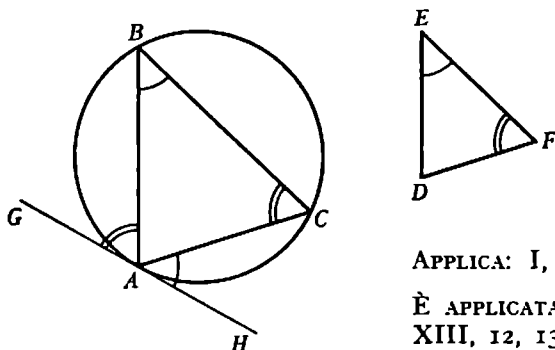
Siano *ABC* il cerchio dato, e *DEF* il triangolo dato; si deve dunque iscrivere nel cerchio *ABC* un triangolo equiangolo rispetto al triangolo *DEF*.

Si conduca *GH* tangente in *A* al cerchio *ABC* (III, 1; I, 11; III, 16, coroll.), si costruisca sulla retta *AH*, e con vertice nel suo punto *A*, l'angolo *HAC* uguale all'angolo *DEF* (I, 23); sulla retta *AG*, e con vertice nel punto *A* di essa, si costruisca l'angolo *GAB* uguale all'angolo *DFE* (id.), e si tracci la congiungente *BC*.

Poiché dunque una retta *AH* è tangente al cerchio *ABC*, e dal punto di contatto *A* è stata tracciata nel cerchio la corda *AC*, l'angolo *HAC* è uguale all'angolo alla circonferenza *ABC* iscritto nel segmento circolare alterno *ABC* (III, 32). Ma l'angolo *HAC* è uguale all'angolo *DEF*, per cui anche gli angoli *ABC*, *DEF* sono uguali (noz. com. I); per lo stesso motivo pure gli angoli *ACB*, *DFE* sono uguali; pure l'angolo rimanente *BAC* è quindi uguale all'altro angolo rimanente *EDF* (I, 32).

[2] Si tratta della iscrizione in un cerchio dato di un triangolo simile (« equiangolo ») a un triangolo dato. La costruzione è assai ingegnosa: si conduce per un punto della circonferenza la retta tangente al cerchio, e si costruiscono due angoli alla circonferenza aventi la tangente come uno dei lati, e rispettivamente uguali a due angoli del triangolo dato. Applicando la III, 32 (che considera come angoli alla circonferenza anche quelli aventi un lato tangente) si viene ad avere un triangolo iscritto nel cerchio e avente due angoli rispettivamente uguali a due angoli del triangolo dato: che anche i terzi angoli risultino uguali si deduce poi dalla I, 32 sulla somma dei tre angoli di un triangolo, e quindi, in ultima analisi, dal quinto postulato.

Va osservato che come caso particolare di questa IV, 2 può considerarsi il problema dell'iscrizione del triangolo equilatero nel cerchio, problema che viene applicato nell'ultima proposizione (IV, 16) del libro quarto.

Dunque, è stato iscritto in un cerchio dato un triangolo equiangolo rispetto ad un triangolo dato. – C.D.F.

APPLICA: I, 23, 32; III, 32.

È APPLICATA IN: IV, 11, 16; XIII, 12, 13.

PROPOSIZIONE 3.

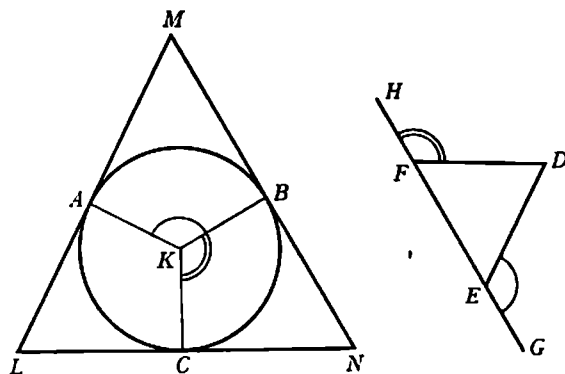
Circoscrivere ad un cerchio dato un triangolo equiangolo rispetto ad un triangolo dato.

Siano *ABC* il cerchio dato, e *DEF* il triangolo dato; si deve dunque circoscrivere al cerchio *ABC* un triangolo equiangolo rispetto al triangolo *DEF*.

Si prolunghi *EF* da ambedue le parti sino ai punti *G*, *H* (post. II), si prenda il centro del cerchio *ABC* (III, 1) e sia esso *K*, si tracci a caso il raggio *KB*, si costruiscano sulla retta *KB*, e con vertici nel suo punto *K*, l'angolo *BKA* uguale all'angolo *DEG*, e l'angolo *BKC* uguale all'angolo *DFH* (I, 23), e [infine] per i punti *A*, *B*, *C* si conducano le rette *LAM*, *MBN*, *NCL* tangenti al cerchio *ABC* (I, 11; III, 16, coroll.).

Ora, poiché *LM*, *MN*, *NL* sono tangenti al cerchio *ABC* nei punti *A*, *B*, *C*, e dal centro *K* sono state tracciate le congiungenti *KA*, *KB*, *KC* ai punti *A*, *B*, *C*, gli angoli nei punti *A*, *B*, *C* sono retti (III, 18). E poiché nel quadrilatero *AMBK* la somma dei quattro angoli è uguale a quattro retti – dato che *AMBK* è pure divisibile in due triangoli (I, 32) –, e poiché gli angoli *KAM*, *KBM* sono retti, la somma degli angoli rimanenti *AKB*, *AMB* è uguale a due retti. Ma anche la somma degli angoli *DEG*, *DEF* è uguale a

due retti (I, 13), per cui la somma degli angoli *AKB*, *AMB* è uguale alla somma degli angoli *DEG*, *DEF* (noz. com. I); e di essi l'angolo *AKB* è uguale all'angolo *DEG*; quindi l'angolo rimanente *AMB* è uguale all'angolo rimanente *DEF* (noz. com. III). Similmente si potrà dimostrare che pure gli angoli *LNB*, *DFE* sono uguali fra loro; perciò anche l'angolo *MLN*, che rimane del triangolo *LMN*, è uguale all'angolo rimanente *EDF* del triangolo *DEF* (I, 32). Il triangolo *LMN* è quindi equiangolo rispetto al triangolo *DEF*; ed è stato circoscritto al cerchio *ABC*.

Dunque, è stato circoscritto ad un cerchio dato un triangolo equiangolo rispetto ad un triangolo dato. – C.D.F.

APPLICA: I, 11, 13, 23, 32; III, 1.

PROPOSIZIONE 4.

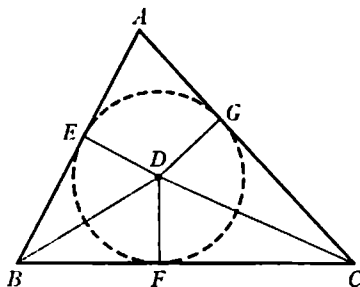
Iscrivere un cerchio in un triangolo dato[3].

Sia *ABC* il triangolo dato; si deve dunque iscrivere un cerchio nel triangolo *ABC*.

[3] La costruzione si fonda sul fatto che le bisettrici di due angoli del triangolo si tagliano in un punto (che viene assunto come centro del cerchio iscritto da costruire). Euclide non dà una dimostrazione esplicita dell'esistenza del punto d'incontro: si tratterebbe di una diretta applicazione del quinto postulato. Infatti i due angoli del triangolo, sommati insieme, dànno meno di due retti (I, 17), e quindi lo stesso si verifica, a più forte ragione, per gli angoli-metà. Segue l'incontro dei lati non comuni, per il quinto postulato.

Si dividano per metà gli angoli *ABC*, *ACB* mediante le rette *BD*, *CD* (I, 9), si incontrino queste fra loro nel punto *D* (post. V), e da *D* si conducano *DE*, *DF*, *DG* perpendicolari rispettivamente alle rette *AB*, *BC*, *CA* (I, 12).

Ora, poiché l'angolo *ABD* è uguale all'angolo *CBD*, e pure l'angolo retto *BED* è uguale all'angolo retto *BFD* (post. IV), si ha che *EBD*, *FBD* sono due triangoli i quali hanno due angoli uguali a due angoli ed un lato uguale ad un lato, ossia quello che è opposto ad uno degli angoli uguali e che è ad essi comune, cioè *BD*; essi quindi avranno anche i lati rimanenti uguali ai lati rimanenti (I, 26), per cui *DE* è uguale a *DF*. Per la stessa ragione, pure *DG* è uguale a *DF*. Quindi le tre rette *DE*, *DF*, *DG* sono uguali fra loro (noz. com. I); dunque il cerchio descritto con centro *D* e per raggio una delle rette *DE*, *DF*, *DG* [a] passerà anche per i punti rimanenti e sarà tangente alle rette *AB*, *BC*, *CA*, poiché gli angoli nei punti *E*, *F*, *G* sono retti. Se difatti il cerchio venisse a tagliare una delle rette *AB*, *BC*, *CA*, una retta tracciata perpendicolarmente al diametro del cerchio, partendo da un estremo del diametro, si troverebbe a cadere internamente al cerchio: il che fu dimostrato assurdo (III, 16); perciò il cerchio descritto con centro *D* e per raggio una delle rette *DE*, *DF*, *DG* (post. III) non taglierà le rette *AB*, *BC*, *CA*; sarà quindi ad esse tangente e sarà il cerchio iscritto nel triangolo *ABC* (IV, def. V). Venga [appunto] iscritto, come il cerchio *FGE*.

Dunque, nel triangolo dato *ABC* è stato iscritto il cerchio *EFG*. – C.D.F.

APPLICA: I, 9, 12, 26; III, 16.

a. Euclide dice piuttosto, qui ed altrove nel libro IV, « con distanza (cioè, avendo per raggio) uno dei (sottinteso: *punti*) *E*, *F*, *G* », ed in IV, 13 dirà del tutto distesamente « con distanza uno dei punti *G*, *H*, *K*, *L*, *M* » (διαστήματι ἑνὶ τῶν Η, Θ, Κ, Λ,

PROPOSIZIONE 5.

Circoscrivere un cerchio ad un triangolo dato[4].

Sia *ABC* il triangolo dato; si deve dunque circoscrivere un cerchio al triangolo dato *ABC*.

Si dividano per metà le rette *AB*, *AC* nei punti *D*, *E* (I, 10), e dai punti *D*, *E* si conducano le rette *DF*, *EF* perpendicolari ad *AB*, *AC* (I, 11): esse così si incontreranno o internamente al triangolo *ABC*, o sulla retta *BC*, od esternamente a *BC*.

Si incontrino, dapprima, internamente al triangolo nel punto *F*, e si traccino le congiungenti *FB*, *FC*, *FA*. Ora, poiché *AD* è uguale a *DB*, e *DF* è comune e forma angoli retti con *AB*[a], la base *AF* è uguale alla base *FB* (I, 4). Similmente potremo dimostrare che anche *CF* è uguale ad *AF*; cosicché pure *FB*, *FC* sono uguali; quindi le tre rette *FA*, *FB*, *FC* sono uguali fra loro (noz. com. I). Perciò il cerchio descritto con centro *F* e per raggio una delle tre rette *FA*, *FB*, *FC* (post. III) verrà a passare anche per i punti rimanenti ed il cerchio risulterà circoscritto al triangolo *ABC*. Venga esso appunto circoscritto, come è il cerchio *ABC*.

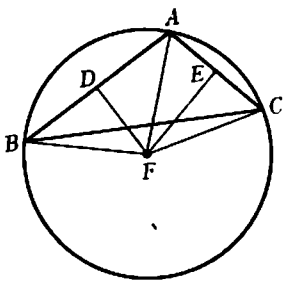
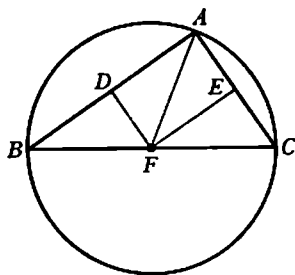
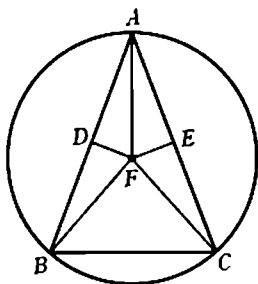
Ma sia adesso il caso in cui *DF*, *EF* si incontrino in *F* sulla retta *BC*, come si ha nella seconda figura, e si tracci la congiungente *AF*. Similmente potremo dimostrare che il punto *F* è il centro del cerchio circoscritto al triangolo *ABC*.

M σημείων); l'espressione, così scorciata, è magari manchevole, ma è frequente nel libro, come si è detto: si troverà, oltre a questa proposizione, nelle IV, 5, 8, 9, 13.

a. Nel testo si dice soltanto: *e* (poiché) DF *è comune e ad angoli retti, la base*... ecc.

[4] Anche qui c'è una lacuna: non viene dimostrato che le perpendicolari condotte per i punti di mezzo di due lati del triangolo dato s'incontrano in un punto (che viene assunto come centro del cerchio da costruire). Nell'edizione degli *Elementi* di Enriques (vol. I, pp. 282-283) viene riportata la dimostrazione complementare di Giordano Vitale, che costituisce una immediata applicazione del quinto postulato: siccome gli angoli *ADF*, *AEF* sono retti per costruzione, la somma degli angoli *EDF*, *DEF* è minore di due retti: quindi le rette *DF*, *EF* s'incontrano (viene tracciato dapprima il segmento *DE*).

Sia ora il caso in cui *DF*, *EF* si incontrino di nuovo in *F*, ma esternamente al triangolo *ABC*[a], come si ha nella terza figura, e si traccino le congiungenti *AF*, *BF*, *CF*. Ora, poiché *AD* è nuovamente uguale a *DB*, e *DF* è comune e forma angoli retti con *BA*, la base *AF* è uguale alla base *BF* (I, 4). Similmente potremo dimostrare che anche *CF* è uguale ad *AF*, cosicché pure *BF*, *FC* sono uguali fra loro (noz. com. I); il cerchio, quindi, descritto con centro *F* e per raggio una delle rette *FA*, *FB*, *FC* verrà a passare anche per i punti rimanenti, e risulterà circoscritto al triangolo *ABC*.

Dunque, è stato circoscritto un cerchio ad un triangolo dato. - C.D.F.

APPLICA: I, 4, 10, 11.

È APPLICATA IN: IV, 10; XI, 23.

COROLLARIO.

Ed è evidente che, quando il centro del cerchio cade internamente al triangolo, l'angolo *BAC*, essendo iscritto in

a. Heiberg corregge qui, seguendo Gregory, *al triangolo ABC* in quanto, nei codici, si trova *alla retta* BC, un po' a forza, egli dice.

un segmento circolare maggiore del semicerchio, è minore di un retto; e che quando il centro cade sulla retta *BC*, l'angolo *BAC*, essendo iscritto in un semicerchio, è retto; e quando il centro del cerchio cade esternamente al triangolo, l'angolo *BAC*, essendo iscritto in un segmento circolare minore del semicerchio, è maggiore di un retto (III, 31)[a].

APPLICA: I, 10, 11, 4.

È APPLICATO IN: IV, 10.

PROPOSIZIONE 6.

Iscrivere un quadrato in un cerchio dato[5].

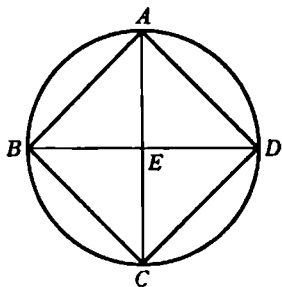
Sia *ABCD* il cerchio dato; si deve dunque iscrivere un quadrato nel cerchio *ABCD*.

a. Simson – cfr. R. SIMSON, *The Elements of Euclid, The first six Books, together with the eleventh and twelfth*, Glasgow, 1756, p. 369 – ritiene che la dimostrazione euclidea presenti corruzioni di mano inabile – perché si omette di provare che le perpendicolari *DF*, *EF* si incontrano, e perché, come aveva già osservato Campano, la proposizione è divisa in tre casi, dove poi una medesima costruzione e dimostrazione serve per tutti. Il testo tuttavia (cfr. anche HEATH, *op. cit.*, vol. II, p. 90) non si presenta dubbioso almeno fino alla clausola rituale c.d.f.; e quella che è una parte aggiunta, da *Ed è evidente* in poi, se anche data da Simson e da altri come un «corollario», nei migliori codici non si presenta con questo titolo, cioè un πόρισμα, nota Heiberg: è piuttosto un'aggiunta e una delucidazione, simile a quella contenuta in III, 25, da *Similmente* in poi. Heiberg inoltre, insieme a Simson (cfr. sopra), rigetta come spuria una ulteriore aggiunta del testo greco, di séguito al «corollario».

[5] In questo gruppo di quattro proposizioni (6, 7, 8, 9) si risolvono altrettanti problemi riguardanti il quadrato, in relazione al cerchio, iscritto o circoscritto. Precisamente, nelle prop. 6 e 7 si parte da un cerchio dato e si costruisce il quadrato, rispettivamente iscritto o circoscritto: nelle prop. 8 e 9 si parte invece da un quadrato dato e si costruisce il cerchio ad esso rispettivamente iscritto o circoscritto.

In alcune edizioni dell'Euclide (Peletier, Clavio, cfr. edizione Enriques, vol. I, p. 291) è aggiunto alla IV, 9 uno *scolio* nel quale si constata che

Si conducano nel cerchio *ABCD* i due diametri *AC*, *BD* perpendicolari fra loro (III, 1 e I, 11), e si traccino le congiungenti *AB*, *BC*, *CD*, *DA*.

Ora, poiché *BE* è uguale ad *ED* – difatti il punto *E* è il centro –, ed *EA* è comune e forma angoli retti con *BD*, la base *AB* è uguale alla base *AD* (I, 4). Per la stessa ragione, è pure uguale ciascuna delle due rette *BC*, *CD* a ciascuna delle due rette *AB*, *AD*, sicché il quadrilatero *ABCD* è equilatero (noz. com. I). Dico adesso che ha anche gli angoli retti. Infatti, poiché la retta *BD* è diametro del cerchio *ABCD*, si ha che *BAD* è un semicerchio; l'angolo *BAD* è quindi retto (III, 31). Per la stessa ragione, pure ciascuno degli angoli *ABC*, *BCD*, *CDA* è retto; il quadrilatero *ABCD* ha perciò gli angoli retti. Ma fu dimostrato che è anche equilatero; quindi esso è un quadrato (I, definizione XXII). Ed è stato iscritto nel cerchio *ABCD*.

Dunque, nel cerchio dato è stato iscritto il quadrato *ABCD*. – C.D.F.

Applica: I, 4, 11; III, 1, 31.

È applicata in: XII, 2, 10, 11, 12.

Proposizione 7.

Circoscrivere un quadrato ad un cerchio dato.

Sia *ABCD* il cerchio dato; si deve dunque circoscrivere un quadrato al cerchio *ABCD*.

Si conducano nel cerchio *ABCD* i due diametri *AC*, *BD* perpendicolari fra loro (III, 1 e I, 11), e per i punti *A*, *B*,

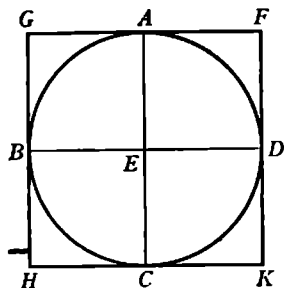
il quadrato circoscritto è doppio del quadrato iscritto nello stesso cerchio: è, in sostanza, la proposizione che è a base del famoso passo del *Menone* platonico, sul raddoppiamento del quadrato (*Menone*, 72*a*-85*b*).

C, *D* si conducano le rette *FG*, *GH*, *HK*, *KF* tangenti al cerchio *ABCD* (I, 11 e III, 16, coroll.).

Poiché dunque *FG* è tangente al cerchio *ABCD*, e dal centro *E* al punto di contatto *A* è stata tracciata la congiungente *EA*, gli angoli in *A* sono retti (III, 18). Per la stessa ragione, pure gli angoli coi vertici nei punti *B*, *C*, *D* sono retti. E poiché l'angolo *AEB* è retto, ma anche l'angolo *EBG* è retto, *GH* è parallela ad *AC* (I, 28). Per la stessa ragione allora, pure *AC* è parallela a *FK*. Cosicché anche *GH*, *FK* sono parallele fra loro (I, 30). Similmente potremo dimostrare che anche ciascuna delle due rette *GF*, *HK* è parallela a *BED*. Perciò *GK*, *GC*, *AK*, *FB*, *BK* sono parallelogrammi; *GF* è quindi uguale a *HK*, e *GH* uguale a *FK* (I, 34). E poiché *AC* è uguale a *BD*, ma *AC* è pure uguale a ciascuna delle due rette *GH*, *FK*, mentre *BD* è uguale a ciascuna delle due rette *GF*, *HK* (I, 34), il quadrilatero *FGHK* è equilatero (noz. com. I). Dico adesso che ha anche gli angoli retti. Infatti, poichè *GBEA* è un parallelogrammo, e l'angolo *AEB* è retto, anche l'angolo *AGB* è retto (I, 34). Similmente potremo dimostrare che pure gli angoli in *H*, *K*, *F* sono retti. Perciò *FGHK* ha gli angoli retti. Ma fu dimostrato che è anche equilatero; quindi esso è un quadrato (I, def. XXII). E risulta circoscritto al cerchio *ABCD*.

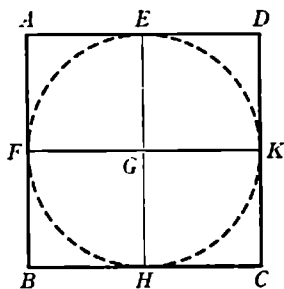
Dunque, è stato circoscritto un quadrato ad un cerchio dato. – C.D.F.

APPLICA: I, 11, 28, 30, 34; III, 1, 16, coroll.

È APPLICATA IN: XII, 10, 11.

PROPOSIZIONE 8.

Iscrivere un cerchio in un quadrato dato.

Sia *ABCD* il quadrato dato; si deve dunque iscrivere un cerchio nel quadrato *ABCD*.

Si dividano per metà le due rette *AD*, *AB* rispettivamente nei punti *E*, *F* (I, 10), si conduca per *E* la retta *EH* parallela all'una o all'altra indifferentemente delle rette *AB*, *CD* (I, 31; I, 30), e per *F* si conduca *FK* parallela all'una o all'altra indifferentemente delle rette *AD*, *BC* (id.); ciascuno dei quadrilateri[a] *AK*, *KB*, *AH*, *HD*, *AG*, *GC*, *BG*, *GD* è quindi un parallelogrammo, ed i loro lati opposti sono evidentemente uguali (I, 34). E poiché *AD* è uguale ad *AB*, ed *AE* è metà di *AD*, mentre *AF* è metà di *AB*, anche *AE*, *AF* sono fra loro uguali (noz. com. VI); cosicché sono uguali fra loro pure i lati opposti, per cui anche *FG*, *GE* sono fra loro uguali. Similmente potremo dimostrare che sono uguali pure ciascuna delle due rette *GH*, *GK* a ciascuna delle due rette *FG*, *GE*; perciò le quattro rette *GE*, *GF*, *GH*, *GK* sono uguali fra loro (noz. com. I). Quindi il cerchio descritto con centro *G* e per raggio una delle rette *GE*, *GF*, *GH*, *GK* (post. III) verrà a passare anche per i punti rimanenti; e sarà tangente alle rette *AB*, *BC*, *CD*, *DA*, poiché gli angoli in *E*, *F*, *H*, *K* sono retti; se difatti il cerchio venisse a tagliare *AB*, *BC*, *CD*, *DA*, una retta tracciata perpendicolarmente al diametro di un cerchio, partendo da un estremo del diametro, cadrebbe internamente al cerchio: il che fu dimostrato assurdo (III, 16). Perciò il cerchio descritto con centro *G* e avente per raggio una delle rette *GE*, *GF*, *GH*, *GK* non taglierà le rette *AB*, *BC*, *CD*, *DA*. Verrà quindi ad esser loro tangente e risulterà iscritto nel quadrato *ABCD*.

Dunque, è stato iscritto un cerchio in un quadrato dato. – C.D.F.

APPLICA: I, 10, 30, 31, 34; III, 16, coroll.

a. Sarebbe, ad essere esatti, « delle figure ».

PROPOSIZIONE 9.

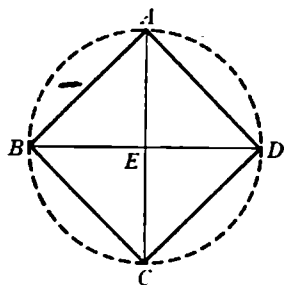
Circoscrivere un cerchio ad un quadrato dato.

Sia *ABCD* il quadrato dato; si deve dunque circoscrivere un cerchio al quadrato *ABCD*.

Infatti, si traccino le congiungenti *AC*, *BD* e si taglino esse fra loro in *E* [a].

Ora, poiché *DA* è uguale ad *AB*, ed *AC* è comune, i due lati *DA*, *AC* sono uguali ai due lati *BA*, *AC*; e la base *DC* è uguale alla base *BC*; l'angolo *DAC* è quindi uguale all'angolo *BAC* (I, 8), per cui l'angolo *DAB* è stato diviso per metà da *AC*. Similmente potremo dimostrare che pure ciascuno degli angoli *ABC*, *BCD*, *CDA* risulta diviso per metà da una delle [b] rette *AC*, *DB*. E poiché l'angolo *DAB* è uguale all'angolo *ABC*, e l'angolo *EAB* è metà dell'angolo *DAB*, mentre l'angolo *EBA* è metà dell'angolo *ABC*, anche gli angoli *EAB*, *EBA* sono uguali (noz. com. VI); cosicché anche i lati *EA*, *EB* sono fra loro uguali (I, 6). Similmente potremo dimostrare che pure ciascuna delle due rette *EA*, *EB* è uguale a ciascuna delle due rette *EC*, *ED*. Le quattro rette *EA*, *EB*, *EC*, *ED* sono quindi uguali fra loro (noz. com. I). Perciò il cerchio descritto con centro *E* e avente per raggio una delle rette *EA*, *EB*, *EC*, *ED* (post. III) verrà a passare anche per i punti rimanenti e risulterà circoscritto al quadrato *ABCD*. Venga esso appunto circoscritto, come è il cerchio *ABCD*.

Dunque, è stato circoscritto un cerchio ad un quadrato dato. – C.D.F.

A
B
D
E
C

APPLICA: I, 6, 8.

a. Letteralmente: Infatti, tracciate le congiungenti *AC*, *BD*, si taglino esse fra loro.

b. Letteralmente: dalle.

PROPOSIZIONE 10.

Costruire un triangolo isoscele avente ciascuno dei due angoli alla base che sia il doppio dell'angolo rimanente [6].

Si assuma una retta *AB*, e la si divida nel punto *C* in modo che il rettangolo compreso da *AB*, *BC* sia uguale al quadrato di *CA* (II, 11); si descriva con centro *A* e con raggio *AB* il cerchio *BDE* (post. III), si adatti nel cerchio *BDE* la retta *BD* uguale alla retta *AC*, che non è maggiore del diametro del cerchio *BDE* (IV, 1), si traccino le congiungenti *AD*, *DC*, e si circoscriva il cerchio *ACD* al triangolo *ACD* (IV, 5).

Ora, poiché il rettangolo di *AB*, *BC* è uguale al quadrato di *AC*, ed *AC* è uguale a *BD*, il rettangolo di *AB*, *BC* è uguale al quadrato di *BD*. E poiché esternamente al cerchio *ACD* è stato preso un punto *B*, da *B* risultano condotte al cerchio *ACD* [a] le due rette *BA*, *BD*, ed una di esse[, cioè *BA*,] lo taglia, mentre l'altra[, cioè *BD*,] ha l'estremo *D* sulla circonferenza del cerchio [b], ed il rettangolo di *AB*, *BC* è

a. Letteralmente: risultano cadere sul cerchio *ACD*.
b. Letteralmente: mentre l'altra cade su esso.

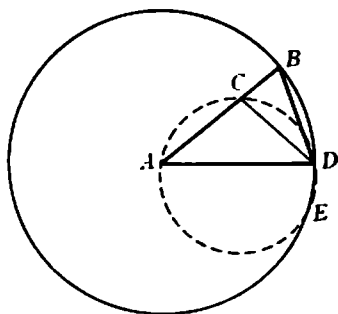
[6] La costruzione del triangolo isoscele avente ciascun angolo alla base doppio dell'angolo al vertice è nient'altro che la costruzione di un angolo uguale alla quinta parte di due retti, ossia alla decima parte di quattro retti. Assumendo, dunque, un tale angolo come angolo al centro di un cerchio si può costruire il decagono regolare iscritto. Dal decagono, poi, unendo alternativamente i vertici, si ottiene il pentagono regolare iscritto. Euclide utilizza, invece, diversamente (nella IV, 11) la costruzione del particolare triangolo isoscele della IV, 10. Iscrive, infatti, nel cerchio dato un triangolo *equiangolo* rispetto a quello della IV, 10, e divide per metà gli angoli alla base. Ottiene così cinque angoli alla circonferenza che sottendono archi consecutivi e che son tutti uguali ad un quinto di due retti: le relative corde costituiscono quindi i lati del pentagono regolare iscritto.

Il procedimento della IV, 10 consiste nel costruire un triangolo isoscele nel quale la base sia la sezione aurea (II, 11) del lato.

Sembra che tutto il procedimento costruttivo delle IV, 10-11 sia di origine pitagorica, come si rileverebbe anche dalla connessione col pentagono stellato, simbolo della scuola.

Va avvertito, infine, che altre proposizioni, relative al pentagono e al decagono regolari, si trovano nel libro XIII degli *Elementi* (prop. 7-11).

uguale al quadrato di *BD*, si ha che *BD* è tangente al cerchio *ACD* (III, 37). Poiché dunque *BD* è tangente [al cerchio], mentre la corda *DC* è stata tracciata in esso dal punto di contatto *D*, l'angolo *BDC* è uguale all'angolo iscritto nel segmento alterno del cerchio (III, 32). Poiché dunque l'angolo *BDC* è uguale all'angolo *DAC*, si aggiunga ad essi in comune l'angolo *CDA*; tutto quanto l'angolo *BDA* è quindi uguale alla somma dei due angoli *CDA*, *DAC* (noz. com. II). Ma alla somma degli angoli *CDA*, *DAC* è uguale l'angolo esterno *BCD* (I, 32), per cui anche gli angoli *BDA*, *BCD* sono fra loro uguali (noz. com. I). Ma l'angolo *BDA* è uguale all'angolo *CBD*, poiché pure il lato *AD* è uguale al lato *AB* (I, 5); cosicché anche gli angoli *DBA*, *BCD* sono uguali. Quindi i tre angoli *BDA*, *DBA*, *BCD* sono uguali fra loro. E poiché l'angolo *DBC* è uguale all'angolo *BCD*, pure il lato *BD* è uguale al lato *DC* (I, 6). Ma *BD* è per ipotesi uguale a *CA*, per cui anche *CA*, *CD* sono uguali fra loro; cosicché pure l'angolo *CDA* è uguale all'angolo *DAC* (I, 5); perciò la somma degli angoli *CDA*, *DAC* è il doppio dell'angolo *DAC*. Ma l'angolo *BCD* è uguale alla somma degli angoli *CDA*, *DAC*; anche *BCD* è quindi doppio di *CAD*. Ma l'angolo *BCD* è uguale a ciascuno dei due angoli *BDA*, *DBA*; perciò anche ciascuno dei due angoli *BDA*, *DBA* è doppio dell'angolo *DAB*.

Dunque, è stato costruito il triangolo isoscele *ABD* avente ciascuno dei due angoli alla base *DB* uguale al doppio dell'angolo rimanente. – C.D.F.

APPLICA: I, 5, 6, 32; II, 11; III, 32, 37; IV, 1, 5.

È APPLICATA IN: IV, 11.

PROPOSIZIONE II.

Iscrivere in un cerchio dato un pentagono equilatero ed equiangolo.

Sia *ABCDE* il cerchio dato; si deve dunque iscrivere un pentagono equilatero ed equiangolo nel cerchio *ABCDE*.

Si assuma il triangolo isoscele *FGH*, avente ciascuno dei due angoli in *G*, *H* che sia il doppio dell'angolo in *F* (IV, 10), e nel cerchio *ABCDE* si iscriva il triangolo *ACD* equiangolo rispetto al triangolo *FGH*, in modo che l'angolo *CAD* sia uguale all'angolo in *F*, mentre gli angoli *ACD*, *CDA* siano uguali rispettivamente agli angoli in *G*, *H* (IV, 2)[a]; pure ciascuno dei due angoli *ACD*, *CDA* è quindi doppio dell'angolo *CAD*. Si dividano ora per metà gli angoli *ACD*, *CDA* rispettivamente con le rette *CE*, *DB* (I, 9), e risultino tracciate le congiungenti *AB*, *BC*, *DE*, *EA*[b].

Poiché dunque ciascuno dei due angoli *ACD*, *CDA* è il doppio dell'angolo *CAD*, ed essi sono stati divisi per metà dalle rette *CE*, *DB*, i cinque angoli *DAC*, *ACE*, *ECD*, *CDB*, *BDA* sono uguali fra loro. Ma angoli uguali insistono su archi uguali (III, 26); perciò i cinque archi *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EA* sono fra loro uguali. Ma archi uguali sottendono corde uguali (III, 29); le cinque corde *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EA* sono quindi uguali fra loro; dunque il pentagono *ABCDE* è equilatero. Dico adesso che è anche equiangolo. Infatti, poiché l'arco *AB* è uguale all'arco *DE*, si aggiunga ad essi in comune l'arco *BCD*; tutto quanto l'arco *ABCD* è perciò uguale a tutto quanto l'arco *EDCB* (noz. com. II). Ma l'angolo *AED* insiste sull'arco *ABCD*, mentre l'angolo *BAE* insiste sul-

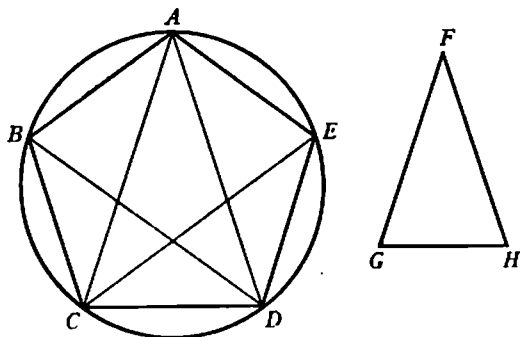
a. Letteralmente: mentre gli angoli in *G*, *H* siano uguali rispettivamente agli angoli *ACD*, *CDA*.

b. Il Gregory (cfr. *Euclidis quae supersunt omnia. Ex recensione Davidis Gregorii*, Oxford, 1703, p. 86), che aveva nel testo *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EA*, osservando evidentemente come la retta *CD* sia stata già tracciata, espungeva *CD* dal testo, a questo punto, come non genuino; Heiberg, che appunto *CD* qui non riporta, concorda con Gregory.

l'arco *EDCB*; quindi anche gli angoli *BAE*, *AED* sono uguali (III, 27). Per la stessa ragione, pure ciascuno degli angoli *ABC*, *BCD*, *CDE* è uguale a ciascuno dei due angoli *BAE*, *AED*, per cui il pentagono *ABCDE* è equiangolo. Ma fu dimostrato che esso è anche equilatero.

Dunque, è stato iscritto in un cerchio dato un pentagono equilatero ed equiangolo. – C.D.F.

APPLICA: I, 9; III, 26, 27, 29; IV, 2, 10.

È APPLICATA IN: IV, 12, 16; XIII, 16.

PROPOSIZIONE 12.

Circoscrivere ad un cerchio dato un pentagono equilatero ed equiangolo [7].

Sia *ABCDE* il cerchio dato; si deve dunque circoscrivere al cerchio *ABCDE* un pentagono equilatero ed equiangolo.

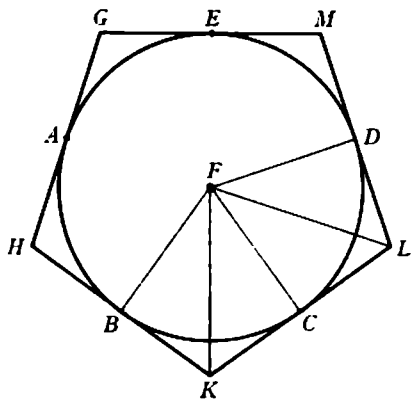
Supponiamo che i punti *A*, *B*, *C*, *D*, *E* siano i vertici di un pentagono iscritto (IV, 11), in modo che gli archi *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EA* siano uguali (III, 28), che per *A*, *B*, *C*, *D*, *E* si siano condotte *GH*, *HK*, *KL*, *LM*, *MG* tangenti al cerchio *ABCDE* (III, 1; I, 11; III, 16, coroll.), si sia preso

[7] Come per il quadrato nelle proposizioni precedenti, così dopo la IV, 11 abbiamo altre tre proposizioni (12, 13, 14) riguardanti il pentagono « equilatero ed equiangolo ». Mentre nella IV, 11 si tratta di iscrivere un tal pentagono in un cerchio dato, nella IV, 12 si tratta di circoscriverlo. Nelle IV, 13-14 si parte, invece, da un pentagono regolare dato e si iscrive, o rispettivamente si circoscrive, il cerchio.

il centro *F* del cerchio (III, 1), e si siano tracciate le congiungenti *FB*, *FK*, *FC*, *FL*, *FD*[a].

Ora, poiché la retta *KL* è tangente in *C* al cerchio *ABCDE*, ed è stata tracciata la congiungente *FC* dal centro *F* al punto di contatto *C*, si ha che *FC* è perpendicolare a *KL* e che ciascuno dei due angoli in *C* è retto. Per la stessa ragione, anche gli angoli coi vertici nei punti *B*, *D* sono retti. E poiché l'angolo *FCK* è retto, il quadrato di *FK* è uguale alla somma dei quadrati di *FC*, *CK* (I, 47). Per la stessa ragione allora, il quadrato di *FK* è pure uguale alla somma dei quadrati di *FB*, *BK*, cosicché la somma dei quadrati di *FC*, *CK* è uguale alla somma dei quadrati di *FB*, *BK*; e di essi il quadrato di *FC* è uguale al quadrato di *FB*, per cui il quadrato di *CK*, che rimane della prima somma, è uguale al quadrato di *BK*, che rimane della seconda (noz. com. III). Quindi *BK* è uguale a *CK*. E poiché *FB* è uguale a *FC*, e *FK* è comune, i due lati *BF*, *FK* sono uguali ai due lati *CF*, *FK*; e la base *BK* è uguale alla base *CK*; l'angolo *BFK* è perciò uguale all'angolo *KFC* (I, 8), mentre l'angolo *BKF* è uguale all'angolo *FKC*; quindi l'angolo *BFC* è doppio dell'angolo *KFC*, mentre l'angolo *BKC* lo è dell'angolo *FKC*. Per la stessa ragione, pure l'angolo *CFD* è doppio dell'angolo *CFL*, mentre l'angolo *DLC* lo è dell'angolo *FLC*. E poiché l'arco *BC* è uguale all'arco *CD*, anche l'angolo *BFC* è uguale all'angolo *CFD* (III, 27). E *BFC* è doppio di *KFC*, mentre *DFC* lo è di *LFC*: pure gli angoli *KFC*, *LFC* sono perciò uguali fra loro (noz. com. VI). Ma anche gli angoli *FCK*, *FCL* sono uguali. Dunque *FKC*, *FLC* sono due triangoli aventi due angoli uguali a due angoli ed un lato uguale ad un lato, ossia *FC* che è ad essi comune, per cui essi avranno uguali anche i lati rimanenti ai lati rimanenti e l'angolo rimanente uguale all'angolo rimanente (I, 26); quindi la retta *KC* è uguale alla retta *CL*, e l'angolo

a. Letteralmente sarebbe « Risultino i punti *A*, *B*, *C*, *D* assunti quali punti degli angoli (cioè i punti angolari) del pentagono iscritto, in modo che..., risultino per *A*, *B*, *C*, *D*, *E* condotte..., preso il centro..., e tracciate le congiungenti... ».

FKC è uguale all'angolo *FLC*. E poiché *KC* è uguale a *CL*, si ha che *KL* è doppia di *KC*. Per la stessa ragione, si potrà dimostrare che pure *HK* è doppia di *BK*. Ma *BK* è uguale a *KC*; quindi anche *HK*, *KL* sono uguali (noz. com. V). Similmente si potrà dimostrare che pure ciascuna delle rette *HG*, *GM*, *ML* è uguale a ciascuna delle due rette *HK*, *KL*; il pentagono *GHKLM* è quindi equilatero (noz. com. I). Dico adesso che è anche equiangolo. Infatti, poiché l'angolo *FKC* è uguale all'angolo *FLC*, e fu dimostrato che l'angolo *HKL* è doppio dell'angolo *FKC*, mentre l'angolo *KLM* è doppio dell'angolo *FLC*, anche gli angoli *HKL*, *KLM* sono fra loro uguali (noz. com. V). Similmente si potrà dimostrare che pure ciascuno degli angoli *KHG*, *HGM*, *GML* è uguale a ciascuno dei due angoli *HKL*, *KLM*; perciò i cinque angoli *GHK*, *HKL*, *KLM*, *LMG*, *MGH* sono uguali fra loro (noz. com. I). Il pentagono *GHKLM* è quindi equiangolo. Ma fu dimostrato che esso è anche equilatero, ed è stato circoscritto al cerchio *ABCDE*[a]. – C.D.F.

APPLICA: I, 8, 26, 47; III, 1, 16, coroll. 28; IV, 11.

[a] La conclusione, che sarebbe ordinaria alla fine della proposizione: « Dunque, è stato circoscritto al cerchio dato un pentagono equilatero ed equiangolo », è omessa in tutti i Mss. Nota Heiberg che fu aggiunta da August.

PROPOSIZIONE 13.

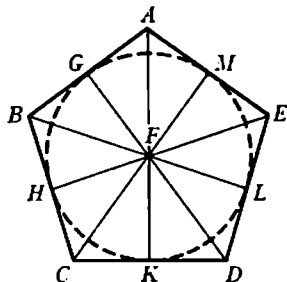
Iscrivere un cerchio in un pentagono dato, che sia[a] *equilatero ed equiangolo.*

Sia *ABCDE* il pentagono dato, equilatero ed equiangolo; si deve dunque iscrivere un cerchio nel pentagono *ABCDE*.

Infatti, i due angoli *BCD*, *CDE* vengano divisi per metà rispettivamente dalle rette *CF*, *DF* (I, 9), e dal punto *F*, in cui le rette *CD*, *DF* si incontrano, si traccino le rette congiungenti *FB*, *FA*, *FE*. Ora, poiché *BC* è uguale a *CD*, e *CF* è comune, i due lati *BC*, *CF* sono uguali ai due lati *DC*, *CF*; e l'angolo *BCF* è uguale all'angolo *DCF*; la base *BF* è quindi uguale alla base *DF*, il triangolo *BCF* è uguale al triangolo *DCF*, e gli angoli rimanenti del primo, ossia quelli a cui sono opposti i lati uguali, saranno uguali ai rispettivi angoli rimanenti del secondo (I, 4); perciò l'angolo *CBF* è uguale all'angolo *CDF*. E poiché l'angolo *CDE* è doppio dell'angolo *CDF*, e l'angolo *CDE* è uguale all'angolo *ABC*, mentre l'angolo *CDF* è uguale all'angolo *CBF*, anche *CBA* è doppio di *CBF*; quindi l'angolo *ABF* è uguale all'angolo *FBC*, per cui l'angolo *ABC* è stato diviso per metà dalla retta *BF*. Similmente si potrà dimostrare che pure i due angoli *BAE*, *AED* sono stati divisi per metà rispettivamente dalle rette *FA*, *FE*. Risultino ora condotte dal punto *F* le rette *FG*, *FH*, *FK*, *FL*, *FM* perpendicolari alle rette *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EA*. E poiché l'angolo *HCF* è uguale all'angolo *KCF*, ma anche l'angolo retto *FHC* è uguale all'angolo retto *FKC*, si ha che *FHC*, *FKC* sono due triangoli aventi due angoli uguali a due angoli ed un lato uguale ad un lato, ossia *FC* che è ad essi comune e che è opposto ad uno degli angoli uguali; essi avranno quindi uguali anche i lati rimanenti ai lati rimanenti (I, 26); perciò la perpendicolare *FH* è uguale alla perpendicolare *FK*. Similmente si potrà dimostrare che pure ciascuna delle rette *FL*, *FM*, *FG* è uguale a ciascuna delle due rette *FH*, *FK*;

a. Letteralmente: è.

le cinque rette *FG, FH, FK, FL, FM* sono così uguali fra loro. Quindi il cerchio descritto con centro *F* e per raggio una delle rette *FG, FH, FK, FL, FM* passerà anche per i punti rimanenti ed avrà per tangenti[a] le rette *AB, BC, CD, DE, EA*, poiché gli angoli coi vertici nei punti *G, H, K, L, M* sono retti. Se difatti non fosse loro tangente, ma le venisse a tagliare, risulterebbe che una retta tracciata perpendicolarmente al diametro di un cerchio, partendo da una estremità del diametro, verrebbe a cadere internamente al cerchio: il che fu dimostrato assurdo (III, 16). Perciò il cerchio descritto con centro *F* e avente per raggio una delle rette *FG, FH, FK, FL, FM* non taglierà le rette *AB, BC, CD, DE, EA*; le avrà quindi per tangenti. Risulti esso descritto, come è il cerchio *GHKLM*.

Dunque, è stato iscritto un cerchio in un pentagono dato, che sia equilatero ed equiangolo. – C.D.F.

APPLICA: I, 9, 12, 26; III, 16, coroll.

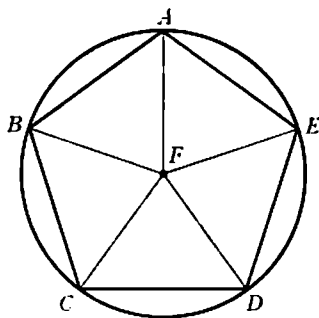
PROPOSIZIONE 14.

Circoscrivere un cerchio ad un pentagono dato, che sia equilatero ed equiangolo.

Sia *ABCDE* il pentagono dato, che è equilatero ed equiangolo; si deve dunque circoscrivere un cerchio al pentagono *ACBDE*.

Vengano dunque divisi per metà i due angoli *BCD, CDE* rispettivamente dalle rette *CF, DF* (I, 9), e dal punto *F*, in cui le rette si incontrano, si traccino sino ai punti *B, A, E* le rette congiungenti *FB, FA, FE*. Similmente a quanto

a. Letteralmente: verrà a far tangenza con.

precede [nella proposizione 13], si potrà dimostrare che anche ciascuno degli angoli *CBA*, *BAE*, *AED* è stato diviso per metà rispettivamente dalle rette *FB*, *FA*, *FE*. Ora, poiché l'angolo *BCD* è uguale all'angolo *CDE*, e l'angolo *FCD* è metà dell'angolo *BCD*, mentre l'angolo *CDF* è metà dell'angolo *CDE*, anche gli angoli *FCD*, *FDC* sono uguali; cosicché pure il lato *FC* è uguale al lato *FD* (I, 6). Similmente si potrà dimostrare che anche ciascuna delle rette *FB*, *FA*, *FE* è uguale a ciascuna delle due *FC*, *FD*, per cui le cinque rette *FA*, *FB*, *FC*, *FD*, *FE* sono uguali fra loro. Quindi il cerchio descritto con centro *F* e avente per raggio una delle rette *FA*, *FB*, *FC*, *FD*, *FE* passerà anche per i punti rimanenti, e risulterà circoscritto. Lo si descriva[a], e sia il cerchio *ABCDE*.

Dunque, è stato circoscritto un cerchio ad un pentagono dato, che sia equilatero ed equiangolo. – C.D.F.

Applica: I, 4, 6, 9.

È applicata in: XIII, 8, 18, lemma.

Proposizione 15.

Iscrivere in un cerchio dato un esagono equilatero ed equiangolo[8].

Sia *ABCDEF* il cerchio dato; si deve dunque iscrivere nel cerchio *ABCDEF* un esagono equilatero ed equiangolo.

a. Letteralmente: Risulti esso circoscritto.

[8] Per l'esagono regolare si ha invece una sola proposizione (IV, 15), e questa si riferisce all'iscrizione dell'esagono in un cerchio dato. Ma in un corollario, che fa séguito alla proposizione, si accenna alle altre costruzioni (esagono circoscritto ad un cerchio dato, cerchio iscritto e rispettivamente circoscritto ad un esagono dato).

Nel cerchio *ABCDEF* si conduca il diametro *AD* e si prenda il centro del cerchio stesso, cioè *G*, con centro *D* e raggio *DG* si descriva il cerchio *EGCH*, si traccino le congiungenti *EG*, *CG* e si prolunghino sino ai punti *B*, *F* [a], si traccino infine le congiungenti *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EF*, *FA*; dico che l'esagono *ABCDEF* è equilatero ed equiangolo.

Infatti, poiché il punto *G* è il centro del cerchio *ABCDEF*, si ha che *GE* è uguale a *GD*. Di nuovo, poiché il punto *D* è il centro del cerchio *GCH*, si ha che *DE* è uguale a *DG*. Ma fu dimostrato che *GE* è uguale a *GD*, per cui anche *GE*, *ED* sono uguali; il triangolo *EGD* è quindi equilatero, e pure i suoi tre angoli *EGD*, *GDE*, *DEG* sono uguali fra loro, dal momento che nei triangoli isosceli gli angoli alla base sono fra loro uguali (I, 5). E poiché la somma dei tre angoli di un triangolo è uguale a due retti (I, 32), l'angolo *EGD* è un terzo di due angoli retti [b]. Similmente si potrà dimostrare che anche *DGC* è un terzo di due retti. E poiché la retta *CG* innalzata su *EB* forma gli angoli adiacenti *EGC*, *CGB* la cui somma è uguale a due retti [c] (I, 13), pure l'angolo rimanente *CGB* è un terzo di due retti; gli angoli *EGD*, *DGC*, *CGB* sono quindi uguali fra loro, cosicché anche gli angoli rispettivamente opposti al vertice [d], cioè *BGA*, *AGF*, *FGE* sono uguali. Perciò i sei angoli *EGD*, *DGC*, *CGB*, *BGA*, *AGF*, *FGE* sono uguali fra loro. Ma angoli uguali insistono su archi uguali (III, 26); quindi i sei archi *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EF*, *FA* sono fra loro uguali. Ma archi uguali sottendono corde uguali (III, 29), per cui le sei rette [sottese] sono fra

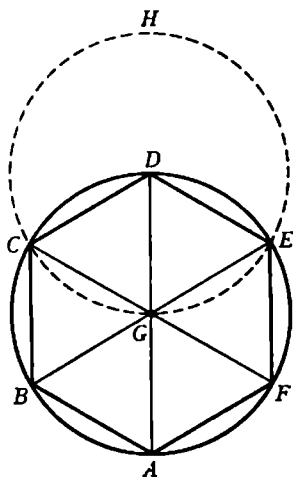
a. Letteralmente: risulti descritto il cerchio *EGCH*, dopo che si siano tracciate le congiungenti *EG*, *CG*, condotte, tratte (cioè, prolungate) sino ai punti *B*, *F*, e risultino tracciate...

b. Letteralmente sarebbe: «... gli angoli alla base sono fra loro uguali; e la somma dei tre angoli (cioè, in greco, *i tre angoli sono*)...; quindi l'angolo *EGD*... ».

c. Letteralmente: gli angoli adiacenti *EGC*, *CGB* uguali a due retti.

d. Letteralmente: gli angoli al vertice rispetto ad essi.

loro uguali, e l'esagono *ABCDEF* è equilatero. Dico adesso che è anche equiangolo. Infatti, poiché l'arco *FA* è uguale all'arco *ED*, si aggiunga ad essi in comune l'arco *ABCD*; tutto quanto l'arco *FABCD* è perciò uguale a tutto quanto l'arco *EDCBA*. Ma sull'arco *FABCD* insiste l'angolo *FED*, mentre sull'arco *EDCBA* insiste l'angolo *AFE*; quindi l'angolo *AFE* è uguale all'angolo *DEF* (III, 27). Similmente si potrà dimostrare che pure gli angoli rimanenti dell'esagono *ABCDEF* sono uguali, ognuno, a ciascuno dei due angoli *AFE*, *FED*, sicché l'esagono *ABCDEF* è equiangolo. Ma fu dimostrato che esso è anche equilatero; ed è stato iscritto nel cerchio *ABCDEF*.

Dunque, è stato iscritto in un cerchio dato un esagono equilatero ed equiangolo. – C.D.F.

APPLICA: I, 5, 13, 15, 32; III, 1, 26, 27, 29.

COROLLARIO.

È da ciò evidente che il lato di un esagono è uguale al raggio di un cerchio.

E similmente al caso del pentagono, se noi conduciamo, per i punti di divisione [posti] sulla circonferenza del cerchio[a], rette tangenti al cerchio, si verrà a circoscrivere al cerchio un esagono equilatero ed equiangolo in conformità a quanto fu detto nel caso del pentagono (IV, 12). Ed infine, mediante procedimento similare a quanto detto nel caso

a. Cfr. nota *c* alla proposizione 16.

del pentagono (IV, 13-14), potremo sia iscrivere un cerchio in un esagono dato, che circoscriverlo ad esso. – C.D.F.

È APPLICATO IN: XIII, 10, 12, 16, 18.

PROPOSIZIONE 16.

Iscrivere in un cerchio dato un pentadecagono equilatero ed equiangolo [9].

Sia *ABCD* il cerchio dato; si deve dunque iscrivere nel cerchio *ABCD* un pentadecagono equilatero ed equiangolo.

Sia *AC* il lato di un triangolo equilatero iscritto nel cerchio (IV, 2), e sia *AB* il lato di un pentagono equilatero [pure iscritto nel cerchio] (IV, 11) [a]; perciò dei quindici archi uguali di cui consta la circonferenza del cerchio *ABCD*, l'arco *ABC*, che è un terzo della circonferenza, verrà a constare di cinque, mentre l'arco *AB*, essendo un quinto della circonferenza, verrà a constare di tre; quindi l'arco *BC* che rimane consterà di due [di quei quindici archi]. Si divida l'arco *BC* per metà in *E* (III, 30); ciascuno dei due archi *BE*, *EC* è perciò un quindicesimo della circonferenza *ABCD*.

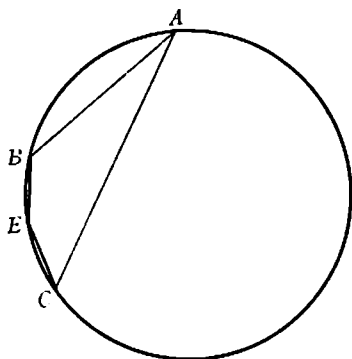
Se dunque, dopo aver tracciate le congiungenti *BE*, *EC*, adattiamo nel cerchio *ABCD* rette ad esse uguali in successione continua (IV, 1), verrà ad iscriversi in esso un pentadecagono che è equilatero ed equiangolo. – C.D.F.

E similmente al caso del pentagono, se noi conduciamo, per i punti di divisione posti sulla circonferenza del cerchio,

a. Letteralmente: risultino iscritti nel cerchio *ABCD* sia il lato *AC* del triangolo equilatero in esso iscritto, che il lato *AB* di un pentagono equilatero.

[9] L'arco relativo al lato del pentadecagono regolare iscritto si deduce come metà della differenza tra quello del triangolo equilatero e quello del pentagono regolare, ambedue iscritti. Si tratta, in sostanza, dell'operazione aritmetica:

$$\frac{1}{15} = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) : 2$$

rette tangenti al cerchio, si circoscriverà al cerchio un pentadecagono equilatero ed equiangolo (IV, 12). Ed infine, mediante dimostrazioni simili a quelle usate nel caso del pentagono, noi potremo sia iscrivere un cerchio in un pentadecagono dato, che circoscriverlo ad esso (IV, 13-14). – C.D.F.

APPLICA: III, 30; IV, 1, 2, 11.

LIBRO QUINTO

Nel libro quinto viene esposta la teoria delle proporzioni tra grandezze, teoria che venne fin da antichi tempi attribuita *al matematico ed astronomo Eudosso di Cnido, contemporaneo di Platone.*

Ma per questa, come per altre attribuzioni del genere, sembra estremamente inverosimile una pedissequa ripetizione, quasi letterale, da parte di Euclide. È questi un espositore di così grande valore che non si può dubitare, a nostro parere, del fatto che egli abbia, sia pure entro certi limiti più o meno ristretti secondo i casi, rielaborato con libertà la stesura di una materia pur da altri ideata e introdotta.

Nessun dubbio, ad esempio, sembra possa nutrirsi sul fatto che la famosa definizione V, di proporzione tra quattro grandezze, sia proprio dovuta a Eudosso: ma pure nessun dubbio ci sembra possa nutrirsi sul fatto che la parte espositiva (ad esempio per quella parte della trattazione che giunge al punto d'arrivo notevole della prop. 16 sulla permutazione dei medi) sia opera anche *di Euclide.*

In altri termini la ricerca delle fonti di Euclide non deve farci dimenticare la statura del grande geometra alessandrino: Euclide evidentemente elabora e rielabora, e non trascrive letteralmente: sicché gli Elementi, *pur offrendo una sistemazione delle teorie, possono dirsi veramente* di Euclide.

Che la teoria delle proporzioni tra grandezze venga esposta soltanto nel libro quinto è cosa da porsi in relazione col fatto, cui s'è già accennato nell'Introduzione generale, che Euclide

ha cercato di esporre il maggior numero possibile di argomenti in modo indipendente dalle proporzioni: ciò che, come s'è visto, egli appunto fa nei primi quattro libri.

In un primo tempo questo ritardo, *che dovette essere caratteristico di un periodo della geometria pre-euclidea, fu forse dovuto al carattere non rigoroso che inizialmente una teoria ingenua delle proporzioni (qual è quella valida per i numeri interi, che troviamo esposta nei libri aritmetici degli* Elementi) *venne a presentare dopo la scoperta delle grandezze incommensurabili. Più tardi, dopo che Eudosso di Cnido ebbe resa rigorosa la teoria in ogni caso, di commensurabilità e di incommensurabilità, un tal motivo di ritardo non sussisteva più. Si pensa allora al desiderio, da parte di Euclide, di rinviare quanto possibile una trattazione che, per essere logicamente ineccepibile, presentava tuttavia innegabili difficoltà per il lettore (l'eco delle quali difficoltà troviamo ancora in Galileo). Si può anche pensare ad esigenze di* purismo *geometrico, dato che la teoria del libro quinto si riferisce a grandezze in generale (se pur soddisfacenti a determinate condizioni) e non esclusivamente a grandezze geometriche: le applicazioni alla geometria si trovano poi esposte nel libro sesto.*

E sembra che Euclide esiti ancora, pur nel libro quinto, nell'esporre la teoria di Eudosso: egli infatti, all'inizio del libro, offre al lettore una specie di introduzione, nella quale tratta il caso più semplice delle grandezze commensurabili (con rapporto intero dapprima, poi anche razionale).

Certamente la definizione quinta, cioè quella di grandezze che a due a due si trovano nello stesso rapporto, si presenta ostile a prima vista al lettore: si presentò, s'è detto, ostile a Galileo, il quale la criticò non già perché la pensasse non rigorosa e precisa, ma perché la ritenne troppo distaccata dall'intuizione (cfr. Principio di Giornata quinta *in:* Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze; *cfr. anche:* A. FRAJESE, Galileo matematico, *Roma [Studium], 1964, pp. 38-52).*

Detta definizione equivale in sostanza a quella moderna di uguaglianza di due numeri reali (appunto razionali o irrazionali secondo che le grandezze considerate siano commensu-

rabili o incommensurabili). Essa infatti stabilisce che due grandezze, A, B *sono nello stesso rapporto di altre due,* C, D *quando, presi in qualunque modo i numeri interi* m, n, *e considerati gli equimultipli* mA, mC, *della prima e della terza grandezza e gli equimultipli* nB, nD *della seconda e della quarta, a seconda che si abbia* $mA \gtreqless nB$ *si abbia corrispondentemente* $mC \gtreqless nD$, *corrispondendo il segno* maggiore *al* maggiore, *l'*uguale *all'*uguale, *il* minore *al* minore: *cioè quando* tutti *i valori approssimati per difetto del rapporto tra le prime due grandezze siano valori approssimati pure per difetto anche del rapporto tra le altre due grandezze, e similmente per i valori approssimati per eccesso. Ciò equivale appunto a dire che due numeri reali sono uguali se determinano la stessa* sezione *nell'insieme dei numeri razionali.*

È a base di questa interpretazione una concezione intuitiva del rapporto, nel senso che se si presenta una relazione del tipo:

$$mA > nB$$

dove m, n *sono numeri interi, e* A, B *sono due grandezze (anche incommensurabili) essa, venendo trasformata in:*

$$A > \frac{n}{m} B$$

conduce a concepire n/m *come valore approssimato per difetto di un «quid» che dipende dal confronto tra* A *e* B *e si assume come rapporto*

$$A : B$$

Si può perciò dire che anche alla base della definizione quinta vi sia un briciolo di intuizione.

Va poi osservato che le grandezze *considerate da Euclide nel libro quinto, e alle quali si applica la quinta definizione, devono soddisfare a due requisiti, che vengono espressi nelle due definizioni (terza e quarta): il requisito di essere omogenee e quello di essere* archimedee, *cioè di soddisfare al cosiddetto postulato di Archimede. Questo postulato, dovuto assai probabilmente a Eudosso, viene enunciato come definizione, nel senso*

che si definiscono (*def. quarta*) *due grandezze come* aventi rapporto tra loro *quando soddisfano appunto a quel postulato, cioè quando si può sempre trovare un multiplo della grandezza minore che superi la maggiore.*

Per quanto poi riguarda l'omogeneità, essa viene introdotta nella definizione terza, pur senza che venga ivi propriamente definita. Ma potremmo dire che l'omogeneità rappresenti per Euclide la possibilità di paragonare tra loro due grandezze, nel senso di stabilire quale di esse sia la maggiore, quale la minore (*oltre, si intende, al caso dell'uguaglianza*): *un tal paragone viene infatti eseguito nella seguente definizione quarta, nella quale* (*come s'è detto*) *si parla della possibilità che una grandezza multipla, ad esempio, di* A *o di* C, *superi un'altra multipla di* B *o di* D. *Naturalmente si presuppongono in questa interpretazione i concetti primitivi di uguaglianza e di disuguaglianza: e si può naturalmente pensare che tali concetti siano collegati alle* Nozioni comuni, *premesse al primo libro degli* Elementi, *le quali forniscono in sostanza una definizione dell'uguaglianza, ed in certo senso anche della disuguaglianza.*

E non deve meravigliare questo richiamo al libro primo: esistono infatti collegamenti a largo raggio fra i vari libri degli Elementi, *a prescindere dalla puntuale deduzione dell'una proposizione dall'altra: sono appunto questi collegamenti a vasto respiro che vengono a determinare* l'unità *sostanziale degli* Elementi *come opera di Euclide.*

Nel libro quinto, secondo l'idea fondamentale dovuta certamente a Eudosso di Cnido, si tratta di uguaglianza o di disuguaglianza di rapporti che si riferiscono tanto al caso delle grandezze commensurabili quanto a quello delle grandezze incommensurabili. Anzi, come il lettore potrà vedere considerando la stessa definizione quinta, si coglie quasi una sensazione di sforzo *in questo* forzato *abbinamento dei due casi.*

Il collegamento col seguente libro sesto è diretto ed evidente: ivi si applica alla geometria la teoria generale delle proporzioni del libro quinto.

Nei libri aritmetici (*settimo, ottavo, nono*) *non si ha più la fusione tra i due casi* (*commensurabile e incommensurabile*)

e si tratta soltanto del rapporto tra quelle particolari grandezze, tutte commensurabili tra loro, che sono i numeri interi: questi soddisfano alle condizioni espresse nelle prime definizioni del libro quarto.

Nel libro decimo, poi, si ha l'antitesi rispetto al libro quinto in senso contrario ai libri aritmetici.

Nel libro decimo infatti, il motivo fondamentale è proprio l'opposto di quello del libro quinto; ed è costituito dalla distinzione netta tra commensurabilità ed incommensurabilità. Particolare attenzione viene ivi portata alle grandezze incommensurabili, ed anche alla distinzione tra varie specie di incommensurabilità per quanto riguarda la retta (cioè i segmenti di retta). Distinzione, quest'ultima, che raggiunge il più alto grado di raffinatezza appunto nel perfettissimo schema del libro decimo.

Ma il collegamento tra libro decimo e libro quinto si vede anche nel fatto che le grandezze considerate nel libro decimo sono le stesse del libro quinto: esse soddisfano infatti alle due condizioni fondamentali: essere omogenee ed essere archimedee.

Basti pensare che proprio nella prima proposizione del libro decimo si dimostra una proprietà, che si fonda proprio sul postulato di Archimede (cioè sulla def. V, 4): che anzi può dirsi un semplice corollario di detto postulato, o addirittura un modo particolare di esprimerlo.

Vedremo inoltre, per quanto riguarda i già citati libri aritmetici (VII, VIII e IX), che un legame diretto v'è anche tra di essi e il libro quinto, poiché alcune assunzioni *inespresse riguardanti i numeri interi rientrano come casi particolari in proposizioni sulle proporzioni tra grandezze. Si profila così meglio, ripetiamo, il carattere unitario che Euclide ha impresso alla sua opera.*

A. F.

DEFINIZIONI

I. Una grandezza è parte [a] di una grandezza, la minore di quella maggiore, quando essa misuri la maggiore.

II. La grandezza maggiore è multipla di quella minore, quando sia misurata dalla minore.

III. Rapporto (o *ragione*, in greco, λόγος, *ratio*) fra due grandezze omogenee è un certo modo di comportarsi rispetto alla quantità [1].

a. La parola « parte » (in greco μέρος) significa qui *sottomultiplo*, ossia parte aliquota, mentre nella Nozione comune V: « il tutto è maggiore della parte », parte è usato in senso più generale; si può esprimere tale distinzione con le parole, ad esempio, di ARISTOTELE, *Metaph.*, 1023 b 12: « In un senso parte è ciò in cui una quantità può comunque essere divisa; infatti ciò che è sottratto da una quantità, in quanto quantità, è sempre chiamato " parte " di essa, come ad es. due è detto essere, in un senso, parte di tre. Ma in un altro senso *parte* è soltanto *ciò che misura* delle quantità. Così due è, in un senso, detto esser parte di tre, in un altro no ».

[1] Questa *definizione* è stata criticata, in quanto tautologica. Ma è evidente che in essa Euclide non pretende di *definire* il rapporto, ma enuncia anzitutto una condizione (l'omogeneità) alla quale le grandezze devono soddisfare affinché si possa parlare di rapporto fra di esse. Nella definizione seguente (la quarta), nello stesso ordine di idee, Euclide impone alle grandezze una seconda condizione, oltre a quella di essere omogenee: di soddisfare a quello che i posteri chiameranno *postulato di Archimede*.

Per quanto poi riguarda l'*omogeneità*, essa va considerata come un concetto primitivo, l'introduzione del quale risponde ad una intuizione

IV. Si dice che hanno fra loro rapporto (o *ragione*) le grandezze le quali possono, se moltiplicate, superarsi reciprocamente [2].

immediata, dato anche che il termine che abbiamo trasportato nella nostra lingua ha per i Greci un chiaro significato.

Ma nella def. III c'è anche un'anticipazione su quel che sarà il rapporto tra due grandezze (omogenee ed archimedee). Si tratta di *qualcosa* che riguarda la *quantità*.

Così, per esempio, il rapporto tra due figure piane prescinde dalla loro forma, ma si riferisce soltanto alle loro *aree*. Sicché una grandezza, che sia uno dei termini di un rapporto, può essere sostituita da un'altra grandezza *uguale* senza che il rapporto (rispetto ad una terza grandezza) subisca alcun cambiamento.

Che poi il rapporto, così come viene definito per astrazione nella def. V (cfr. nota a detta def.) soddisfi appunto al requisito adombrato nella def. III, viene dimostrato da Euclide nella prop. V, 7 (cfr. nota ivi) la quale acquista quindi un significato importante.

[2] Euclide considera come *aventi rapporto* tra loro due grandezze soltanto quando esse soddisfino al postulato detto di Archimede, cioè quando si può trovare un multiplo di una delle grandezze tale che esso superi l'altra:

$$mA > B$$

Le grandezze devono cioè, come oggi si dice, essere *archimedee*. A Euclide era ben presente il caso delle grandezze *non-archimedee* (che egli quindi esclude dalla sua trattazione). Tali sono ad esempio gli angoli, se a quelli (rettilinei) che comunemente oggi consideriamo si aggiungono quelli curvilinei (nei quali almeno uno dei lati è una linea curva). Così, per esempio, nella III, 16 (cfr. nota ivi) Euclide mostra, in sostanza, che non esiste alcun sottomultiplo di un angolo rettilineo che sia minore dell'angolo di contingenza (cioè dell'angolo curvilineo compreso tra il cerchio e la tangente). Angoli rettilinei e curvilinei presi insieme non soddisfano cioè al postulato di Archimede che sotto la forma del sottomultiplo si enuncia appunto come possibilità di trovare un sottomultiplo della grandezza maggiore, il quale sia minore della grandezza minore.

Perciò Euclide non ammette nella sua geometria gli angoli curvilinei, i quali, invece, come sappiamo ad esempio da un brano di Aristotele (*Anal. Pr.*, I, 24, 13-22) trovavano prima diritto di cittadinanza nella geometria.

Come è noto, nel secolo XIX venne, da Dedekind e Cantor, enunciato il postulato della continuità. Da questo (sotto la forma di Dedekind) può dedursi il postulato di Archimede. Quest'ultimo, come del resto è intuitivo (dato che rivela un collegamento tra le grandezze, senza distacchi incolmabili), contiene quindi in sé un concetto, una *carica* (per dir così) di continuità.

È in sostanza l'enunciazione del concetto di continuità così come Euclide poteva darlo. Si può perciò in un certo senso considerare la def. IV del libro quinto come « il sesto postulato di Euclide » (cfr. l'articolo di

V. Si dice che [quattro] grandezze sono nello stesso rapporto, una prima rispetto ad una seconda ed una terza rispetto a una quarta, quando risulti che equimultipli della prima e della terza [presi] secondo un multiplo qualsiasi, ed equimultipli della seconda e della quarta [presi pure] secondo un multiplo qualsiasi, sono gli uni degli altri, cioè ciascuno dei due primi del suo corrispondente fra i secondi, o tutti e due maggiori, o tutti e due uguali, o tutti e due minori, se considerati appunto nell'ordine rispettivo (= quando cioè, presi equimultipli qualunque della prima grandezza e della terza ed equimultipli qualunque della seconda e della quarta, secondo che il multiplo della prima sia maggiore, uguale o minore del multiplo della seconda, l'equimultiplo della terza è corrispondentemente maggiore, uguale o minore dell'equimultiplo della quarta) [3].

A. Frajese recante questo titolo in: « Periodico di matematiche », n. 1-2, 1968, pp. 150-159).

Si potrebbe aggiungere che a partire dal libro quinto Euclide si senta maggiormente in diritto di ricorrere a considerazioni intuitive di continuità: questo spiegherebbe, ad esempio, l'ammissione dell'esistenza della quarta proporzione dopo tre grandezze date, che si trova nella V, 18 e nella applicazione del metodo di esaustione nel libro XII.

Va finalmente detto che il nome di « postulato di Archimede » è del tutto recente (secolo XIX), e venne assegnato a causa dell'uso che Archimede fa di detto postulato nelle sue opere. Ma è evidente che esso è dovuto all'autore della teoria delle proporzioni, cioè a quell'Eudosso di Cnido al quale (come sembra certo) è dovuta la seguente definizione quinta di proporzione, e al quale è anche dovuto quel metodo che i posteri dissero « di esaustione » (cfr. nota alla XII, 2).

[3] È questa la celebre definizione di proporzione degli *Elementi* di Euclide (per quanto il termine *proporzione* entri solo nella definizione seguente). Qui si definisce l'uguaglianza tra due rapporti: Euclide rinunzia cioè alla definizione diretta di rapporto, e ne fornisce una definizione *per astrazione*.

Per mostrare di che si tratti, portiamo l'esempio della definizione di temperatura che una volta veniva adottata in ogni trattato di fisica. Volendo appunto definire la temperatura, si considerano tutti i possibili corpi, e si classificano i corpi stessi ponendo in uno stesso gruppo tutti quelli che posseggono *uguale temperatura*: si deve dunque disporre di una definizione di « uguaglianza di temperatura ». Se allora prendiamo in considerazione gli oggetti di uno stesso gruppo, troviamo che essi possiedono

VI. Grandezze che hanno lo stesso rapporto si chiamino proporzionali[a].

a. Traduciamo il greco ἀνάλογον che è l'equivalente, avverbialmente, di ἀνὰ λόγον, con « proporzionale, proporzionali », o « in proporzione, proporzionalmente », a seconda della convenienza; inoltre: l'espressione rituale greca, in cui ἀνάλογον è appunto usato avverbialmente, è del tipo: ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΗΔ πρὸς τὴν ΔΖ, « quindi proporzionalmente, come *BA* sta ad *AC*, così *GD* sta a *DF* », per fare un esempio; preferiamo mantenere la nostra clausola tradizionale « quindi, in proporzione, *BA* sta ad *AC* come *GD* sta a *DF* ».

i caratteri più svariati: forme diverse, pesi diversi, materie diverse, e così via.

Ma c'è un *quid* che accomuna tutti gli oggetti di ciascun gruppo: è il fatto che essi possiedono *uguale temperatura*. Se allora facciamo *astrazione* da tutti gli altri caratteri, diversi da oggetto a oggetto, e fermiamo la nostra attenzione sul solo carattere comune a tutti, ecco che possiamo ritenere definita (per astrazione) la temperatura stessa (cfr. F. Enriques, *Per la storia della logica*, Bologna, 1922, pp. 148-150).

Questa definizione per astrazione trova poi largo posto nella matematica moderna (cfr. il concetto di insieme-quoziente).

La def. V, 5 di Euclide è dunque quella dell'uguaglianza di rapporti, ossia fornisce una definizione per astrazione del rapporto tra due grandezze.

Il fatto che Euclide proceda in tal modo fa, per dir così, la fortuna della teoria riguardante l'uguaglianza di due rapporti, ossia della teoria delle proporzioni, che entra trionfalmente in tutte le trattazioni matematiche, anche nelle più elementari.

Euclide, a dir vero, non parla di rapporti uguali, ma di grandezze che sono a due a due *nello stesso rapporto*.

Ma si tratta di una vera e propria relazione di eguaglianza (« di equivalenza » diciamo nel linguaggio odierno), che soddisfa alle tre famose proprietà riflessiva, simmetrica, transitiva (cfr. nota alla V, 11 nella quale Euclide dimostra esplicitamente che per la suddetta relazione vale la proprietà transitiva).

La definizione di proporzione che Euclide viene a dare nella quinta del libro quinto non sembra sia opera personale di Euclide, ma viene attribuita concordemente al grande matematico Eudosso di Cnido, vissuto nel IV secolo a. C. (contemporaneo di Platone, e anteriore di qualche decennio a Euclide). A Eudosso, anzi, viene attribuito il *nocciolo* di tutta la teoria del libro quinto, per quanto sia assai probabile che nell'elaborazione e nella stesura del libro stesso abbia anche in misura notevole partecipato Euclide stesso.

È noto che Galileo attaccò decisamente la definizione eudossiana-euclidea di proporzione, ritenendola troppo lontana dall'intuizione. Ciò nel

VII. Quando, degli equimultipli, il multiplo della prima grandezza è maggiore del multiplo della seconda,

Principio di Giornata quinta della sua ultima opera *Discorsi e Dimostrazioni matematiche* (cfr. A. FRAJESE, *Galileo matematico*, Roma [Studium], 1964, pp. 38-52).

Da molti matematici, antichi e recenti, la suddetta definizione (con la relativa teoria) venne invece assai apprezzata, o addirittura ammirata.

Euclide dice che due grandezze A, B sono nello stesso rapporto di altre due C, D quando in qualunque modo si prendano due equimultipli mA, mB delle due prime, e in qualunque modo si prendano due equimultipli nC, nD delle altre due, a seconda che si abbia:

$$mA \gtreqless nB$$

si ha corrispondentemente

$$mC \gtreqless nD.$$

Possiamo anche adoperare le parole con le quali Galileo (*loc. cit.*) sia pure per criticarle, parafrasa il testo euclideo: « Allora quattro grandezze sono proporzionali, quando gli ugualmente multiplici della prima e della terza, presi secondo qualunque multiplicità, si accorderanno sempre nel superare, mancare o pareggiare gli ugualmente multiplici della seconda e della quarta ».

Come si vede, occorre paragonare tra loro, nel modo indicato dalla definizione, *tutti* gli equimultipli (rispettivamente delle due coppie di grandezze) « secondo qualunque multiplicità ». In altre parole la concordanza di segni

$$mA \gtreqless nB \qquad mC \gtreqless nD$$

deve verificarsi per qualunque valore dei numeri interi m, n, ossia *per infiniti valori*.

Ecco quindi che nella definizione, nonostante le apparenze, entra l'infinito: quell'infinito che è inevitabile nel processo di determinazione del « rapporto » tra due grandezze incommensurabili. Occorre infatti dire che la definizione quinta si riferisce sia al caso di grandezze commensurabili sia a quello di grandezze incommensurabili. La definizione unica porta a qualche complicazione, ma si può ugualmente, nella definizione stessa, ricercare quale sia la parte che si riferisce alle grandezze commensurabili.

Essa è quella relativa al segno di uguaglianza. Che si abbia: $mA = nB$ e insieme $mC = nD$ è possibile soltanto nel caso della commensurabilità tra A, B e tra C, D: infatti sono le grandezze commensurabili quelle che possono avere multipli comuni (mA, nB e mC, nD).

Nel caso delle grandezze incommensurabili, invece, il segno di uguaglianza non potrà mai presentarsi e quindi in tal caso la definizione può considerare soltanto le disuguaglianze. Cioè la definizione si riduce alle concordanze dei segni:

$$mA \gtrless nB \qquad mC \gtrless nD$$

Come s'è detto, i numeri interi m, n devono assumere tutti i possibili (infiniti) valori. Per rendercene conto, vediamo quale sia il significato di

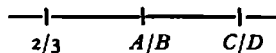
ma il multiplo della terza non è maggiore del multiplo della quarta, si dice allora che la prima gran-

una sola concordanza di segni, per una sola coppia di particolari valori di m, n. Ad esempio per $m = 3$, $n = 2$ vediamo quale è il significato di una concordanza di segni come:

$$3A > 2B \longrightarrow 3C > 2D$$

Ciò vuol dire che A è maggiore di $2/3\,B$ e che al tempo stesso C è maggiore di $2/3\,D$. Oggi diremmo che il rapporto $A : B$ è maggiore di $2/3$ (e scriveremmo $A : B > 2/3$) e che anche il rapporto $C : D$ è maggiore di $2/3$. Ossia il numero razionale $2/3$ ci offre un valore approssimato per difetto tanto dell'un rapporto quanto dell'altro: i due rapporti $A : B$ e $C : D$ hanno un valore razionale approssimato per difetto in comune.

Se consideriamo, come oggi facciamo, i due rapporti $A : B$ e $C : D$ come due numeri reali (irrazionali nel caso della incommensurabilità)

$2/3$ $\quad A/B \quad$ C/D

è evidente che l'essere ambedue i numeri reali maggiori di $2/3$ non porta all'uguaglianza: potrebbe, ad esempio, essere $A : B < C : D$. Perché i due rapporti (numeri reali) $A : B$ e $C : D$ siano uguali, occorre che *la totalità* dei valori approssimati per difetto dell'un rapporto sia costituita da valori approssimati per difetto anche dell'altro rapporto.

Occorre cioè (diciamo oggi) che affinché due numeri reali siano uguali essi determinino la stessa *sezione* nell'insieme dei numeri razionali. Dunque pur non considerando esplicitamente i rapporti come numeri, tuttavia Euclide dà per l'uguaglianza tra rapporti la stessa definizione che in tempi recenti s'è ripresa per l'uguaglianza tra numeri reali.

Quindi occorrono concettualmente *infinite* verifiche delle concordanze di segni: Eudosso non ha potuto *evitare, escludere*, l'infinito nel determinare (o definire) il rapporto tra due grandezze incommensurabili: lo ha però *imbrigliato*, nel senso che ha ideato un procedimento rigoroso, contenuto in uno schema fisso invariabile.

Vedremo che analogo carattere presenta il metodo di esaustione pure attribuito a Eudosso di Cnido (cfr. nota alla XII, 2).

Nel caso commensurabile la definizione appare sovrabbondante: basta trovare una sola coppia di valori di m, n per la quale si verifichi la concordanza per il segno d'uguaglianza, per poter concludere che i due rapporti sono uguali. Così, per esempio, se fosse:

$$3A = 2B : \qquad 3C = 2D$$

si concluderebbe:

$$A : B = C : D = 2/3$$

Per concludere che due rapporti non siano uguali, basta che *non si verifichi una sola concordanza* tra i segni considerati nella def. V: Euclide precisa nella def. VII anche il senso della disuguaglianza (cfr. nota alla suddetta def. VII).

dezza ha, rispetto alla seconda, rapporto maggiore di quello che la terza ha rispetto alla quarta [4].

VIII. Una proporzione che consista di[a] tre termini è la minore possibile (= Una proporzione deve avere almeno tre termini).

IX. Quando tre grandezze sono proporzionali, si dice che la prima ha con la terza rapporto duplicato rispetto a quello che ha con la seconda [5].

a. Seguiamo la lezione adottata da Camerer e da Heiberg, e che è quella del Ms. Peyrard; vi è un'altra lezione, equivalente a « Una proporzione consiste di tre termini *almeno* (o *al minimo*) ». Si è discusso sulla genuinità o meno di questa definizione, anche se in definitiva si tenda, almeno in sostanza, a ritenerla genuina. Letteralmente è poi: « Una proporzione in tre termini ».

[4] Come è stato accennato alla fine della nota definizione V, poiché quest'ultima richiede che la concordanza dei segni tra gli equimultipli abbia luogo per *tutti* i valori possibili di m, n basta *una sola discordanza* perché non si abbia l'uguaglianza dei rapporti. Ma Euclide precisa anche il senso della disuguaglianza nel modo seguente:

si dice che $$A : B > C : D$$

se è possibile trovare due valori (una sola coppia di valori!) m, n tali che si abbia insieme:

$$mA > nB \qquad mC \leqslant nD$$

Nel nostro modo di scrivere abbiamo cioè:

$$A : B > \frac{m}{n} \qquad C : D \leqslant \frac{n}{m}$$

$$\frac{C}{D} \qquad m/n \qquad \frac{A}{B}$$

ossia il numero razionale n/m ci dà un valore approssimato per difetto del rapporto $A : B$ e per eccesso di quello $C : D$, vale a dire il numero razionale n/m *si infiltra* tra i due rapporti (numeri reali) $A : B$ e $C : D$: questi son dunque disuguali, nel senso: $A : B > C : D$.

[5] La proporzione di tre termini (la « minore » possibile) è la proporzione continua, avente i due medi eguali tra loro:

$$A : B = B : C$$

La prima grandezza A ha rispetto alla terza C ragione (= rapporto)

X. Quando quattro grandezze sono proporzionali, si dice che la prima ha con la quarta rapporto triplicato rispetto a quello che ha con la seconda, e si procederà sempre così di séguito, comunque sia la proporzione data in principio [6].

XI. Si dicono grandezze omologhe gli antecedenti rispetto agli antecedenti ed i conseguenti rispetto ai conseguenti.

duplicato di quello che ha rispetto alla seconda B. Indichiamo questo fatto scrivendo:

$$A : C = \text{dupl.}\ (A : B)$$

Va osservato che non è già che il rapporto $A : C$ sia *doppio* di quello $A : B$. Se supponiamo che le grandezze A, B, C siano numeri, si vede sùbito che il rapporto $A : C$ è uguale al quadrato del rapporto $A : B$.

Infatti, essendo:

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C}$$

ed avendosi:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{B}{C} = \frac{A}{C}$$

risulta:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{A}{B} = \frac{A}{C}$$

e infine:

$$\frac{A}{C} = \frac{A^2}{B^2}.$$

Se poi A, B, C sono *rette* (= segmenti di retta) la prima sta alla terza come il quadrato costruito sulla prima sta al quadrato costruito sulla seconda:

$$A : C = q(A) : q(B)$$

La definizione si riferisce però a grandezze qualunque ed ha legami con il concetto di «ragione composta» (cfr. nota alla VI, 23).

[6] Se quattro grandezze A, B, C, D soddisfano alle relazioni:

$$A : B = B : C = C : D$$

(se cioè si sono inserite due medie proporzionali B, C tra le due grandezze A, D) si dice che A ha con D ragione (= rapporto) triplicata di quella che ha con B. Anche qui va osservato che non è già che $A : D$ sia il triplo di $A : B$, bensì (se si tratta di grandezze numeriche) che $A : D$ è il cubo di $A : B$.

Infatti:

$$\frac{A}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{B}{C} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{A}{B} \cdot \frac{A}{B} = \frac{A^3}{B^3} = \left(\frac{A}{B}\right)^3$$

XII. Si ha rapporto permutato[a] quando si prenda in considerazione l'antecedente rispetto all'antecedente ed il conseguente rispetto al conseguente.

XIII. Si ha rapporto inverso[b] quando si prenda in considerazione il conseguente come antecedente rispetto all'antecedente come conseguente.

XIV. Si ha composizione di rapporti[c] quando si consideri la somma dell'antecedente e del conseguente[d] in rapporto al conseguente preso da solo.

XV. Si ha scomposizione di rapporti[e] quando si consideri la differenza tra l'antecedente ed il conseguente[f] in rapporto al conseguente preso da solo.

XVI. Si ha conversione di rapporti quando si consideri il conseguente in rapporto alla differenza tra l'antecedente ed il conseguente.

XVII. Date più grandezze ed altre in ugual numero, [disposte le une e le altre in un determinato ordine], se delle prime grandezze vengono prese a due a due quelle consecutive ed esse sono nello stesso rapporto delle corrispondenti consecutive fra le seconde grandezze[g], si ha rapporto *ex aequo* quando delle prime

a. È il rapporto che si dice aversi *permutando*, cioè permutando i rapporti della proporzione, o *alternando*; letteralmente poi, e vale per tutte le definizioni similari, il greco dice: « Ragione alternata, *o* inversa, *o* composizione di ragione..., e simili, è il prendere (λῆψις), la presa in considerazione di, ecc. ».

b. È quanto, di una proporzione, noi diciamo che si ha *invertendo* i rapporti.

c. È quello che noi diciamo *componendo*; letteralmente è: « Composizione di ragione è ».

d. Letteralmente sarebbe piuttosto: « quando si prenda in considerazione l'antecedente insieme al conseguente, come fossero un solo termine, in rapporto al conseguente preso per sé stesso ».

e. È quello che noi diciamo *scomponendo*. Il termine letterale è *divisione* (διαίρεσις) di *ratio*, di rapporto.

f. Letteralmente: quando si prenda l'eccesso per cui l'antecedente supera il conseguente.

g. Letteralmente: date più grandezze ed altre uguali ad esse per numero, le quali vengano prese a due a due e nella stessa

grandezze la prima stia all'ultima come delle seconde grandezze la prima sta all'ultima; o altrimenti: è il prendere in considerazione gli estremi con omissione dei medi [7].

XVIII. Date tre grandezze ed altre grandezze in ugual numero, si ha una proporzione perturbata quando avviene che, delle prime grandezze, la prima sta alla seconda come delle seconde grandezze la seconda sta alla terza, mentre, delle prime grandezze, la seconda sta alla terza come delle seconde la prima sta alla seconda.

ragione, si ha ragione δι' ἴσου (rapporto *ex aequo*, insomma *ex aequali distantia* – come propone Heath) quando delle prime grandezze...

[7] Date le sei grandezze:

$$\begin{matrix} A & B & C \\ D & E & F \end{matrix}$$

tali che valgano le proporzioni fra termini *vicini*:

$$A : B = D : E$$
$$B : C = E : F$$

si dice che la proporzione fra termini *lontani*:

$$A : C = D : F$$

si ricava *ex aequo* dalle altre due.

Che effettivamente valga l'ultima proporzione scritta, cioè che si possa effettivamente operare la deduzione *ex aequo*, viene dimostrato nella V, 22.

Nella def. XVIII si tratta di una deduzione analoga: soltanto è diverso l'ordine dei termini nelle proporzioni. Dalle proporzioni (valide per ipotesi):

$$A : B = E : F$$
$$B : C = D : E$$

si ricava quella *perturbata*:

$$A : C = D : F$$

Che effettivamente quest'ultima proporzione possa dedursi viene dimostrato nella V, 23.

PROPOSIZIONI

PROPOSIZIONE I.

Se si dànno[a] *quantesivoglia grandezze che siano rispettivamente equimultiple di altrettante grandezze*[b], *una delle prime grandezze è tante volte multipla della corrispondente delle altre grandezze quante volte anche la somma delle prime sarà multipla della somma delle seconde*[c] (= *L'equimultiplo della somma è la somma degli equimultipli*) [1].

Siano quantesivoglia grandezze mA, mB rispettivamente equimultiple di altrettante grandezze A, B; dico che mA è

a. Letteralmente è « Se vi sono ».

b. Letteralmente: quantesivoglia grandezze multiple ugualmente, ciascuna di ciascuna, di quantesivoglia grandezze uguali per numero (il solito πλῆθος, moltitudine, pluralità, e quindi numero complessivo).

c. Letteralmente: di quante volte è multipla una delle grandezze di una [delle altre], di altrettante volte saranno multiple anche tutte [le grandezze] di tutte [le grandezze].

[1] Come s'è detto nella nota introduttiva a questo libro quinto, le prime proposizioni del libro stesso costituiscono quasi una introduzione alle teorie che nel séguito vengono esposte, e si riferiscono al caso più semplice nel quale il rapporto tra due grandezze è un numero razionale, cioè al caso delle grandezze commensurabili.

Anzi nelle prime tre proposizioni si tratta del caso ancor più semplice del rapporto intero.

In questo caso la proporzione si riduce alla equimolteplicità:

$$mA : A = mB : B$$

E la proposizione V, 3 permette di mostrare che questo caso si riconduce alla definizione generale di proporzione V, def. V (cfr. nota alla V, 3).

Questa prima proposizione del libro quinto dimostra una proprietà delle proporzioni nel caso particolare del rapporto intero: che cioè sommando gli equimultipli mA, mB di due grandezze A, B, cioè formando la grandezza $mA + mB$, questa è una equimultipla della somma $(A + B)$. Cioè la V, 1 ci dice che:

$$mA + mB = m(A + B)$$

tante volte multipla di A quante volte anche la somma $mA + mB$ sarà multipla della somma $A + B$.

Infatti, poiché $mA = HK$ è multipla di A lo stesso numero m di volte che $mB = PQ$ è multipla di B, vi sono in mA tante grandezze uguali ad A quante ne sono anche in mB uguali a B. Risulti divisa mA nelle m grandezze HL, LK uguali ad A, e mB nelle m grandezze PR, RQ uguali a B; il numero m delle grandezze HL, LK sarà così uguale al numero m delle grandezze PR, RQ[, ossia HK, PQ risultano divise nello stesso numero m di parti]. E poiché HL è uguale ad A, e PR è uguale a B, si ha che, come HL è uguale ad A, così la somma $HL + PR$ è uguale alla somma $A + B$. Per la stessa ragione, così come LK è uguale ad A, la somma $LK + RQ$ è uguale alla somma $A + B$; vi sono quindi in HK tante grandezze uguali ad A quante ne sono anche nella somma $HK + PQ$ uguali alla somma $A + B$; perciò $HK = mA$ è tante volte multipla di A quante volte anche la somma $HK + PQ = mA + mB$ sarà multipla della somma $A + B$[, cioè: $mA + mB = m(A + B)$].

(la somma degli equimultipli è l'equimultiplo della somma). Riportiamoci alla proporzione:

$$mA : A = mB : B$$

La proprietà espressa dalla V, I viene in sostanza ad equivalere alla derivazione di quest'altra proporzione:

$$(mA + mB) : (A + B) = mA : A$$

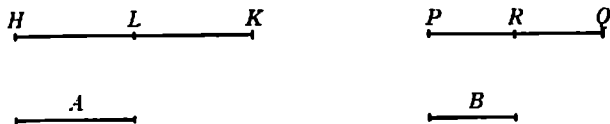
ossia può enunciarsi sotto la forma seguente: « In una proporzione la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti come un qualunque antecedente sta al suo conseguente ». Naturalmente la V, I ci dà questa proprietà con riferimento al caso particolare del rapporto intero, ma essa viene applicata proprio per dimostrare la V, 12 nella quale la proprietà viene estesa al caso più generale (di grandezze commensurabili o incommensurabili).

Se vogliamo schematizzare coi nostri simboli la dimostrazione della V, I, possiamo presentare nel modo seguente il procedimento:

$$\begin{aligned} mA + mB &= (A + A + \ldots + A) + (B + B + \ldots + B) \\ &= (A + B) + (A + B) + \ldots (A + B) \\ &= m(A + B) \end{aligned}$$

Dunque, se si dànno quantesivoglia grandezze... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

H L K P R Q

A B

È APPLICATA IN: V, 5, 8, 12, 17.

PROPOSIZIONE 2.

Se una prima grandezza è multipla di una seconda grandezza lo stesso numero di volte che una terza è multipla di una quarta, ed anche una quinta grandezza è multipla della seconda lo stesso numero di volte che una sesta è multipla della quarta, anche la somma della prima e della quinta sarà multipla della seconda grandezza lo stesso numero di volte che la somma della terza e della sesta è multipla della quarta [2].

Infatti, una prima grandezza $mA = HK$ sia multipla di una seconda grandezza A lo stesso numero m di volte che una terza grandezza $mB = LM$ è multipla di una quarta

[2] Questa proposizione ci presenta sei grandezze:

mA	mB
A	B
nA	nB

Partendo da A, B abbiamo cioè due coppie di loro equimultipli: mA e mB, nA e nB. Abbiamo cioè, nell'ordine di idee esposto nella nota alla proposizione precedente, le due proporzioni:

$$mA : A = mB : B$$
$$nA : A = nB : B$$

La prop. V, 2 ci dice che le due somme $(mA + nA)$ e $(mB + nB)$ sono equimultiple rispettivamente di A, B; ossia ci dice che è:

$$mA + nA = (m + n) A$$
$$mB + nB = (m + n) B$$

Per distinguere la V, 2 dalla V, 1 da un punto di vista semplicemente formale e mnemonico, diremo che mentre in ambedue le proposizioni si tratta di addizionare prodotti misti di numeri e grandezze, nella V, 1 si raccoglie (per dir così) a fattor comune il numero, mentre in questa V, 2

grandezza B, ed anche una quinta grandezza $nA = KN$ sia multipla della seconda A lo stesso numero di volte che una sesta $nB = MP$ lo è della quarta B; dico che anche la somma della prima e della quinta grandezza, cioè $mA + nA = = HK + KN = HN$, sarà multipla della seconda A lo stesso numero $m + n$ di volte che la somma della terza e della sesta, cioè $mB + nB = LM + MP = LP$, è multipla della quarta[a] B[, cioè: $mA + nA = (m + n)A$; $mB + nB = (m + n)B$].

Poiché difatti HK è multipla di A lo stesso numero m di volte che LM è multipla di B, vi sono in HK tante grandezze uguali ad A quante ne sono anche in LM uguali a B. Per la stessa ragione, vi sono pure in KN tante grandezze uguali ad A quante ne sono pure in MP uguali a B; in tutta quanta HN vi sono quindi tante grandezze uguali ad A quante ne sono anche, uguali a B, in tutta quanta LP; perciò HN è tante volte multipla di A quante volte anche LP sarà multipla di B. Si ha quindi che la somma HN della prima e della quinta grandezza sarà multipla della seconda A lo stesso numero di volte che la somma LP della terza e della sesta è multipla della quarta B[, cioè HN contiene $m + n$ volte A, e LP contiene altrettante volte B].

a. Va avvisato che in Euclide non vi sono altre indicazioni che quelle delle grandezze, secondo il suo costume. Di conseguenza, tutte le indicazioni di sottomultipli, o di numeri, in minuscole, sono nostro intervento a facilitare l'intelligenza del lettore.

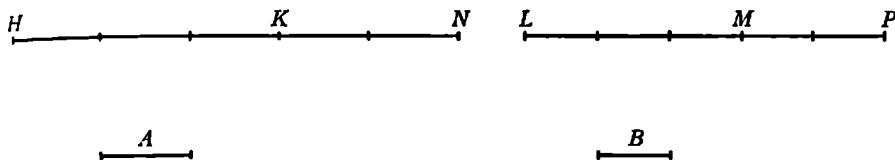
si raccoglie a fattor comune la grandezza. Si tratta cioè di due proprietà distributive riguardanti quei *prodotti* misti di numeri e grandezze.

Ma da un punto di vista più sostanziale, diremo che dalle due proporzioni dell'ipotesi, si ricava la proporzione:

$$(mA + nA) : A = (mB + nB) : B$$

Infatti gli antecedenti risultano equimultipli dei conseguenti A, B secondo l'ordine di molteplicità $(m + n)$.

La V, 2 si presenta allora come un caso particolare (per il rapporto intero) della V, 24 nella quale la stessa proprietà si riferisce al caso della proporzione più generale.

Dunque, se una prima grandezza mA è multipla di una seconda... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

È APPLICATA IN: V, 3, 6, 17.

PROPOSIZIONE 3.

Se una prima grandezza è multipla di una seconda grandezza lo stesso numero di volte che una terza è multipla di una quarta, e se si prendono delle grandezze equimultiple della prima e della terza, anche ex aequo *ciascuna delle due grandezze così prese sarà multipla lo stesso numero di volte di ciascuna delle altre due, ossia l'una della seconda grandezza, e l'altra della quarta [– vale a dire: equimultipli di equimultipli sono equimultipli]* [3].

Infatti, una prima grandezza mA sia multipla di una seconda grandezza A lo stesso numero di volte che una

[3] Qui il linguaggio delle proporzioni viene evidentemente applicato al caso dell'equimolteplicità, ossia del rapporto intero: si parla, infatti, di una deduzione *ex aequo* (cfr. def. XVII di questo libro quinto). Si tratta di due grandezze A, B, della quale si considerano due equimultipli mA, mB. Poi, di detti equimultipli mA, mB si considerano ancora due equimultipli $n(mA)$, $n(mB)$.

La V, 3 afferma che questi « equimultipli di equimultipli » $n(mA)$, $n(mB)$ sono pure equimultipli delle grandezze A, B date in principio. Ossia:

$$n(mA) = (nm)\,A$$
$$n(mB) = (nm)\,B$$

cioè: « equimultipli di equimultipli sono equimultipli » (secondo un ordine di molteplicità mn che è il prodotto dei due ordini di molteplicità, m, n considerati).

$$\begin{matrix} A & mA & n(mA) \\ B & mB & n(mB) \end{matrix}$$

In sostanza, valgono per ipotesi le due proporzioni:

$$mA : A = mB : B$$
$$n(mA) : mA = n(mB) : mB$$

terza mB è multipla di una quarta B, e risultino prese $HK = n(mA)$, $LM = n(mB)$, equimultiple di mA, mB; dico che HK è multipla di A lo stesso numero di volte che LM è multipla di B.

Poiché difatti HK è multipla di mA lo stesso numero di volte che LM lo è di mB, vi sono in HK tante grandezze uguali a mA quante ne sono anche in LM uguali a mB. Si divida [allora] HK nelle grandezze HN, NK uguali a mA,

e si ricava la proporzione:

$$n(mA) : A = n(mB) : B$$

ossia dalle proporzioni fra termini (per dir così) vicini si ricava la proporzione fra termini lontani, proprio come la def. XVII indica per la deduzione della proporzione *ex aequo*.

Possiamo allora dire che la V, 3 dimostra la validità della deduzione *ex aequo* per il caso particolare del rapporto intero, mentre la validità nel caso generale viene dimostrata nella V, 22.

Per quanto riguarda la dimostrazione di questa V, 3 si applica lo schema della precedente V, 2, ma considerando due volte gli stessi equimultipli mA, mB di A, B:

$$\begin{array}{cc} mA & mB \\ A & B \\ mA & mB \end{array}$$

La V, 2 ci dice allora che le due somme $(mA + mA)$ e $(mB + mB)$ sono equimultipli di A, B, ossia che

$$2(mA) \quad \text{e} \quad 2(mB)$$

sono equimultipli di A, B. Il teorema risulta così dimostrato per il caso particolare $n = 2$.

Va infine osservato che è proprio la V, 3 che ci permette di scrivere la proporzione:

$$mA : A = mB : B$$

in quanto essa soddisfa alla def. V. Infatti, in qualunque modo si scelgano i numeri interi p, q, secondo che sia:

$$p(mA) \gtreqless qA$$

deve aversi corrispondentemente:

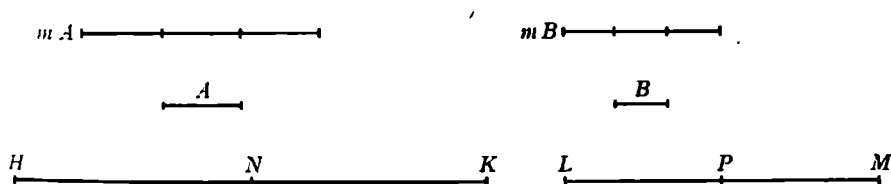
$$p(mB) \gtreqless qB$$

ossia, in base alla V, 3, secondo si abbia:

$$(pm)A \gtreqless qA \quad \text{deve aversi} \quad (pm)B \gtreqless qB$$

Ma la concordanza si verifica senz'altro, e si avrà per ciascuno dei tre segni a seconda che sia: $pm \gtreqless q$.

e si divida *LM* nelle grandezze *LP*, *PM* uguali a *mB*; il numero delle grandezze [uguali] *HN*, *NK* sarà perciò uguale al numero delle grandezze [uguali] *LP*, *PM*. E poiché *mA* è multipla di *A* lo stesso numero di volte che *mB* lo è di *B*, mentre *HN* è uguale a *mA* e *LP* è uguale a *mB*, si ha che *HN* è multipla di *A* lo stesso numero di volte che *LP* è multipla di *B*. Per la stessa ragione, *NK* è multipla di *A* lo stesso numero di volte che *PM* è multipla di *B*. Poiché dunque una prima grandezza *HN* è multipla della seconda grandezza *A* lo stesso numero di volte che una terza *LP* è multipla di una quarta *B*, mentre anche una quinta grandezza *NK* è multipla della seconda *A* lo stesso numero di volte che una sesta *PM* lo è della quarta *B*, anche la somma della prima *HN* e della quinta *NK*, cioè *HK*, è multipla della seconda *A* lo stesso numero di volte che la somma della terza *LP* e della sesta *PM*, cioè *LM*, è multipla della quarta *B* (V, 2).

Dunque, se una prima grandezza è multipla di una seconda... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: V, 2.

È APPLICATA IN: V, 4.

PROPOSIZIONE 4.

Se una prima grandezza ha rispetto ad una seconda grandezza lo stesso rapporto che una terza ha rispetto ad una quarta, anche grandezze equimultiple della prima e della terza avranno lo stesso rapporto, se prese nell'ordine corrispondente, rispetto

a grandezze equimultiple della seconda e della quarta, secondo qualsiasi molteplicità [vengano prese] [4].

Infatti, una prima grandezza A abbia rispetto ad una seconda grandezza B lo stesso rapporto che una terza C ha rispetto ad una quarta D, e risultino prese le grandezze mA, mC equimultiple di A, C, e delle altre grandezze nB, nD equimultiple di B, D, le une e le altre secondo una qualunque molteplicità [a]; dico che mA sta a nB come mC sta a nD [b][, cioè: da $A : B = C : D$ si ricava $mA : nB = mC : nD$].

a. Letteralmente: delle altre grandezze, quelle che capitano, *ossia* come capitano, equimultiple delle B, D, cioè le... ecc.

b. La formula euclidea è sempre: come... sta a..., così... sta a...; noi tradurremo regolarmente come sopra.

[4] Questa proposizione dice che se vale la proporzione:

$$A : B = C : D$$

vale anche l'altra:

$$mA : nB = mC : nD$$

qualunque siano i numeri interi m, n. La dimostrazione applica la prop. precedente V, 3 poiché dovendosi mostrare che per p, q, interi qualunque, a seconda che si abbia:

$$p(mA) \gtreqless q(nB)$$

si ha corrispondentemente:

$$p(mC) \gtreqless q(nD)$$

se si applica la V, 3 ciò equivale a dire che secondo si abbia:

$$(pm)A \gtreqless (qn)\ B$$

si ha:

$$(pm)C \gtreqless (qn)\ D$$

Ma ciò si verifica senz'altro perché vale per ipotesi la proporzione

$$A : B = C : D$$

e quindi deve verificarsi quella concordanza di segni anche per i valori pm, qn dei moltiplicatori.

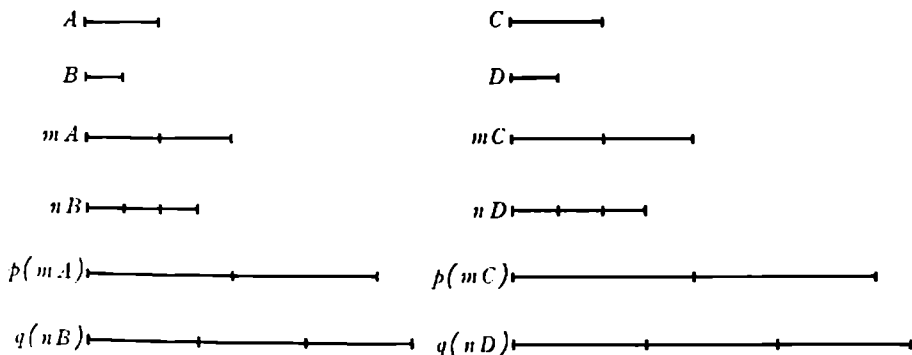
Questa proposizione introduce il caso del rapporto razionale non intero. Infatti dalla proporzione:

$$mA : A = mB : B$$

permette di passare, usando i moltiplicatori 1, n, alla proporzione: $mA : nA = mB : nB$ nella quale le grandezze hanno a due a due tra loro il rapporto razionale non intero m/n.

Si prendano difatti le grandezze $p(mA)$, $p(mC)$ equimultiple di mA, mC, e altre grandezze $q(nB)$, $q(nD)$ equimultiple a piacere[, cioè per q qualunque], di nB, nD.

Ora, poiché mA, mC sono equimultiple di A e di C, e sono state prese le grandezze $p(mA)$, $p(mC)$ equimultiple di mA, mC, si ha che $p(mA)$, $p(mC)$ sono equimultiple rispettivamente anche di A, C (V, 3)[a]. Per la stessa ragione, $q(nB)$, $q(nD)$ sono equimultiple rispettivamente anche di B, D. E poiché A sta a B come C sta a D [$A : B = C : D$], e sono state prese le grandezze $p(mA)$, $p(mC)$ equimultiple di A, C, ed altre grandezze $q(nB)$, $q(nD)$ equimultiple a piacere[, cioè per n qualunque], di B, D, si ha che, se $p(mA)$ supera $q(nB)$, pure $p(mC)$ supera $q(nD)$, se $p(mA)$ è uguale a $q(nB)$, è uguale $p(mC)$ a $q(nD)$, e se $p(mA)$ è minore di $q(nB)$, è minore $p(mC)$ di $q(nD)$ (V, def. V). Ma $p(mA)$, $p(mC)$ sono grandezze equimultiple [anche] di mA, mC, mentre $q(nB)$, $q(nD)$ sono altre grandezze equimultiple a piacere [anche] di nB, nD; perciò mA sta a nB come mC sta a nD [$mA : nB = mC : nD$] (V, def. V).

Dunque, se una prima grandezza ha rispetto ad una seconda grandezza... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: V, 3.

È APPLICATA IN: V, 22.

a. Sarebbe piuttosto: « $p(mA)$ è multipla di A lo stesso numero di volte che $p(mC)$ è multipla di C »; l'avvertenza vale anche per dopo.

PROPOSIZIONE 5.

Se una prima grandezza è multipla di una seconda grandezza lo stesso numero di volte che una parte della prima è multipla di una parte della seconda, anche la parte restante della prima è multipla della parte restante della seconda lo stesso numero di volte che tutta quanta la prima è multipla di tutta quanta la seconda [a] [5].

Infatti, la grandezza $A = mB$ sia multipla della grandezza B lo stesso numero m di volte che la parte C [di A] è multipla della parte D [di B (ossia: $C = mD$)]; dico che anche la differenza $A — C$ sarà multipla della differenza $B — D$ lo stesso numero m di volte.

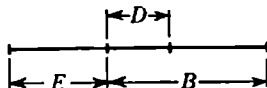
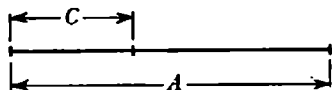
Sia difatti C multipla tante volte di D quante volte anche $A — C$ risulta esser multipla di una grandezza E[, ossia si ponga E tale che $A — C$ sia di essa multipla sempre secondo m, cioè sia: $A — C = mE$].

Ora, poiché C è multipla di D lo stesso numero di volte che $A — C$ è multipla di E, si ha che C è multipla di D lo stesso numero di volte che A lo è di $D + E$[: difatti $C = mD$, e si è posto $A — C = mE$, per cui $C + (A — C) = m(D + E)$ (V, 1), ossia $A = m(D + E)$]. Ma per ipotesi C è multipla di D lo stesso numero di volte che A è multipla di B [$A = mB$]. Quindi A è multipla secondo lo stesso numero m di ciascuna delle due grandezze B, $D + E$, per cui $D + E$ è uguale a B. Si sottragga in comune [dalle due grandezze] la [parte] D; quindi E, che rimane [dell'una], è uguale alla rimanente $B — D$ [dell'altra]. E poiché C è multipla di D

a. Letteralmente è piuttosto: « Se una grandezza è multipla di una grandezza lo stesso numero di volte che grandezza sottratta [dalla prima] lo è di grandezza sottratta [dalla seconda], anche quella che resta (il resto, insomma) [della prima] sarà tante volte multipla di quella che resta [della seconda] quante volte lo è la grandezza tutta quanta della grandezza tutta quanta ».

[5] Questa proposizione corrisponde alla V, 1 ma per la differenza anziché per la somma: così la seguente V, 6 corrisponde nello stesso modo alla V, 2.

lo stesso numero di volte che $A - C$ è multipla di E, [ossia: $A - C = mE$,] ma [si è visto che] E è uguale a $B - D$, si ha che C è multipla di D lo stesso numero di volte che B lo è di $B - D$[, ossia che $A - C = m(B - D)$]. Ma per ipotesi C è multipla di D lo stesso numero di volte che A lo è di B, per cui $A - C$ è multipla di $B - D$ lo stesso numero di volte che A è multipla di B. Anche la differenza $A - C$ sarà quindi multipla della differenza $B - D$ lo stesso numero m di volte che tutta quanta A è multipla di tutta quanta B.

Dunque, se una prima grandezza è multipla di una seconda grandezza... (secondo l'enunciato). - C.D.D.

APPLICA: V, I.

PROPOSIZIONE 6.

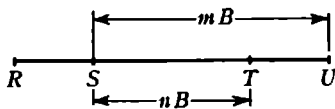
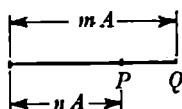
Se due grandezze sono equimultiple di due altre, e [dalle prime] si sottraggono [due] altre grandezze [rispettivamente minori delle prime e] che siano equimultiple delle stesse [due seconde], anche le differenze o sono uguali [rispettivamente] alle stesse [seconde grandezze], o sono loro equimultipli.

Infatti, due grandezze mA, mB siano equimultiple di due grandezze A, B, e le parti nA, nB siano equimultiple delle stesse grandezze A, B; dico che anche le differenze $mA - nA$, $mB - nB$ o sono uguali [rispettivamente] ad A, B, o sono loro equimultipli.

Sia difatti, dapprima, $mA - nA = PQ = A$; dico che anche $mB - nB = TU$ è uguale a B.

Si ponga difatti RS uguale a B. Poiché nA, nB sono equimultiple di A, B, ma PQ è uguale ad A e RS è uguale a B, si ha che [la somma $nA + A$ e la somma $nB + B$ sono equimultiple di A, B (V, 2), ossia $nA + PQ$ e $nB + RS$ sono equimultiple di A, B, cioè ancora] mA, RT sono equi-

multiple di A, B. Ma per ipotesi mA e $mB = SU$ sono equimultiple di A, B; perciò RT è multipla di B lo stesso numero di volte che SU è multipla di B [stessa]. Poiché dunque ciascuna delle due grandezze RT, SU è equimultipla di B, si ha che RT è uguale a SU. Si sottragga da ambedue la parte ST; quindi RS, che rimane dell'una, è uguale a TU che rimane dell'altra. Ma RS è uguale a B, per cui anche TU è uguale a B. Cosicché, se PQ è uguale ad A, pure TU è uguale a B. Similmente potremo dimostrare che, se pure $PQ = mA - nA$ è multipla di A, anche la grandezza $TU = mB - nB$ sarà equimultipla di B.

Dunque, se due grandezze sono equimultiple di due altre... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: V, 2.

PROPOSIZIONE 7.

Grandezze uguali hanno il medesimo rapporto rispetto ad una stessa grandezza, ed una stessa grandezza ha il medesimo rapporto rispetto a grandezze uguali [6].

Siano A, B delle grandezze uguali e C sia un'altra grandezza a caso; dico che ciascuna delle due grandezze A, B ha lo stesso rapporto rispetto a C, e che C ha lo stesso rapporto rispetto a ciascuna delle due grandezze A, B.

[6] Abbiamo qui un quadrilatero di proposizioni: proposizione diretta (V, 7), contraria (V, 8), inversa (V, 9), contronominale (V, 10) (cfr. nota alla prop. I, 17). C'è invero qualche differenza rispetto allo schema consueto: la V, 8 non è esattamente *contraria* della V, 7. L'ipotesi di quest'ultima è infatti l'uguaglianza di due grandezze, la tesi è l'uguaglianza di due rapporti. Nella V, 8 non si introduce semplicemente la disugua-

Infatti, si prendano le grandezze mA, mB equimultiple di A, B, ed un'altra grandezza nC, che sia una multipla qualsiasi di C.

glianza al posto dell'uguaglianza, ma si precisa anche il senso delle due disuguaglianze (tra le grandezze e i rapporti).

Ecco lo schema del quadrilatero:

	Ipotesi	tesi
diretta (V, 7)	$A = B$	$A : C = B : C$
contraria (V, 8)	$A > B$	$A : C > B : C$
inversa (V, 9)	$A : C = B : C$	$A = B$
contronominale (V, 10)	$A : C > B : C$	$A > B$

La prima delle quattro proposizioni, cioè la V, 7, può sembrare superflua, talmente è ovvia. Ma si può osservare che essa è di particolare importanza, poiché mostra che la definizione quinta (di uguaglianza di rapporti) soddisfa a quella condizione che, accanto all'omogeneità, era stata posta nella definizione terza: essere il rapporto legato alle *quantità*, cioè (per esempio) essere il rapporto tra due figure piane (o solide) non legato alla forma, ma soltanto all'area (o al volume).

Quindi se due grandezze A, B sono uguali, l'una vale quanto l'altra, ossia è sostituibile con l'altra, nella formazione del rapporto con una stessa grandezza C.

Particolarmente complessa è la dimostrazione della proposizione contraria, cioè della V, 8 che dall'ipotesi $A > B$ deduce la tesi:

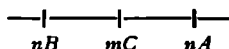
$$A : C > B : C$$

ossia (ciò che fa lo stesso):

$$C : B > C : A$$

Per dimostrare quest'ultima relazione, Euclide, seguendo la definizione VII, va alla ricerca di due numeri interi m, n tali che si abbia insieme:

$$mC > nB \qquad mC \leqslant nA$$

—|———|———|—
nB mC nA

Dunque mC deve essere compresa tra nB e nA. Supponiamo per un momento che si sia fissato il valore di n e vediamo di determinare m in modo che coesistano le due disuguaglianze sopra scritte.

Occorre anzitutto che C stia (per dir così) alla sinistra di nA, perché se fosse $C > nA$ non si potrebbe per nessun valore di m, avere $mC \leqslant nA$. Euclide se ne assicura ponendo la condizione:

$$nB > C$$

ossia ponendo C non soltanto alla sinistra di nA, ma anche alla sinistra di nB. Potremo ora trovare un numero m tale che sia:

$$mC > nB$$

(def. V, 4 ossia postulato di Archimede).

Ma affinché sia pure $mC \leqslant nA$, ossia, prescindendo dal segno di uguaglianza, affinché mC si trovi anche alla sinistra di nA, cioè sia compreso

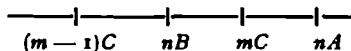
Poiché dunque mA è multipla di A lo stesso numero di volte che mB lo è di B, ed A è uguale a B, si ha che mA è uguale a mB. Ma nC è un'altra grandezza [che è una multipla di C] presa a caso. Se quindi mA supera nC, anche mB supera nC, se mA è uguale a nC, è [pure] uguale mB, e se mA è minore di nC, pure mB è minore. Ma mA, mB sono equimultiple di A, B, mentre nC è una grandezza multipla di C presa a caso; perciò $A : C = B : C$ (V, def. V) [a].

Dico adesso che anche C ha lo stesso rapporto rispetto a ciascuna delle due grandezze uguali A, B.

Infatti, eseguita la medesima costruzione, potremo dimostrare similmente che mA è uguale a mB; e nC è un'altra grandezza[, e multipla di C]; se quindi nC supera mA, essa supera anche mB, se nC è uguale a mA, nC è [anche] uguale a mB, e se è minore di mA, nC è minore di mB. Ora, nC è una grandezza multipla di C, mentre mA, mB sono equimultipli qualunque di A, B; perciò $C : A = C : B$ (V, def. V).

a. Adottiamo i simboli moderni per brevità od opportunità.

(come appunto occorre) tra nB e nA, basta che il multiplo precedente $(m - 1)C$ cada alla sinistra di nB e che C, ossia la differenza tra i due multipli di C, sia minore della distanza tra nA e nB. In questo modo, il multiplo mC cadrà sicuramente dentro la *trappola* delimitata da nB e nA.

$(m - 1)C$ nB mC nA

Basta dunque che si verifichino le due seguenti relazioni:

$$(m - 1)C < nB$$
$$nA - nB > C$$

Quest'ultima equivale (V, 5) a: $n(A - B) > C$.
Riassumendo, devono coesistere le quattro seguenti relazioni:

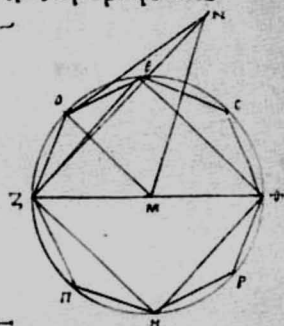
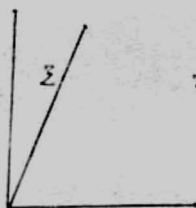
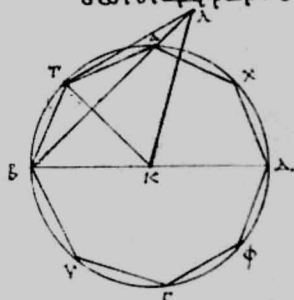
$$nB > C \qquad n(A - B) > C$$
$$mC > nB \qquad (m - 1)C < nB$$

Si può dunque cominciare col determinare n, in base alla definizione V, 4 (postulato di Archimede), in modo che siano verificate ambedue le relazioni della prima riga.

Per m basta poi scegliere il primo valore intero per il quale si abbia $mC > nB$ (sempre in base alla def. V, 4): il multiplo mC così scelto non potrà allora superare nA.

Si tratta di una dimostrazione complessa, resa ancora più lunga a causa di una distinzione particolare in due casi diversi, operata da Euclide.

Una pagina degli *Elementi* di Euclide nel codice più famoso

(Oxford, Bodleian Library, Ms. d'Orville 301, f. 325 v., 888 d. C.).

Dunque, grandezze uguali hanno il medesimo rapporto rispetto ad una stessa grandezza... (secondo l'enunciato).

È APPLICATA IN: V, 10, 15; VI, 2, 14, 15, 17, 19, 30; XI, 31, 34; XII, 15.

COROLLARIO[a].

È da ciò evidente che, se delle grandezze sono proporzionali, esse saranno proporzionali anche *invertendo*[, vale a dire che se è: $A : B = C : D$, è anche $B : A = D : C$]. – C.D.D.

È APPLICATO IN: V, 20, 21, 24; VI, 31; X, 5, 6, 14, 49, 52, 68; XI, 32; XII, 2, 5, 12, 18.

PROPOSIZIONE 8.

Di [*due*] *grandezze disuguali, la maggiore ha rispetto ad una stessa grandezza rapporto maggiore che quella minore; ed una stessa grandezza ha rispetto alla minore rapporto maggiore che rispetto a quella maggiore*[7].

Siano $A = PQ$ e B [due] grandezze disuguali, [delle quali] A sia la maggiore, e sia C un'altra grandezza [presa]

a. Heiberg dice del corollario che è qui collocato giustamente in *P*, mentre, posto dove lo aveva posto Teone, cioè alla fine di V, 4, rendeva del tutto inutile la seconda parte di questa proposizione V, 7, come già aveva osservato August nella sua edizione di Euclide, II, p. 331. Tuttavia (cfr. per questo HEATH, *op. cit.*, vol. II, p. 149), anche a questo luogo la giustezza di collocamento del corollario è discutibile. Campano lo omette (*op. cit.*, 402).

[7] Nella nota alla prop. 7 abbiamo riassunto e spiegato questa complicata dimostrazione.

a caso; dico che $A = PQ$ ha rispetto a C rapporto maggiore che B rispetto a C, e che C ha rispetto a B rapporto maggiore che rispetto ad A[, cioè: se $A > B$, è anche $A : C > B : C$, ed è inoltre: $C : B > C : A$].

Infatti, poiché A è maggiore di B, si ponga RQ uguale a B; di conseguenza, (V, def. IV), la minore delle grandezze PR, RQ, se moltiplicata, finirà ad un certo punto con l'essere [un multiplo] maggiore di C. Sia dapprima PR minore di RQ, si moltiplichi PR [un numero m di volte], e sia $SU = m \cdot PR = m\,(A - B)$ una grandezza multipla di PR che risulti maggiore di C. Di quante volte allora SU è multipla di PR, siano [prese] anche UZ multipla di RQ e D multipla di B, sia cioè $UZ = mRQ$, $D = mB$; si prenda inoltre il doppio $2C$ di C, il triplo $3C$ di essa, e si prendano così di séguito successive grandezze multiple di C, fino a che la grandezza presa sia multipla di C, ma essendo insieme il primo multiplo di C ad essere maggiore di $D = mB$ (V, def. V). Risulti presa, e sia essa[, ad esempio,] $4C$, che è il quadruplo di C ed è insieme il suo primo multiplo che è maggiore di $D = mB$.

Poiché dunque $D = mB$ è grandezza che è la prima ad essere minore di $4C$, si ha che $D = mB$ non è minore di $3C$. E poiché SU, UZ sono equimultiple [rispettivamente] di PR, RQ, si ha che SU è multipla di PR lo stesso numero di volte che [la somma] SZ lo è della [somma] PQ (V, 1). Ma SU è multipla di PR lo stesso numero di volte che $D = mB$ lo è di B; perciò [la somma] SZ è multipla di PQ lo stesso numero di volte che $D = mB$ lo è di B. Si ha quindi che SZ, D sono equimultipli di PQ, B[: e difatti SZ, cioè $SU + UZ$, equimultipli rispettivamente di PR, RQ, è equimultipla della somma PQ, cioè $SZ = mPQ$. Ma anche D è multiplo di B lo stesso numero m di volte che SU lo è di PR, per cui SZ, D sono equimultipli rispettivamente di $PQ = A$ e di B, ossia $SZ = mA$, $D = mB$]. Di nuovo, poiché UZ è multipla di B lo stesso numero di volte che D è multipla di B, e RQ è uguale a B, si ha che UZ è uguale a D. Ma D non è minore di $3C$, per cui neppure UZ è minore di $3C$. Ma SU è maggiore di C; quindi tutta quanta $SU + UZ$

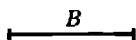
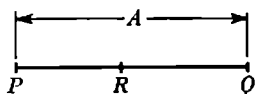
è maggiore della somma $3C + C$. Ma la somma $3C + C$ è uguale a $4C$, e così la somma $SU + UZ$, ossia tutta la SZ, è maggiore di $4C$, mentre D non è maggiore di $4C$ [a]. Ora, SZ, D sono equimultiple di A, B, mentre $4C$ è una grandezza multiplo qualunque della grandezza C[, ossia si è trovato che è $mA > 4C$, mentre è $mB \leqslant 4C$]; quindi A ha rispetto a C rapporto maggiore che B rispetto a C (V, def. VII).

Dico adesso che anche C ha rispetto a B rapporto maggiore che C rispetto ad A.

Infatti, eseguita la medesima costruzione, potremo similmente dimostrare che $4C$ supera D, mentre non supera SZ. Ora, $4C$ è grandezza multipla di C, mentre SZ, D sono delle altre grandezze, equimultiple a piacere di A, B; perciò C ha rispetto a B rapporto maggiore che rispetto ad A (V, def. VII).

Ma sia adesso il caso in cui PR sia maggiore di RQ. La grandezza minore RQ, se moltiplicata, sarà così ad un certo punto maggiore di C (V, def. IV). Risulti essa moltiplicata, sia UZ multipla di RQ e maggiore di C, e di quante volte UZ è multipla di RQ, altrettante volte siano multiple anche SU di PR, e D di B. Similmente allora potremo dimostrare che SZ, D sono equimultiple di A, B; si prenda inoltre similmente la grandezza $4C$ multipla di C, ma che sia la prima ad essere maggiore di SU; cosicché, di nuovo, SU non è minore di $3C$. Ma UZ è maggiore di C, per cui tutta quanta SZ supera la somma $C + 3C$, cioè $4C$. Ma D non supera $4C$, dal momento che pure SU, maggiore di UZ, cioè di D, non supera $4C$. Nella stessa maniera poi, proseguendo gli argomenti di cui sopra, completiamo la dimostrazione.

a. Poiché Euclide adopera sempre lettere maiuscole, cioè i simboli da noi adoperati piuttosto per le grandezze, e quindi lettere, o gruppi di lettere, sempre diversi fra loro cambiando l'ente indicato, né usa combinazioni come un $3C$, $4C$, ecc., il testo qui sarebbe: « Ma la somma di D $(= C)$, M $(= 3C)$ è uguale a N $(= 4C)$, dato che M è il triplo di C e la somma di M, C è il quadruplo di C, mentre anche N è il quadruplo di C; quindi la somma di M, C è uguale a N. Ma SZ è maggiore della somma di M, C, per cui SZ supera N, mentre D non supera N ».

Dunque, di due grandezze disuguali... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: V, 1.

È APPLICATA IN: V, 9, 10, 14, 20, 21.

PROPOSIZIONE 9.

Grandezze che abbiano lo stesso rapporto rispetto ad una medesima grandezza sono uguali fra loro; e grandezze rispetto alle quali una medesima grandezza abbia lo stesso rapporto, sono uguali.

Infatti, ciascuna delle due grandezze A, B abbia rispetto a C lo stesso rapporto; dico che A è uguale a B.

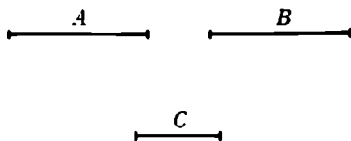
Se difatti non lo fosse, non potrebbero le due grandezze A, B avere ciascuna lo stesso rapporto rispetto a C (V, 8); ma lo hanno; quindi A è uguale a B.

Di nuovo, sia adesso il caso in cui C ha lo stesso rapporto rispetto a ciascuna delle due grandezze A, B; dico che A è uguale a B.

Infatti, se non lo fosse, C non potrebbe avere lo stesso rapporto rispetto a ciascuna delle due grandezze A, B (V, 8); ma lo ha; quindi A è uguale a B.

Dunque, grandezze che abbiano lo stesso rapporto... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: V, 8.

È APPLICATA IN: VI, 2, 3, 5, 6, 7, 14, 15, 22, 26; X, 6, 31, 34; XII, 15.

PROPOSIZIONE 10.

Delle grandezze che abbiano rapporto rispetto ad una stessa grandezza, quella che ha rapporto maggiore è maggiore; ed è minore la grandezza rispetto a cui una stessa grandezza abbia rapporto maggiore.

Infatti, abbia A rispetto a C rapporto maggiore che B rispetto a C; dico che A è maggiore di B.

Se difatti non lo fosse, A sarebbe o uguale a B, o minore. Ora, A non è uguale a B; in tal caso, infatti, ciascuna delle due grandezze A, B avrebbe rispetto a C lo stesso rapporto. Ma non lo ha[: ossia, si avrebbe in tal caso $A : C = B : C$ (V, 7), ciò che non è]; perciò A non è uguale a B. Non è neppure, tuttavia, A minore di B, poiché in tal caso A avrebbe rispetto a C rapporto minore che B rispetto a C (V, 8); ma non lo ha; quindi A non è minore di B. E fu dimostrato che non è neppure uguale [ad essa]; quindi A è maggiore di B.

Di nuovo, sia adesso il caso in cui C ha rispetto a B rapporto maggiore che C rispetto ad A; dico che B è minore di A.

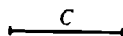
Infatti, se non lo fosse, essa sarebbe o uguale, o maggiore. Ora, B non è uguale ad A; in tal caso difatti C avrebbe lo stesso rapporto rispetto a ciascuna delle due grandezze A, B (V, 7); ma non lo ha; quindi A non è uguale a B. Né tuttavia B è maggiore di A; difatti in tal caso C avrebbe rispetto a B rapporto minore che rispetto ad A (V, 8). Ma non lo ha; quindi B non è maggiore di A. E fu dimostrato che non è neppure uguale [ad essa]; perciò B è minore di A.

Dunque, delle grandezze che abbiano rapporto... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

A B

C

APPLICA: V, 7, 8.

È APPLICATA IN: V, 14, 20, 21.

PROPOSIZIONE II.

Rapporti che siano uguali ad un medesimo rapporto sono uguali anche fra loro[8].

Infatti, A stia a B come C sta a D, e C stia a D come E sta a F; dico che A sta a B come E sta a F.

Si prendano difatti le grandezze mA, mC, mE equimultiple di A, C, E, e delle altre grandezze nB, nD, nF equimultiple qualunque di B, D, F.

Ora, poiché $A : B = C : D$, e sono state prese mA, mC equimultiple di A, C, e delle altre grandezze nB, nD equimultiple qualunque di B, D, se mA supera nB, anche mC supera nD, se mA è uguale a nB, anche mC è uguale a nD, e se mA è minore di nB, anche mC è minore di nD (V, def. V)[a]. Di nuovo, poiché $C : D = E : F$, e sono state prese mC, mE equimultiple di C, E, ed altre grandezze nD, nF equimultiple qualunque di D, F, si ha che, se mC supera nD, [corrispondentemente] mE è maggiore di nF, se mC è uguale a nD, anche mE è uguale a nF, e se mC è minore di nD, è minore pure mE di nF (V, def. V). Ma [è risultato

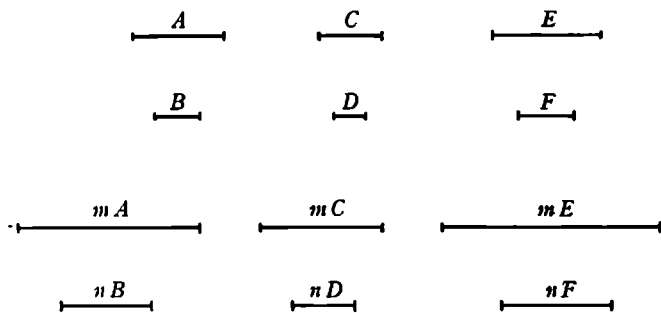
a. L'espressione letterale ha qui « è in difetto », ἐλλείπει dal verbo ἐλλείπειν, come si dice ὑπερέχειν per *superare*. Tutte le altre volte porta invece *è minore* (ἔλαττον).

[8] In questa proposizione viene dimostrato che l'uguaglianza di rapporti della definizione quinta soddisfa alla proprietà transitiva. Come di consueto, Euclide non parla tuttavia di due coppie di grandezze aventi tra loro a due a due *rapporti uguali*, ma dice che stanno *nello stesso rapporto*.

Quella che noi chiamiamo uguaglianza di rapporti gode evidentemente della proprietà riflessiva ($A : B = A : B$, cioè da $mA \gtreqless nB$ segue corrispondentemente $mA \gtreqless nB$) e gode anche della proprietà simmetrica (se $A : B = C : D$ è anche $C : D = A : B$; basta vedere che se da $mA \gtreqless nB$ si deduce ordinatamente $mC \gtreqless nD$ anche da queste ultime relazioni si deducono le precedenti, come si ricava sùbito per assurdo).

Valendo, dunque, anche la proprietà transitiva, possiamo senz'altro dire che l'*uguaglianza di rapporti* (il trovarsi *nello stesso rapporto*) è una relazione di equivalenza, nel senso della matematica moderna: ha pieno diritto di chiamarsi *uguaglianza*.

che] se mC superava[a] nD, anche mA superava nB, se poi mC era uguale a nD, corrispondentemente mA era uguale a nB, e se mC era minore di nD, era minore mA di nB; cosicché si ha pure, se mA supera nB, che anche mE supera nF, se mA è uguale a nB, anche mE è uguale a nF, e se mA è minore di nB, anche mE è minore di nF. Ora, mA, mE sono equimultiple di A, E, mentre nB, nF sono altre grandezze equimultiple qualunque di B, F; perciò A sta a B come E sta a F.

Dunque, rapporti che siano uguali ad un medesimo rapporto... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

È APPLICATA IN: V, 16, 18, 19, 23; VI, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 30, 33; X, 6, 12, 25, 27, 28, 32, 53 lemma, 66, 67, 68, 91, 92, 98, 100, 102, 103; XI, 17, 31; XII, 11, 15.

PROPOSIZIONE 12.

Se quantesivoglia grandezze sono proporzionali, una delle antecedenti starà ad una delle conseguenti[, *cioè alla sua conseguente,*] *come la somma delle antecedenti sta alla somma delle conseguenti*[9].

a. L'uso dell'imperfetto per citare un risultato ottenuto precedentemente è normale uso del testo.

[9] Qui comincia a percorrersi la strada per giungere alla V, 16, ossia alla permutazione dei medi in una proporzione tra quattro grandezze tutte omogenee.

Si tratta qui del ben noto teorema: « In una catena di rapporti uguali

Siano A, B, C, D, E, F quantesivoglia grandezze in proporzione fra loro, in modo che si abbia: $A : B = C : D = E : F$; dico che A sta a B come la somma di A, C, E sta alla somma di B, D, F.

Infatti, si prendano le grandezze mA, mC, mE equimultiple di A, C, E, e delle altre grandezze nB, nD, nF equimultiple qualunque di B, D, F.

Ora, poiché $A : B = C : D = E : F$, e sono state prese le grandezze mA, mC, mE equimultiple di A, C, E, ed altre grandezze nB, nD, nF equimultiple qualunque di B, D, F, se mA supera nB, anche mC supera nD e mE supera nF, e corrispondentemente se mA è uguale a nB, o se è minore, mC, mE sono uguali o minori (V, def. V). Cosicché pure, se mA supera nB, anche la somma $mA + mC + mE$ supera la somma $nB + nD + nF$, se mA è uguale a nB, le somme

la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti come un qualunque antecedente sta al suo conseguente ».

Va osservato che il poter parlare di più di due rapporti uguali (« quante si vogliono grandezze proporzionali », nel testo euclideo) presuppone la proprietà transitiva che è stata appunto dimostrata nella proposizione precedente V, 11. Si presuppone, inoltre, che le quattro grandezze che costituiscono i termini delle proporzioni siano tutte omogenee.

Ragionando su due sole coppie di grandezze nello stesso rapporto:

$$A : B = C : D$$

la V, 12 in questione ci dice che è:

$$(A + C) : (B + D) = A : B$$

Quindi già in questa proporzione si valica quella specie di abisso che nella definizione quinta si è spalancato tra le prime due grandezze e le altre due, cioè tra il primo e il secondo membro della relazione $A : B = C : D$. La definizione quinta, come s'è visto, opera sui due membri separatamente, se pur simmetricamente, facendo dedurre da ciascuna relazione $mA \gtreqless nB$ la corrispondente $mC \gtreqless nD$.

Qui nella V, 12, invece, le prime due grandezze A, B s'intrecciano, per dir così, con le altre due C, D formando le somme $A + C$ e $B + D$. Un primo passo verso la possibile permutazione dei medi, che addirittura scambia una delle prime due grandezze (B) con una delle altre due (C), è dunque così compiuto. Del resto, come vedremo, questa V, 12 viene applicata proprio per la V, 15 ossia per quella proposizione che costituisce l'ultimo passo per giungere, con la proposizione seguente V, 16, alla permutazione dei medi.

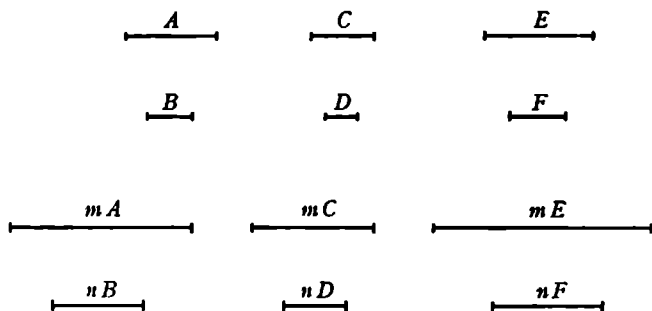
sono uguali, e se mA è minore di nB, la somma $mA + mC + mE$ è minore della somma $nB + nD + nF$. Ma mA e la somma $mA + mC + mE$ sono equimultiple rispettivamente di A e di $A + C + E$, perché se vi sono quantesivoglia grandezze rispettivamente equimultiple di altrettante grandezze, una delle prime grandezze è tante volte multipla di una delle seconde quante volte anche la somma delle prime sarà multipla della somma delle seconde (V, 1). Per la stessa ragione, pure nB e la somma $nB + nD + nF$ sono equimultiple [rispettivamente] di B e della somma $B + D + F$; quindi A sta a B come la somma di A, C, E sta alla somma di B, D, F [$A : B = (A + C + E) : (B + D + F)$] (V, def. V).

Dunque, se quantesivoglia grandezze sono proporzionali... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

A C E

B D F

mA mC mE

nB nD nF

APPLICA: V, 1.

È APPLICATA IN: V, 15; VI, 20; X, 103, 104, 105, 112; XII, 4, 8 coroll., 12, 17 coroll.

PROPOSIZIONE 13.

Se una prima grandezza ha rispetto ad una seconda grandezza lo stesso rapporto che una terza ha rispetto ad una quarta, e la terza ha rispetto alla quarta rapporto maggiore che una quinta rispetto ad una sesta, anche la prima avrà rispetto alla seconda rapporto maggiore che la quinta rispetto alla sesta [10].

[10] È questa una specie di proprietà transitiva mista dell'uguaglianza e della disuguaglianza dei rapporti: proprietà che vale anche per l'ugua-

Infatti, una prima grandezza A abbia rispetto ad una seconda grandezza B lo stesso rapporto che una terza C ha rispetto ad una quarta D, e la terza C abbia rispetto alla quarta D rapporto maggiore che una quinta E rispetto ad una sesta F. Dico che anche la prima A avrà rispetto alla seconda B rapporto maggiore che la quinta E rispetto alla sesta F[, ossia: se è:

$$\begin{cases} A : B = C : D \\ C : D > E : F \end{cases} \quad \text{si ricava:} \quad A : B > E : F].$$

Poiché si possono avere difatti grandezze mC, mE equimultiple di C, E, come pure altre grandezze nD, nF equimultiple di D, F, e tali che mC superi nD, mentre mE non supera nF (V, def. VII), [ossia tali che si abbia: $mC > nD$, mentre è $mE \leqslant nF$,] risultino prese simili grandezze, e siano appunto mC, mE equimultiple di C, E, e nD, nF altre equimultiple qualunque di D, F, in modo che mC superi nD, ma mE non superi nF; e quante volte mC è multipla di C, altrettante volte sia anche mA multipla di A, e quante

glianza e disuguaglianza tra numeri. Infatti se fra i tre numeri: a, b, c, valgono le due relazioni:

$$a = b$$
$$b > c$$

si ricava:

$$a > c$$

Si fa ciò in base alla stessa proprietà transitiva dell'uguaglianza ed alla definizione di numeri disuguali: essere $b > c$ significa infatti essere $b = c + d$ dove d è un numero positivo.

Si ha dunque

$$a = b \; ; \quad b = c + d$$

e pertanto, per la proprietà transitiva:

$$a = c + d \quad \text{ossia:} \quad a > c$$

Così per l'uguaglianza e per la disuguaglianza tra rapporti dall'uguaglianza:

$$a : b = c : d$$

e dalla disuguaglianza:

$$c : d > e : f$$

si ricava:

$$a : b > e : f$$

Per la dimostrazione si ricorre unicamente alle due definizioni (quinta e settima del libro quinto) di uguaglianza e disuguaglianza tra rapporti.

volte nD è multipla di D, altrettante sia anche nB multipla di B[, cioè si prendano i multipli mA e nB].

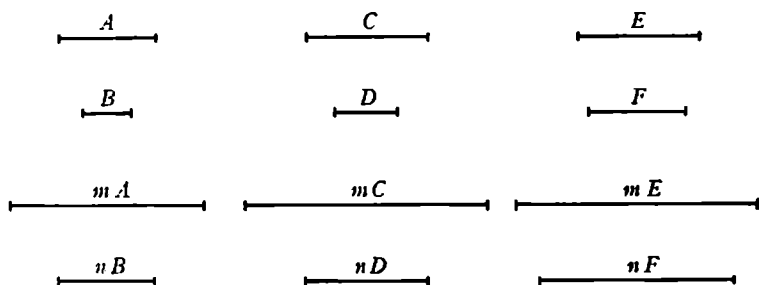
E poiché $A : B = C : D$, e sono state prese le grandezze mA, mC equimultiple di A, C, ed altre grandezze nB, nD equimultiple qualunque di B, D, secondo che mA sia maggiore, uguale o minore di nB, corrispondentemente mC lo è di nD (V, def. V). Ma mC supera nD [$mC > nD$]; anche mA supera quindi nB [$mA > nB$]. Ma mE non supera nF [$mE \leqslant nF$]; e mA, mE sono equimultiple di A, E, mentre nB, nF sono altre equimultiple qualunque di B, F; perciò A rispetto a B ha rapporto maggiore che E rispetto a F (V, def. VII).

Dunque, se una prima grandezza ha rispetto ad una seconda grandezza... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

A C E

B D F

mA mC mE

nB nD nF

È APPLICATA IN: V, 14, 20, 21.

PROPOSIZIONE 14.

Se una prima grandezza ha rispetto ad una seconda grandezza lo stesso rapporto che una terza ha rispetto ad una quarta, e la prima è maggiore della terza, anche la seconda sarà maggiore della quarta, se la prima è uguale alla terza, la seconda corrispondentemente sarà uguale, e se la prima è minore, la seconda sarà minore[11].

[11] Con questa proposizione si compie un passo decisivo verso la « permutazione dei medi » giungendosi al confronto tra primo e terzo termine di una proporzione, e corrispondentemente tra secondo e quarto. L'*abisso*

Infatti, una prima grandezza A abbia rispetto ad una seconda grandezza B lo stesso rapporto che una terza C ha rispetto ad una quarta D, ed A sia maggiore di C; dico che anche B è maggiore di D.

Poiché difatti A è maggiore di C, e B è un'altra grandezza qualunque, si ha che A, rispetto a B, ha rapporto maggiore che C rispetto a B (V, 8). Ma A sta a B come C sta a D; perciò anche C ha rispetto a D rapporto maggiore che C rispetto a B (V, 13). Ma quella grandezza rispetto a cui una stessa grandezza ha rapporto maggiore, è minore (V, 10); quindi D è minore di B; cosicché B è maggiore di D.

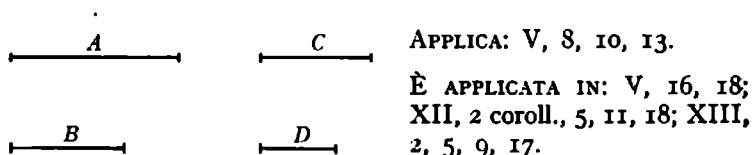
Similmente potremo dimostrare che pure se A è uguale a C, sarà anche B uguale a D, e che pure se A è minore di C, anche B sarà minore di D.

Dunque, se una prima grandezza ha rispetto ad una seconda grandezza... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

A C

B D

APPLICA: V, 8, 10, 13.

È APPLICATA IN: V, 16, 18; XII, 2 coroll., 5, 11, 18; XIII, 2, 5, 9, 17.

tra le due coppie di grandezze della proporzione è così completamente colmato.

Questa proposizione V, 14 dice che, data la proporzione $A : B = C : D$ a seconda che sia $A \gtreqless C$ è pure, corrispondentemente, $B \gtreqless D$. Si presuppone, naturalmente, l'omogeneità di tutt'e quattro i termini della proporzione.

In base alla definizione quinta, se vale la proporzione: $A : B = C : D$, secondo che sia $A \gtreqless B$ deve essere in corrispondenza $C \gtreqless D$.

Basta, infatti, applicare la definizione quinta per il caso particolare $m = n = 1$, cioè considerando le grandezze A, C e B, D come equimultiple di sé stesse.

Sicché la proprietà di questa V, 14 costituisce condizione necessaria (non sufficiente) perché valga la proporzione (coi medi *permutati*):

$$A : C = B : D$$

Nella dimostrazione si applica essenzialmente la proprietà transitiva mista per l'uguaglianza e la disuguaglianza dei rapporti (V, 13).

PROPOSIZIONE 15.

Due grandezze e due loro equimultipli, presi le une e gli altri nell'ordine corrispondente, sono nello stesso rapporto[a] [12].

Infatti, mA sia multipla di A lo stesso numero di volte che mB è multipla di B; dico che A sta a B come mA sta a mB [$A : B = mA : mB$].

Poiché difatti mA è multipla di A lo stesso numero di volte che mB lo è di B, vi sono in mA tante grandezze uguali ad A quante anche sono in mB uguali a B. Risultino divise: mA nelle m grandezze uguali ad A, e mB nelle m grandezze uguali a B; il numero delle grandezze contenute in A sarà così uguale al numero delle grandezze contenute in B. E poiché le m parti di mA sono uguali fra loro, e pure le m parti di B sono fra loro uguali, ciascuna parte di mA ha rispetto a ciascuna parte di mB lo stesso rap-

a. Letteralmente: « Se prese nell'ordine corrispondente, parti di grandezze hanno fra loro lo stesso rapporto che le loro grandezze parimente multiple ». Euclide usa qui ὡσαύτως, similmente, parimente, e non ἰσάκις, ugualmente, come di solito per gli equimultipli.

[12] S'è già veduto (cfr. nota alla V, 1) che all'inizio del libro quinto Euclide dà una specie di introduzione che si riferisce all'equimultiplicità (ossia al caso del rapporto intero). In sostanza, in dette proposizioni iniziali Euclide prende in considerazione la proporzione:

$$mA : A = mB : B$$

In questa proposizione V, 15 Euclide dimostra, invece, la validità della proporzione: $mA : mB = A : B$.

È dimostrata, cioè, la proprietà della permutazione dei medi per il caso particolare dell'uguaglianza di due rapporti interi, cioè nel caso dell'equimultiplicità.

La dimostrazione è assai semplice: basta infatti considerare i rapporti uguali (per la proprietà riflessiva):

$$A : B = A : B = A : B = \dots$$

e applicare la V, 12 (sulla somma degli antecedenti e dei conseguenti). Si ottiene:

$$(A + A + \dots) : (B + B + \dots) = A : B$$

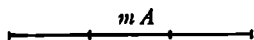
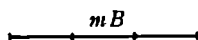
ossia:

$$mA : mB = A : B$$

porto[, ossia: $A : B = A : B = A : B ...$] (V, 7). Quindi anche, una delle antecedenti starà ad una delle conseguenti come la somma delle antecedenti sta alla somma delle conseguenti (V, 12); perciò $A : B = mA : mB$.

Dunque, due grandezze e due loro equimultipli... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

mA A

mB B

APPLICA: V, 7, 12.

È APPLICATA IN: V, 16, 23; VI, 1, 33; XIII, 17.

PROPOSIZIONE 16.

Se quattro grandezze sono proporzionali, esse saranno proporzionali anche permutando [13].

Siano A, B, C, D quattro grandezze proporzionali, in modo che A stia a B come C sta a D; dico che esse saranno

[13] È questo il punto di arrivo della prima parte del libro quinto: la dimostrazione della possibilità di permutare i medi in una proporzione tra quattro grandezze tutte omogenee.

Si parte dalla proporzione:

$$A : B = C : D$$

e si scrivono, in base alla precedente V, 15, le proporzioni:

$$mA : mB = A : B$$
$$nC : nD = C : D$$

da cui, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza di rapporti:

$$mA : mB = nC : nD$$

Si applica ora la V, 14.

Secondo che sia:

$$mA \gtreqless nC$$

è corrispondentemente:

$$mB \gtreqless nD$$

Ma questo fatto, in base alla definizione quinta, ci dice appunto che vale la proporzione:

$$A : C = B : D$$

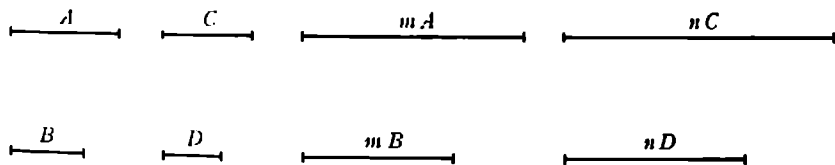
cioè che è lecito permutare i medi in una proporzione

$$A : B = C : D$$

tra quattro grandezze omogenee.

proporzionali anche *permutando*, ossia che A sta a C come B sta a D.

Infatti, si prendano le grandezze mA, mB equimultiple di A, B, e delle altre grandezze nC, nD equimultiple qualunque di C, D. Ora, poiché mA è multipla di A lo stesso numero di volte che mB è multipla di B, e grandezze hanno fra loro lo stesso rapporto di grandezze loro equimultiple (V, 15), si ha che $A : B = mA : mB$. Ma $A : B = C : D$; quindi anche, $C : D = mA : mB$ (V, 11). Di nuovo, poiché nC, nD sono equimultiple di C, D, si ha che $C : D = nC : nD$ (V, 15). Ma [si è veduto che] $C : D = mA : mB$; quindi anche, $mA : mB = nC : nD$ (V, 11). Ma se quattro grandezze sono proporzionali, e la prima è maggiore della terza, pure la seconda sarà maggiore della quarta, se la prima è uguale alla terza, corrispondentemente la seconda sarà uguale, e se la prima è minore, la seconda sarà minore (V, 14). Se perciò mA è maggiore di nC, anche mB è maggiore di nD, se mA è uguale a mB, corrispondentemente mB è uguale, e se mA è minore, mB è minore. Ma mA, mB sono equimultiple di A, B, mentre nC, nD sono altre grandezze equimultiple qualunque di C, D; quindi A sta a C come B sta a D (V, def. V).

Dunque, se quattro grandezze sono proporzionali... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: V, 11, 14, 15.

È APPLICATA IN: V, 19, 23; VI, 4, 19, 20, 24, 25; X, 27, 28, 66, 67, 68, 103, 104, 105, 113, 114; XI, 23; XII, 2, 2 coroll., 4, 5, 11, 12, 18.

PROPOSIZIONE 17.

Se quattro grandezze sono proporzionali, esse saranno proporzionali anche scomponendo [14].

Siano A, B, C, D quattro grandezze proporzionali, in modo che A stia a B come C sta a D; dico che esse saranno proporzionali anche *scomponendo*, ossia che $(A - B) : B = (C - D) : D$.

Infatti, si prendano le grandezze $m(A - B)$, mB, $m(C - D)$, mD equimultiple di $(A - B)$, B, $(C - D)$, D, e delle altre grandezze nB, nD equimultiple qualunque di B, D.

[14] In termini e in forma abbreviata: si parte dall'ipotesi:

$$A : B = C : D$$

e si vuol dimostrare che è:

$$(A - B) : B = (C - D) : D$$

Poiché vale la proporzione che costituisce l'ipotesi, si corrispondono i segni nelle relazioni:

$$pA \gtreqless qB \qquad pC \gtreqless qD$$

(V, def. V) per p, q interi qualunque. Ebbene: scegliamo $p = m$; $q = n + m$.

Deve aversi dunque la corrispondenza di segni:

$$mA \gtreqless (m + n)\,B \qquad mC \gtreqless (m + n)\,D$$

E siccome è:

$$A = (A - B) + B \quad \text{e:} \quad C = (C - D) + D$$

abbiamo pure (per la V, 1: la somma degli equimultipli è l'equimultiplo della somma) la seguente concordanza di segni:

$$m(A - B) + mB \gtreqless mB + nB$$

$$m(C - D) + mD \gtreqless mD + nD$$

dove, per la trasformazione del secondo membro, si è applicata la V, 2.

Sottraendo ora da ambedue i membri i termini comuni (rispettivamente mB, mD) si ottiene la seguente corrispondenza di segni:

$$m(A - B) \gtreqless nB \qquad m(C - D) \gtreqless nD$$

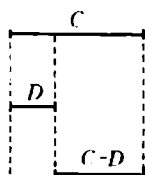
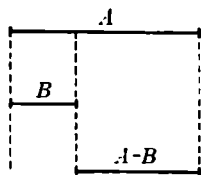
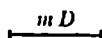
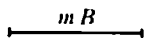
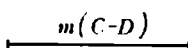
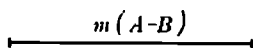
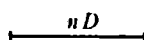
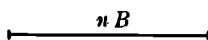
ossia (V, def. V) la proporzione:

$$(A - B) : B = (C - D) : D$$

cioè quel che si doveva dimostrare.

Ora, poiché $m(A - B)$ è multipla di $(A - B)$ lo stesso numero di volte che mB è multipla di B, si ha che la somma $m(A - B) + mB$ è equimultipla della somma $(A - B) + B$ (V, 1) ossia di A.

Ma $m(A - B)$, $m(C - D)$ sono rispettivamente equimultiple di $(A - B)$, $(C - D)$, per cui la somma $m(A - B) + mB = mA$ è multipla di A lo stesso numero di volte che $m(C - D)$ lo è di $(C - D)$. Di nuovo, poiché $m(C - D)$, mD sono rispettivamente equimultiple di $(C - D)$, D, si ha che $m(C - D)$ è multipla di $(C - D)$ lo stesso numero m di volte che $m(C - D) + mD$ è multipla di C[, ossia è uguale a mC] (V, 1). Ma [si è veduto che] $m(C - D)$ era multipla di $(C - D)$ lo stesso numero di volte che $m(A - B) + mB = mA$ è multipla di A, sicché $m(A - B) + mB = mA$ è multipla di A lo stesso numero m di volte che $m(C - D) + mD = mC$ è multipla di C. Quindi le due somme sono equimultiple rispettivamente di A, C. Di nuovo, poiché mB è multipla di B lo stesso numero di volte che mD lo è di D, e pure nB, nD sono rispettivamente equimultiple di B, D, si ha che la somma $mB + nB$ è multipla di B lo stesso numero di volte che la somma $mD + nD$ è multipla di D (V, 2)[, ossia: $\begin{matrix} mB + nB = (m + n)B. \\ mD + nD = (m + n)D \end{matrix}$] E poiché [per ipotesi] $A : B = C : D$, e sono state prese mA, mC equimultiple di A, C, e $mB + nB$, $mD + nD$ equimultiple di B, D, si ha che, se mA supera nB, anche mC supera nD, se mA è uguale a nB, corrispondentemente mC è uguale, e se mA è minore, mC è minore (V, def. V). Supponiamo ora sia il caso in cui $mA = m(A - B) + mB$ supera $mB + nB$, e quindi, sottratta in comune da esse mB, anche $m(A - B)$ supera nB. Ma [è risultato] che se mA superava $mB + nB$, pure mC superava $mD + nD$; perciò anche $mC = m(C - D) + mD$ supera $mD + nD$, e sottratta in comune da esse mD, pure $m(C - D)$ supera nD. Similmente potremo dimostrare che pure se $m(A - B)$ è uguale a nB, anche $m(C - D)$ sarà uguale a nD, e se $m(A - B)$ è minore di nB, sarà $m(C - D)$ minore di nD. Ora, $m(A - B)$, $m(C - D)$ sono grandezze

equimultiple di $(A - B)$, mentre nB, nD sono altre equimultiple qualunque di B, D; quindi $(A - B) : B = (C - D) : D$.

Dunque, se quattro grandezze sono proporzionali... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

Applica: V, 1, 2.

È applicata in: V, 18, 19; X, 14, 112.

Proposizione 18.

Se quattro grandezze sono proporzionali, esse saranno proporzionali anche componendo[a] [15].

Siano A, B, C, D quattro grandezze proporzionali, in modo che si abbia: $A : B = C : D$; dico che esse saranno

a. Naturalmente, l'enunciato dice: « Se grandezze sono proporzionali *scomponendo*, esse saranno proporzionali anche *componendo* »; si enuncia cioè la reciproca della proposizione precedente.

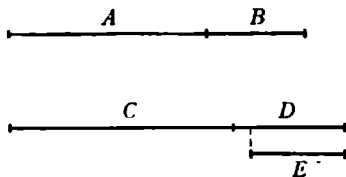
[15] È stato fin da tempi lontani osservato che per dimostrare questa proposizione Euclide ammette l'esistenza della quarta proporzionale dopo tre grandezze date. Si è cercato di ricorrere a varianti (anche contenute in qualche antico codice) che non si servono della suddetta ammissione, che è in aperto contrasto col principio (sostenuto recentemente da Zeuthen) secondo il quale i geometri greci assumevano la costruzione come dimostrazione d'esistenza di una figura (cfr. nota alla I, 5).

Ma non si tratta di un caso isolato, bensì l'ammissione stessa si ritrova sistematicamente nel libro XII degli *Elementi* nell'applicazione del metodo di esaustione (cfr. nota alla XII, 2). È un'ammissione di continuità, che appare in certo senso legittima dopo che è stato imposto alle *grandezze* del libro quinto di soddisfare al cosiddetto postulato di Archimede (cfr. nota alla def. quarta di questo libro quinto).

proporzionali anche *componendo*, ossia che $(A + B) : B =$ $= (C + D) : D$.

Infatti, se $(A + B)$ non stesse a B come $(C + D)$ sta a D, starebbe $(A + B)$ a B come $(C + D)$ sta ad un'altra grandezza minore di D, o ad una maggiore.

Stia dapprima $(C + D)$ in tale rapporto rispetto ad una grandezza E minore di D. Poiché $(A + B) : B = (C + D) : E$, tali grandezze proporzionali saranno proporzionali anche *scomponendo* (V, 17). Perciò $(A + B - B) : B = (C + D - E) : E$, ossia $A : B = (C + D - E) : E$. Ma pure, per ipotesi, $A : B = C : D$. Quindi anche, $(C + D - E) : E = C : D$ (V, 11). Ma la prima grandezza $(C + D - E)$ è maggiore della terza C[, essendosi supposta E minore di D]; perciò anche la seconda E è maggiore della quarta D (V, 14). Ma sarebbe anche minore di essa[, come si era supposto]: il che è impossibile. Quindi $(A + B)$ non sta a B come $(C + D)$ ad una grandezza E minore di D. Similmente potremo dimostrare che $(C + D)$ non è in tale rapporto neppure rispetto ad una grandezza che sia maggiore di D; essa è quindi in tale rapporto rispetto [precisamente] a D[, ossia: $(A + B) : B = (C + D) : D$].

Dunque, se quattro grandezze sono proporzionali... (secondo l'enunciato). - C.D.D.

APPLICA: V, 11, 14, 17.
È APPLICATA IN: V, 24; VI, 24; X, 53 lemma, 68, 105; XII, 6; XIII, 11.

PROPOSIZIONE 19.

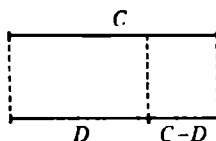
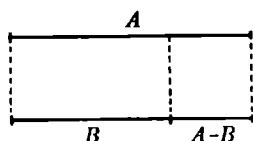
Se una grandezza sta ad un'altra come una parte della prima sta ad una parte della seconda, anche le parti residue stanno fra loro come le grandezze totali [a] [16].

a. Letteralmente: « Se tutto sta a tutto come sottratto a sottratto (cioè, come parte sottratta a parte sottratta), anche il

[16] Questa proposizione è parallela alla V, 12: si riferisce però alla differenza, anziché alla somma. Essa può enunciarsi così: « Se quattro

Infatti, tutta quanta la grandezza A stia a tutta quanta la grandezza C come la parte B di A sta alla parte D di C; dico che anche il resto $(A - B)$ starà al resto $(C - D)$ come tutta quanta A sta a tutta quanta C.

Poiché difatti A sta a C come B sta a D, si ha anche, *permutando*, che A sta a B come C sta a D (V, 16). E poiché quattro grandezze sono così proporzionali fra loro, esse saranno proporzionali pure *scomponendo* (V, 17), ossia $(A - B)$ sta a B come $(C - D)$ sta a D; e *permutando*, si ha che $(A - B)$ sta a $(C - D)$ come B sta a D (V, 16). Ma B sta a D, per ipotesi, come tutta quanta A sta a tutta quanta C. Perciò anche il resto $(A - B)$ starà al resto $(C - D)$ come tutta quanta A sta a tutta quanta C (V, 11).

Dunque, se una grandezza sta ad un'altra... (secondo l'enunciato). - C.D.D.

APPLICA: V, 11, 16, 17.

È APPLICATA IN: V, 25; X, 66, 67, 113, 114.

resto starà al resto come tutto sta a tutto »; e ciò sarebbe fedele all'espressione letterale greca, pure il termine *il resto*, la parte rimanente, τὸ λοιπόν, usato assolutamente, come ὅλον = *tutto* e ἀφαιρεθέν = parte *sottratta*.

grandezze sono in proporzione, la differenza degli antecedenti sta alla differenza dei conseguenti come un antecedente sta al suo conseguente ». Per usare i simboli del testo, data la proporzione:

$$A : C = B : D$$

si tratta di dimostrare che vale l'altra:

$$(A - B) : (C - D) = A : C$$

Nella dimostrazione, Euclide anzitutto permuta i medi nella proporzione data, ottenendo (V, 16):

$$A : B = C : D$$

Applica poi lo *scomponendo* (V, 17):

$$(A - B) : A = (C - D) : C$$

Infine permuta di nuovo i medi, ottenendo:

$$(A - B) : (C - D) = A : C$$

COROLLARIO.

È da ciò evidente che se [quattro] grandezze sono proporzionali, esse saranno proporzionali anche *convertendo*[17]. - C.D.D.

È APPLICATO IN: X, 29, 30, 48, 49, 50, 51, 52, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 113.

PROPOSIZIONE 20.

Se si dànno tre grandezze e delle altre grandezze in ugual numero, che siano a due a due nello stesso rapporto, e se ex aequo *la prima è maggiore della terza, anche la quarta sarà maggiore della sesta, se la prima è uguale alla terza, corrispondentemente la quarta sarà uguale alla sesta, e se la prima è minore, la quarta sarà minore*[18].

Si diano tre grandezze A, B, C, e delle altre D, E, F in ugual numero, che siano a due a due nello stesso rap-

[17] Cioè dalla proporzione: $A : B = C : D$ si ricava (*convertendo*) l'altra:

$$A : (A - B) = C : (C - D)$$

[18] Questa proposizione serve da *lemma* alla seguente, nella quale si deduce la legittimità della deduzione *ex aequo* di una proporzione da altre due, nel senso della definizione XVII di questo libro quinto. La locuzione « *ex aequo* » qui adoperata trae appunto origine dalla suddetta def. XVII e dalla seguente prop. 21.

Si considerano sei grandezze:

$$\begin{matrix} A & B & C \\ D & E & F \end{matrix}$$

tali che tra di esse valgano le proporzioni fra termini vicini:

$$\begin{aligned} A : B &= D : E \\ B : C &= E : F \end{aligned}$$

e si abbia la disuguaglianza fra termini *lontani*:

$$A > C$$

(cioè quella disuguaglianza che, per analogia con la def. XVII di questo libro quinto, Euclide indica qui con la locuzione « *ex aequo* »). Si vuol dimostrare che una disuguaglianza nello stesso senso vale per le grandezze *lontane* della seconda riga, cioè che si ha: $D > F$. (Similmente si dimo-

porto, ossia tali che $A : B = D : E$ e $B : C = E : F$, mentre *ex aequo* sia A maggiore di C; dico che anche D sarà maggiore di F, [mentre,] se A è uguale a C, corrispondentemente D sarà uguale a F, e se A è minore di C, sarà D minore di F.

Infatti, supposto che A sia maggiore di C, poiché B è un'altra qualsiasi grandezza [a], e la grandezza maggiore ha rispetto ad una stessa grandezza rapporto maggiore che quella minore (V, 8), si ha che A rispetto a B ha rapporto maggiore che C rispetto a B[, cioè: $A : B > C : B$]. Ma $A : B = D : E$, ed [inoltre $B : C = E : F$, da cui] *invertendo*, $C : B = F : E$ (V, 7 coroll.); perciò anche D ha rispetto ad E rapporto maggiore che F rispetto ad E (V, 13) [$D : E > > F : E$]. Ma delle grandezze che abbiano rapporto rispetto ad una stessa grandezza, quella che ha rapporto maggiore è maggiore (V, 10). Quindi D è maggiore di F. Similmente potremo dimostrare che pure se A è uguale a C, anche D sarà uguale a F, e se A è minore di C, anche D sarà minore di F.

a. Letteralmente: « Poiché infatti A è maggiore di C, e B... », vale a dire nella supposizione che, e che noi diamo già per concessa.

strerà pure che se è $A = C$ è anche $D = F$, e infine che se è $A < C$ è pure $D < F$).

Supposto che sia $A > C$ segue per la V, 8:

$$A : B > C : B$$

Ma valgono per ipotesi le proporzioni:

$$A : B = D : E$$
$$B : C = E : F$$

Quest'ultima, *invertendo* (V, 7 coroll.), diviene:

$$C : B = F : E$$

Sostituendo ad $A : B$ ed a $C : B$, nella disuguaglianza sopra scritta, i rapporti rispettivamente uguali si ottiene:

$$D : E > F : E$$

Ma ciò significa che è $D > F$ (V, 10) come appunto si doveva dimostrare.

Dunque, se si dànno tre grandezze... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: V, 7 coroll., 8, 10, 13.

È APPLICATA IN: V, 22.

PROPOSIZIONE 21.

Se si dànno tre grandezze ed altre grandezze in ugual numero, che prese a due a due siano nello stesso rapporto ed in proporzione perturbata [a], *mentre* ex aequo *la prima grandezza è maggiore della terza, anche la quarta sarà maggiore della sesta, se la prima è uguale alla terza, corrispondentemente la quarta sarà uguale alla sesta, e se la prima è minore, la quarta sarà minore.*

Si diano tre grandezze A, B, C e delle altre D, E, F in ugual numero, che prese a due a due siano nello stesso rapporto ed in proporzione perturbata, ossia tale che $A : B = E : F$ e $B : C = D : E$, mentre, *ex aequo*, sia A maggiore di C; dico che anche D sarà maggiore di F, [mentre,] se A è uguale a C, corrispondentemente D sarà uguale a F, e se A è minore di C, sarà D minore di F.

Infatti, supposto che A sia maggiore di C, poiché B è un'altra qualsiasi grandezza, si ha che A rispetto a B ha rapporto maggiore che C rispetto a B (V, 8). Ma $A : B = E : F$, ed [inoltre $B : C = D : E$, da cui] *invertendo*, $C : B = E : D$ (V, 7 coroll.). Quindi anche E ha rispetto a F rapporto maggiore che E rispetto a D [$E : F > E : D$] (V, 13). Ma è minore quella grandezza rispetto a cui una stessa grandezza abbia rapporto maggiore (V, 10); è F quindi minore di D, e si ha in conseguenza che D è maggiore di F.

a. Letteralmente: « che siano prese a due a due e nello stesso rapporto, mentre la loro proporzione è [una proporzione] perturbata »; dirà dopo: « Siano (cioè, vi siano, siano date) tre grandezze A, B, C..., ecc., che siano prese a due a due e nello stesso rapporto, e sia la loro proporzione [una proporzione] perturbata ».

Similmente potremo dimostrare che pure se A è uguale a C, anche D sarà uguale a F, e se A è minore di C, anche F sarà minore.

Dunque, se si dànno tre grandezze... (secondo l'enunciato). - C.D.D.

APPLICA: V, 7 coroll., 8, 10, 13.

È APPLICATA IN: V, 23.

PROPOSIZIONE 22.

Se si dànno quantesivoglia grandezze ed altre grandezze in ugual numero, che, prese a due a due [le vicine], siano nello stesso rapporto, anche ex aequo *[le lontane] saranno nello stesso rapporto* [19].

Si diano quantesivoglia grandezze A, B, C e delle altre D, E, F in ugual numero, che siano a due a due nello stesso rapporto, in modo che si abbia: $A : B = D : E$, e [pure:]

[19] In questa proposizione Euclide dimostra la legittimità della deduzione *ex aequo* (cfr. def. XVII del libro quinto): tale legittimità era stata già dimostrata nella V, 3 per il caso particolare del rapporto intero, ossia della equimultiplicità. Il risultato si estende ora al caso più generale. Date cioè sei grandezze

$$\begin{matrix} A & B & C \\ D & E & F \end{matrix}$$

dalle due proporzioni *fra termini vicini*:

$$A : B = D : E$$
$$B : C = E : F$$

può ricavarsi l'altra *fra termini lontani*:

$$A : C = D : F$$

Dalla VI, 23 (cfr. nota ivi) si deduce che Euclide chiama il rapporto $A : C$ *ragione composta* dei due rapporti (*o ragioni*) $A : B$ e $B : C$. In linguaggio moderno, considerando i rapporti come numeri, il rapporto composto si presenta come prodotto di due rapporti (semplici). Ma per le questioni connesse si veda la già citata nota alla VI, 23.

La dimostrazione di questa V, 22 è fondata essenzialmente sulla V, 20 che costituisce un suo lemma, come è stato già avvertito.

$B : C = E : F$; dico che esse saranno nello stesso rapporto anche *ex aequo*[, cioè che si avrà: $A : C = D : F$].

Infatti, si prendano mA, mD equimultiple di A, D, e delle altre grandezze nB, nE equimultiple qualunque di B, E, ed infine si prendano altre grandezze pC, pF equimultiple qualunque di C, F.

Ora, poiché $A : B = D : E$, e sono state prese mA, mD equimultiple di A, D, ed altre grandezze nB, nE equimultiple qualunque di B, E, si ha che $mA : nB = mD : nE$ (V, 4). Per la stessa ragione, anche $nB : pC = nE : pF$. Poiché dunque si dànno tre grandezze mA, nB, pC e delle altre mD, nE, pF in ugual numero, che prese a due a due sono nello stesso rapporto, si ha, *ex aequo*, che se mA supera pC, anche mD supera pF, se mA è uguale a pC, corrispondentemente mD è uguale a pC, e se mA è minore, mD è minore (V, 20). Ma mA, mD sono equimultiple di A, mentre pC, pF sono altre grandezze equimultiple qualunque di C, F. Perciò A sta a C come D sta a F [$A : C = D : F$] (V, def. V).

Dunque, se si dànno quantesivoglia grandezze... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: V, 4, 20.

È APPLICATA IN: V, 24; VI, 4, 20, 22, 23, 24; X, 5, 6, 12, 14, 50, 53, 87, 90; XI, 27; XII, 6, 12.

PROPOSIZIONE 23.

Se si dànno tre grandezze ed altre grandezze in ugual numero, che prese a due a due siano nello stesso rapporto ed in proporzione perturbata, esse anche ex aequo *saranno nello stesso rapporto* [20].

[20] Similmente alla V, 22 questa proposizione permette di dedurre una proporzione da altre due.

La differenza rispetto alla V, 22 consiste soltanto nel fatto che qui la proporzione *è perturbata* (conformemente all'ultima definizione, la XVIII, del libro quinto).

La dimostrazione si fonda sul lemma costituito dalla V, 21.

Si diano tre grandezze A, B, C e delle altre D, E, F in ugual numero, che prese a due a due siano nello stesso rapporto ed in proporzione perturbata, in modo che si abbia: $A : B = E : F$, e [pure:] $B : C = D : E$; dico che si ha [*ex aequo*]: $A : C = D : F$.

Si prendano le grandezze mA, mB, mD equimultiple di A, B, D, ed altre grandezze nC, nE, nF equimultiple qualunque di C, E, F.

Ora, poiché mA, mB sono equimultiple di A, B, e due grandezze stanno fra loro come due loro equimultipli (V, 15), si ha che $A : B = mA : mB$. Per la stessa ragione, si ha pure: $E : F = nE : nF$; ma [per ipotesi] $A : B = E : F$; quindi anche, $mA : mB = nE : nF$ (V, 11). E poiché[, per ipotesi,] $B : C = D : E$ [a], si ha pure, *permutando*, che $B : D = C : E$ (V, 16). Inoltre, poiché mB, mD sono equimultiple di B, D, e due grandezze stanno fra loro come due loro equimultipli, si ha che $B : D = mB : mD$ (V, 15). Ma [si è visto che è:] $B : D = C : E$; quindi anche, $mB : mD = C : E$ (V, 11). Di nuovo, dato che nC, nE sono equimultiple di C, E, si ha: $C : E = nC : nE$ (V, 15). Ma $C : E = mB : mD$; quindi anche, $mB : mD = nC : nE$ (V, 11), e, *permutando*, $mB : nC = mD : : nE$ (V, 16). Ma fu pure dimostrato che $mA : mB = nE : nF$. Poiché dunque si dànno tre grandezze mA, mB, nC, e delle altre mD, nE, nF in ugual numero, che prese a due a due sono nello stesso rapporto ed in proporzione perturbata (V, def. XVIII), si ha, *ex aequo*, che se mA supera nC, pure mD supera nF, se mA è uguale a nC, corrispondentemente mD è uguale a nF, e se mA è minore, mD è minore (V, 21).

a. V'è qui discrepanza tra la lezione dei vari manoscritti e che è quella adottata, ad esempio, da Simson (*op. cit.*, p. 171), e la lezione del codice P seguìta da Heiberg, mentre l'editio princeps di Basilea (1533, p. 65) le riporta ambedue, e per prima quella non del codice P. Tale lezione è: « E poiché B sta a C come D sta ad E, e si sono prese le grandezze H, K ($= mB, mD$) equimultiple di B, D, mentre se ne sono prese delle altre L, M ($= nC, nE$) equimultiple qualunque di C, E, si ha che H sta a L come K sta a M (ossia: $mB : nC = mD : nE$) », inferendo cioè tale risultato direttamente dalla V, 4.

Ora, mA, mD sono equimultiple di A, D, e nC, nF sono equimultiple [qualunque] di C, F. Perciò A sta a C come D sta a F [$A : C = D : F$] (V, def. V).

Dunque, se si dànno tre grandezze... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: V, 11, 15, 16, 21.

PROPOSIZIONE 24.

Se una prima grandezza ha rispetto ad una seconda grandezza lo stesso rapporto che una terza ha rispetto ad una quarta, e pure una quinta grandezza ha rispetto alla seconda lo stesso rapporto che una sesta rispetto alla quarta, anche la somma della prima e della quinta avrà lo stesso rapporto rispetto alla seconda che la somma della terza e della sesta rispetto alla quarta [21].

Infatti, una prima grandezza A abbia rispetto ad una seconda grandezza B lo stesso rapporto che una terza C ha rispetto ad una quarta D, e pure una quinta grandezza E abbia rispetto alla seconda B lo stesso rapporto che una sesta F ha rispetto alla quarta D; dico che anche la somma della prima e della quinta, cioè $A + E$, avrà rispetto alla

[21] Un caso particolare (con riferimento al rapporto intero) di questa proposizione è trattato nella V, 2, nella quale, in sostanza, dalle proporzioni:

$$mA : A = mB : B$$
$$nA : A = nB : B$$

si ricava l'altra:

$$(mA + nA) : A = (mB + nB) : B$$

Qui c'è l'estensione al caso più generale: resta la caratteristica essenziale, ossia che le due proporzioni date in partenza abbiano i conseguenti dell'una uguali ai conseguenti dell'altra.

Cioè dalle proporzioni:

$$A : B = C : D$$
$$E : B = F : D$$

si ricava $(A + E) : B = (C + F) : D$.

Se in particolare, si trattasse di quelle particolari grandezze che, come vedremo, sono i numeri interi, questa V, 24 ci darebbe, in sostanza, la regola per addizionare due frazioni aventi lo stesso denominatore.

seconda B lo stesso rapporto che la somma della terza e della sesta, cioè $C + F$, ha rispetto alla quarta D[, ossia se si ha: $\begin{matrix} A : B = C : D \, , \\ E : B = F : D \, , \end{matrix}$ si ricava: $(A + E) : B = (C + F) : D$].

Infatti, poiché $E : B = F : D$, si ha, *invertendo*, che $B : : E = D : F$ (V, 7 coroll.). Poiché dunque $A : B = C : D$ e $B : E = D : F$, *ex aequo* si ha che $A : E = C : F$ (V, 22). E poiché quattro grandezze sono proporzionali, esse saranno proporzionali anche *componendo* (V, 18); quindi $(A + E) : : E = (C + F) : F$. Ma è anche: $E : F = B : D$; perciò, *ex aequo*, si ha che $(A + E) : B = (C + F) : D$ (V, 22).

Dunque, se una prima grandezza ha rispetto ad una seconda grandezza... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: V, 7 coroll., 18, 22.

È APPLICATA IN: VI, 31; X, 68.

PROPOSIZIONE 25.

Se quattro grandezze sono proporzionali, la somma della massima e della minima è maggiore della somma delle due rimanenti [22].

[22] Data la proporzione $A : B = C : D$ nella quale A sia il termine massimo, D sia il termine minimo, si ha:

$$A + D > B + C$$

Osserviamo con Zeuthen ed Enriques che nel caso particolare $B = C$, ossia per la proporzione:

$$A : B = B : D$$

dove B è media proporzionale (media geometrica) tra A e D, la V, 25 ci dice che: $A + D > 2B$, ossia $B < \frac{A + D}{2}$, ossia B è minore della media aritmetica tra A e D.

Quindi la media geometrica tra due grandezze è minore della media aritmetica tra le stesse.

Per i numeri a, b si ha ad esempio:

$$\sqrt{ab} < \frac{a + b}{2}$$

Per ulteriori notizie, cfr. nota alla VI, 28.

La dimostrazione di questa V. 25 procede così: Dalla proporzione: $A : B = C : D$ valida per ipotesi si ricava per la V, 19: $(A - C) : (B - D) =$

Siano A, B, C, D quattro grandezze proporzionali, in modo che si abbia: $A : B = C : D$, e siano A la maggiore, e D la minore; dico che la somma $A + D$ è maggiore della somma $B + C$.

Infatti, si pongano $(A - E)$ uguale a C, e $(C - F)$ uguale a D.

Poiché $A : B = C : D$, e C è uguale ad $(A - E)$, mentre D è uguale a $(C - F)$, si ha che $A : B = (A - E) : (C - F)$. Ora, poiché tutta quanta A sta a tutta quanta B come la parte $(A - E)$ di A sta alla parte $(C - F)$ di C, il resto E della prima starà al resto F della seconda come tutta quanta A sta a tutta quanta B [$A : B = E : F$] (V, 19). Ma A è maggiore di B, per cui anche E è maggiore di F. E poiché $(A - E)$ è uguale a C, mentre $(C - F)$ è uguale a D, la somma di $(A - E)$, D[, cioè $C + D$,] è uguale alla somma di $(C - F)$, C[, cioè $D + C$]. Ma se[a], essendo disuguali E, F ed essendo maggiore E, aggiungiamo la somma $(A - E) + D$ ad E [$= (C - D) + E$] e la somma $(C - F) + C$ a D [$= (D + C) + F$], ne segue che la somma $A + D$ è maggiore della somma $B + C$[: e difatti, le due somme $C + D$, $D + C$ essendo uguali, aggiungendosi ad esse E, F si ha

a. Nel testo avremmo: «E [poiché] se [si sommano cose uguali ad altre disuguali, i totali sono disuguali, se perciò], ecc.», dove le parole qui in parentesi quadre vanno eliminate, poiché la Nozione comune IV, che riportano, non è genuina.

$= A : B$ (cioè si permutano dapprima i medi, si opera lo *scomponendo* e poi si permutano di nuovo i medi).

Ma siccome per ipotesi è $A > B$ (poiché A è la *massima* fra le quattro grandezze) segue che è pure:

$$A - C > B - D$$

come si vede in base alla def. V del libro quinto, considerando A, B, C, D come equimultipli di esse stesse (cfr. anche la nota 11 alla prop. V, 14).

Aggiungiamo ora $C + D$ ad ambedue i membri della disuguaglianza, ottenendo:

$$(A - C) + (C + D) > (B - D) + (C + D)$$

ossia:

$$A + D > B + C$$

come si doveva appunto dimostrare.

appunto: $\frac{(C + D) + E}{(D + C) + F}$ Ora, $C + E = A$, $D + F = B$, ed essendo $E > F$, segue che $A + D > B + C$].

Dunque, se quattro grandezze sono proporzionali... (secondo l'enunciato). - C.D.D.

APPLICA: V, 19.

LIBRO SESTO

Nel libro sesto viene applicata alla geometria piana la teoria eudossiana delle proporzioni tra grandezze esposta nel libro quinto. È come se Euclide sciogliesse una riserva che finora ha limitato i suoi mezzi; infatti nei primi quattro libri egli ha già trattato buona parte dei più importanti argomenti di geometria piana senza fare ricorso alla teoria delle proporzioni, ma fondando soprattutto sull'uguaglianza delle figure (intesa soprattutto come uguaglianza di grandezza: equivalenza, nel nostro linguaggio) in particolare per i poligoni.

Abbiamo già altrove cercato di rispondere al quesito circa le ragioni che hanno indotto Euclide a seguire una tal linea, ed abbiamo già fatto presente che la tendenza a « svincolare » la geometria dalla teoria delle proporzioni ha avuto quasi certamente origine già assai prima di Euclide, quando la considerazione delle linee incommensurabili rese vacillante una teoria ingenua (numerica) delle proporzioni nelle sue applicazioni alla geometria. Più tardi, con la rigorizzazione della teoria, che (come quella di Eudosso) si rivolse indifferentemente a grandezze commensurabili o incommensurabili, una tale ragione cessò di valere. Ma lo svincolamento in questione continua presso Euclide, forse per forza d'inerzia o in omaggio ad una vera e propria tradizione che ormai si era andata formando (occorre pensare, del resto, che Eudosso è assai vicino, nel tempo, ad Euclide). Si pensa pure a motivi di carattere didattico, tendenti a ritardare quanto possibile una teoria difficile per il principiante, ed infine a motivi cosiddetti di purismo

geometrico, dal momento che la teoria delle proporzioni tra grandezze formulata da Eudosso esorbita, nella sua generalità, dalla pura geometria.

Comunque sia, Euclide si serve ora nel libro sesto della teoria delle proporzioni che ha esposto soltanto nel libro quinto. E la teoria di detto libro quinto viene, per dir così, recepita in pieno *nel libro sesto: essa è infatti particolarmente adatta allo scopo, perché i teoremi di geometria da trattare devono esser mostrati validi in ogni caso: indifferentemente per linee commensurabili o incommensurabili che siano. E tale è appunto la caratteristica della teoria di Eudosso, come si vede in particolare dalla celebre definizione (quinta del libro quinto) di grandezze che sono a due a due nello stesso rapporto, e che anzi accusa quasi lo sforzo fatto per comprendere i due casi in una unica definizione.*

Euclide, dunque, ha ora (per dir così) mano più libera: può servirsi di mezzi più potenti, poiché gli è possibile ora di fare intervenire, accanto all'uguaglianza di grandezza considerata nei primi quattro libri, anche l'uguaglianza di forma, cioè la similitudine. Il legame fra le due uguaglianze, ossia il legame fra teoria dell'equivalenza e teoria delle proporzioni è stabilito dalla proposizione VI, 16 (se quattro rette, cioè segmenti di retta, sono in proporzione, allora, e soltanto allora, il rettangolo dei medi è uguale, cioè equivalente, al rettangolo dei medi).

Attraverso questo teorema-ponte, si riesce a vedere che alcune proposizioni fondamentali di geometria basate sulle proporzioni tra linee, sono state già trattate nei primi libri senza far ricorso alle proporzioni stesse, ma fondando unicamente sull'uguaglianza (estensiva) delle figure.

Così, per esempio, la costruzione della quarta proporzionale dopo tre rette date (VI, 12):

$$a : b = c : x$$

è lo stesso problema che viene presentato nel libro primo come applicazione parabolica: *trovare l'altezza da assegnare ad un rettangolo di base data perché abbia area data:*

$$ax = bc$$

E la costruzione della media proporzionale tra due rette date (VI, 13):

$$a : x = x : b$$

equivale al problema finale del libro secondo (II, 14) che richiede di costruire il quadrato uguale (equivalente) ad un rettangolo dato:

$$x^2 = ab.$$

Anche il problema della costruzione della cosiddetta parte aurea di un segmento (dividere una retta *in due parti tali che il quadrato della maggiore sia* uguale *al rettangolo dell'intera* retta *e della parte residua), risolto nella II, 11:*

$$x^2 = a\,(a - x)$$

viene espresso nel linguaggio delle proporzioni come divisione di una retta *in estrema e media ragione, in modo cioè che la parte maggiore sia media proporzionale tra l'intera* retta *e la parte minore:*

$$a : x = x : (a - x).$$

Inoltre alcuni problemi trattati in un certo modo nei primi quattro libri vengono generalizzati nel libro sesto. Una tipica generalizzazione, rispetto al libro secondo, consiste nella sostituzione dell'angolo retto con l'angolo uguale ad un angolo dato qualsiasi. Già in quest'ordine di idee si era invero mosso Euclide per quanto riguarda l'applicazione parabolica: infatti nel libro primo (I, 44-45) il problema viene riferito ad un parallelogrammo con angoli dati, anziché a un rettangolo. Ma nel libro secondo (come s'è visto nella nota introduttiva a detto libro) viene considerato esclusivamente (o quasi) l'angolo retto.

Sicché i problemi di applicazione ellittica e iperbolica delle aree (ai quali, sia pure indirettamente, si riferiscono le proposizioni II, 5 e II, 6) vengono proposti con riferimento a rettangoli e quadrati (costruire un rettangolo, *soddisfacente a determinate condizioni, in difetto, o in eccesso, di un quadrato).*

Nel libro sesto, i problemi delle due applicazioni (ellittica e iperbolica) vengono effettivamente risolti, ma con riferimento a parallelogrammi aventi angoli dati e lati in proporzione, cioè

con una generalizzazione di carattere geometrico (se pure non di carattere aritmetico). Si tratta cioè di costruire, sotto particolari condizioni, parallelogrammi tali che manchino *o* eccedano *di un parallelogrammo simile ad un parallelogrammo dato (VI, 28 e 29). Se quest'ultimo è un quadrato, si ricade nei casi del libro secondo.*

Un'altra generalizzazione dello stesso genere si ha nel problema proposto nella VI, 25: costruire un poligono simile ad un poligono dato e uguale ad un altro poligono pure dato.

Si tratta della massima costrizione *alla quale un poligono possa, per dir così, venire assoggettato: non soltanto assumere una data grandezza, ma anche una data forma. L'importanza del problema fu riconosciuta già in antichi tempi; Plutarco infatti, nell'attribuirlo (quasi senza dubbio falsamente) a Pitagora riferisce che questi (come per il teorema sul triangolo rettangolo) avrebbe compiuto sacrifici agli dèi in segno di ringraziamento (cfr. ediz. di* ENRIQUES, *vol. II, p. 142).*

Il caso particolare trattato nei libri primo e secondo si riferisce al quadrato, anziché ad un poligono qualunque al quale quello da costruire debba esser simile. Si ha così il problema della quadratura *del poligono, del quale viene già iniziata la trattazione in alcune proposizioni del libro primo, e che viene condotto a finale compimento nella II, 14 (cfr. nota a detta prop.).*

Ora si è applicata alla geometria piana quella teoria delle proporzioni che tratta indifferentemente di grandezze commensurabili o incommensurabili. Come è evidente, è proprio una tale indifferenza *che si adatta alla geometria, anzi che per essa è indispensabile, dato che le proposizioni geometriche debbono riferirsi ad ambedue le possibilità.*

Euclide esce ora, nel séguito della sua opera, da una tale indifferenza, e quindi abbandona la geometria (alla quale tornerà soltanto a partire dal libro decimoprimo).

Egli si rivolge, quindi, nei libri settimo, ottavo e nono, al'aritmetica dei numeri interi, cioè si rivolge a particolari grandezze tutte commensurabili tra loro.

Nel libro decimo, invece, tratterà separatamente i due casi della commensurabilità e dell'incommensurabilità, e per quanto riguarda le rette (= segmenti di retta) approfondirà in modo minuzioso, e geniale al tempo stesso, il concetto di incommensurabilità.

A. F.

DEFINIZIONI[a]

I. Sono figure rettilinee[1] simili quante abbiano gli angoli, uno ad uno, rispettivamente uguali, e proporzionali i lati che comprendono gli angoli uguali.

a. Oltre alla I, III e IV vi sarebbero altre due definizioni, una II ed una V: quanto alla seconda essa non presenta veramente un significato intelligibile; Heiberg ne rileva e l'oscurità e il non esser mai usata da Euclide ed avanza l'ipotesi che sia stata presa da Erone, presso cui la leggiamo (cfr. *Litteraturgeschichtliche Studien über Euklid*, p. 190). La V poi, « Un rapporto si dice composto di altri rapporti, quando le quantità di tali rapporti (di nuovo αἱ τῶν λόγων πηλικότητες) moltiplicate fra loro ne danno un altro », anche se da Hultsch (art. « Eukleides » della Pauly-Wissowa) è considerata genuina, è da Heiberg ritenuta indubbiamente interpolata. Euclide non la usa mai, né vi è riferimento alcuno ad essa là dove per la prima volta (VI, 23) si parla di rapporto composto; non ve ne è traccia in Campano che traduce dall'arabo e quindi in arabo non l'ha trovata, i manoscritti non la assegnano tutti allo stesso luogo – ed è per di più incompleta e di dubbia utilità geometrica. Per Heiberg quindi non aveva torto Simson nel condannare la V come la II definizione (SIMSON, *op. cit.*, p. 387 e pp. 389-393); poiché il codice P la riporta solo in margine, egli ne inferisce che la interpolazione vada spostata forse anteriormente allo stesso Teone.

[1] Euclide ha già definito le figure *rettilinee* (σχήματα εὐθύγραμμα) all'inizio del libro primo (def. XIX). Si tratta delle figure che noi chiamiamo poligoni. Nella stessa def. XIX è tuttavia precisato che se una figura *rettilinea* ha tre lati essa si chiama *trilatera* (il nostro triangolo); se ne ha quattro si chiama *quadrilatera*, se ne ha più di quattro si chiama *multilatera*

III. Si dice che una retta risulta divisa in estrema e media ragione, quando tutta quanta la retta sta alla parte maggiore di essa come la parte maggiore sta a quella minore [2].

IV. In ogni figura, è altezza la perpendicolare condotta dal vertice sulla base.

(πολύπλευρα), termine che (riferito ai lati anziché agli angoli) corrisponde al nostro *poligono*.

Noi abbiamo scambiato assai spesso il termine *figura rettilinea* con quello *poligono*, tutte le volte che ci è sembrato non recasse ostacolo alla chiarezza.

[2] « Dividere una retta in estrema e media ragione » è la dicitura che esprime in termini di proporzione la costruzione di quella che i tardi posteri chiamarono *sezione aurea* di un segmento. Nel libro secondo (prop. 11) il problema è stato già risolto nell'ordine di idee dell'equivalenza dei poligoni (dividere un segmento di retta in modo tale che il quadrato di una delle parti sia equivalente al rettangolo compreso dall'intero segmento e dall'altra parte). La ripetizione, che qui si trova nella prop. 30, mostra appunto lo sforzo esercitato da Euclide nel libro secondo (come in taluno degli altri tra i primi libri) per trattare la maggior parte della materia geometrica senza far ricorso alla teoria delle proporzioni.

PROPOSIZIONI

PROPOSIZIONE I.

Triangoli e parallelogrammi che abbiano la stessa altezza[a] *stanno fra loro come le basi.*

Siano ABC, ACD [due] triangoli, ed $EACB$, $CAFD$ [due] parallelogrammi, aventi la stessa altezza AC[b]; dico che la base BC sta alla base CD come il triangolo ABC sta al triangolo ACD e come il parallelogrammo $EACB$ sta al parallelogrammo $CAFD$.

Infatti, prolungata da ambedue le parti la retta BD sino ai punti H, L, si pongano così quantesivoglia rette BG, GH uguali alla base BC, e quantesivoglia rette DK, KL

a. Letteralmente: « che siano sotto la stessa altezza », cioè che siano posti sotto altezza uguale.

b. Nel testo greco abbiamo appunto « sotto la stessa altezza AC », e troviamo una figura in cui il lato AC comune ai due triangoli è perpendicolare alle basi rispettive ed è quindi esso l'altezza in questione; ma è chiaro che due triangoli possono avere altezza uguale senza avere lati comuni, o anche avere un lato comune, ad es. AC, ma senza affatto che sia perpendicolare alle rispettive basi e sia quindi altezza. Teone ha eseguito in questo caso un miglioramento del testo, parlando di triangoli e parallelogrammi « che siano (ὄντα) sotto la stessa altezza (vale a dire, che abbiano altezza uguale), cioè la perpendicolare condotta da A a BD ». Heath (*op. cit.*, vol. II, p. 191) elimina addirittura AC e riporta la figura come normalmente usata. Euclide parla inoltre, dal punto di vista della simbologia, di parallelogrammi EC $(= EACB)$ e CF $(= CAFD)$; noi adoperiamo, in questa ed in altre occasioni, simili a quelle già viste nei Libri precedenti, o che di volta in volta annoteremo, simbologia più opportuna: avvisiamo anzi che sempre nei termini della Premessa, di ciò che abbiamo con minuzia fatto e segnato nei libri precedenti, e con le altre aggiunte che porremo in parentesi quadre, pur ripetendo magari per alcune la messa in parentesi già eseguita, ci riserviamo dal libro sesto in poi come già nel libro quinto una duttilità di traduzione che è necessaria.

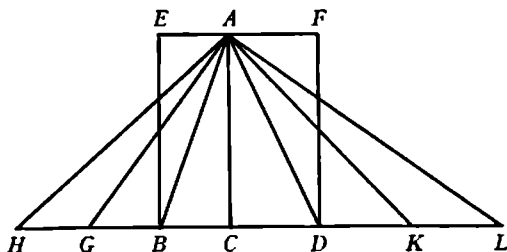
uguali alla base *CD*, e si traccino [infine] le congiungenti *AG*, *AH*, *AK*, *AL*.

Ora, poiché *CB*, *BG*, *GH* sono uguali fra loro, anche i triangoli *ABC*, *AGB*, *AHG*[a] sono uguali fra loro (I, 38). Quindi, la base *HC* è tante volte multipla della base *BC* quante volte è anche multiplo il triangolo *AHC* del triangolo *ABC*. Per la stessa ragione, la base *CL* è tante volte multipla della base *CD* quante volte è anche multiplo il triangolo *ALC* del triangolo *ACD*; e se la base *HC* è poi uguale alla base *CL*, pure il triangolo *AHC* è uguale al triangolo *ACL* (I, 38), se la base *HC* è maggiore della base *CL*, pure il triangolo *AHC* è maggiore del triangolo *ACL*, e se la base *HC* è minore, anche il triangolo *AHC* è minore. Date così quattro grandezze, le due basi *BC*, *CD* ed i due triangoli *ABC*, *ACD*, si sono prese altre grandezze equimultiple [qualunque] della base *BC* e del triangolo *ABC*, cioè la base *HC* ed il triangolo *AHC*, e ancora altre grandezze equimultiple qualunque della base *CD* e del triangolo *ACD*, cioè la base *CL* ed il triangolo *ACL*; ed è stato dimostrato che, se la base *HC* supera la base *CL*, anche il triangolo *AHC* supera il triangolo *ALC*, se *HC* è uguale a *CL*, corrispondentemente *AHC* è uguale ad *ALC*, e se *HC* è minore, *AHC* è minore; perciò la base *BC* sta alla base *CD* come il triangolo *ABC* sta al triangolo *ACD* (V, def. V).

E poiché il parallelogrammo *EACB* è il doppio del triangolo *ABC* (I, 41), mentre il parallelogrammo *CAFD* è il doppio del triangolo *ACD*, e due grandezze hanno fra loro lo stesso rapporto di due grandezze loro equimultiple (cioè, $A : B = mA : mB$) (V, 15), il triangolo *ABC* sta al triangolo *ACD* come il parallelogrammo *EACB* sta al parallelogrammo *CAFD*. Poiché dunque fu dimostrato che la base *BC* sta alla base *CD* come il triangolo *ABC* sta al triangolo *ACD*, e che il triangolo *ABC* sta al triangolo *ACD* come il parallelogrammo *EACB* sta al parallelogrammo *CAFD*, si

a. Come spesso capita, senza stretto rispetto dell'ordine, nel testo avremmo per es. « i triangoli *AHG*, *AGB*, *ABC* ».

ha pure che la base *BC* sta alla base *CD* come il parallelogrammo *EACB* sta al parallelogrammo *CAFD* (V, 11).

Dunque, triangoli e parallelogrammi che abbiano la stessa altezza... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 38, 41; V, 11, 15.

È APPLICATA IN: VI, 2, 14, 15, 19, 20, 23, 25; X, 19, 20, 21, lemma a X, 22, 23, 24, 25, 33, 35, 38, 41, 44, 47, lemma a 53, 54, 55, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 65, 71, 72, 75, 78, 79, 81, 84, 91, 92, 93, 94, 97, 99, 100, 102, 104, 110, 114; XI, 33, 34; XIII, 1, 2.

PROPOSIZIONE 2.

Se in un triangolo si conduce una retta parallela ad uno dei lati, essa divide proporzionalmente i [due altri] lati del triangolo; e se due lati[a] *di un triangolo sono divisi proporzionalmente, la retta che congiunge i punti di divisione sarà parallela al rimanente lato del triangolo.*

Infatti, nel triangolo *ABC* si conduca *DE* parallela ad uno dei lati, cioè a *BC*; dico che *BD* sta a *DA* come *CE* sta ad *EA*.

Si traccino difatti le congiungenti *BE*, *CD*.

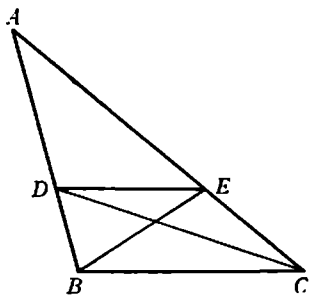
Il triangolo *BDE* è quindi uguale al triangolo *CDE* – essi difatti sono posti sulla stessa base *DE* e sono compresi fra le stesse parallele *DE*, *BC* (I, 37) –; consideriamo inoltre

a. Letteralmente: i lati.

il triangolo *ADE* come una terza grandezza[a]. Ma grandezze uguali hanno il medesimo rapporto rispetto ad una stessa grandezza (V, 7); perciò il triangolo *BDE* sta al triangolo *ADE* come il triangolo *CDE* sta al triangolo *ADE*. Ma il triangolo *BDE* sta al triangolo *ADE* come *BD* sta a *DA*: difatti i due triangoli *BDE*, *ADE*, avendo la stessa altezza, cioè la perpendicolare condotta da *E* su *AB*, stanno fra loro come le basi (VI, 1). Per la stessa ragione, $CDE : ADE = CE : EA$; quindi anche, [essendo *CDE* uguale a *BDE*, si ha:] $BD : DA = CE : EA$ (V, 11).

Ma sia adesso il caso in cui, nel triangolo *ABC*, i lati *AB*, *AC* siano stati divisi proporzionalmente, in modo che *BD* stia a *DA* come *CE* sta ad *EA*, e risulti tracciata la congiungente *DE*; dico che *DE* è parallela a *BC*.

Infatti, eseguita la medesima costruzione, poiché [per ipotesi] $BD : DA = CE : EA$, ma $BD : DA = BDE : ADE$, mentre $CE : EA = CDE : ADE$ (VI, 1), si ha anche che il triangolo *BDE* sta al triangolo *ADE* come il triangolo *CDE* sta al triangolo *ADE* (V, 11). Ciascuno dei due triangoli *BDE*, *CDE* ha perciò il medesimo rapporto rispetto al triangolo *ADE*. Quindi il triangolo *BDE* è uguale al triangolo *CDE* (V, 9); ed essi sono posti sulla stessa base *DE*. Ma triangoli uguali che siano posti sulla stessa base sono anche compresi fra le stesse parallele (I, 39). Perciò *DE* è parallela a *BC*.

Dunque, se in un triangolo si conduce una retta parallela ad uno dei lati... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 38, 39; V, 7, 9, 11; VI, 1.

È APPLICATA IN: VI, 3, 4, 9, 10, 11, 12, 24; XI, 17, 23; XII, 13, 17.

a. Letteralmente: ed il triangolo *ADE* è un'altra grandezza qualsiasi.

PROPOSIZIONE 3.

Se in un triangolo un angolo venne diviso per metà, e la retta che divide l'angolo divide anche la base, le parti nelle quali viene divisa la base [a] *avranno lo stesso rapporto che i rimanenti due lati del triangolo; e se le parti nelle quali la base [di un triangolo] viene divisa hanno lo stesso rapporto che i due rimanenti lati del triangolo, la retta che congiunge il vertice col punto di divisione dividerà per metà l'angolo del triangolo.*

Sia ABC un triangolo, e l'angolo BAC sia diviso per metà dalla retta AD; dico che BD sta a DC come AB sta ad AC [$BD : DC = AB : AC$].

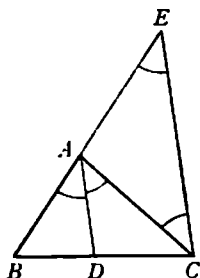
Infatti, si conduca per C la retta CE parallela ad AD, e si prolunghi AB sino ad incontrarsi con essa in E (post. V).

Ora, poiché la retta AC cade sulle parallele AD, EC, l'angolo ACE è uguale all'angolo CAD (I, 29). Ma l'angolo CAD è per ipotesi uguale all'angolo BAD; anche gli angoli BAD, ACE sono perciò uguali. Di nuovo, poiché la retta BAE cade sulle parallele AD, EC, l'angolo esterno BAD è uguale all'angolo interno [corrispondente] AEC (I, 29). Ma fu dimostrato che pure l'angolo ACE è uguale all'angolo BAD; quindi anche gli angoli ACE, AEC sono uguali, cosicché pure il lato AE è uguale al lato AC (I, 6). E poiché nel triangolo BCE è stata condotta AD parallela ad uno dei lati, cioè ad EC, si ha la proporzione $BD : DC = BA : AE$ (VI, 2). Ma AE è uguale ad AC; quindi $BD : DC = BA : AC$.

Ma sia adesso il caso in cui BA stia ad AC come BD sta a DC [$BA : AC = BD : DC$], e si tracci la congiungente AD; dico che l'angolo BAC è stato diviso per metà dalla retta AD.

Infatti, eseguita la medesima costruzione, poiché [per ipotesi] $BD : DC = BA : AC$, ma, anche, $BD : DC = BA : AE$ – e difatti nel triangolo BCE la AD risulta parallela ad uno dei lati, ossia ad EC (VI, 2) –, si ha anche

a. Letteralmente: le parti della base (cioè: successive alla divisione).

che $BA : AC = BA : AE$ (V, 11). Quindi AC è uguale ad AE (V, 9), cosicché pure l'angolo AEC è uguale all'angolo ACE (I, 5). Ma l'angolo AEC è uguale all'angolo esterno [corrispondente] BAD (I, 29), mentre l'angolo ACE è uguale all'angolo alterno CAD (id.); perciò anche gli angoli BAD, DAC sono uguali. L'angolo BAC è stato quindi diviso per metà dalla retta AD.

Dunque, se in un triangolo un angolo venne diviso per metà... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

Applica: I, post. V, 5, 6, 17, 29, 31; V, 9, 11; VI, 2.

Proposizione 4.

Nei triangoli aventi gli angoli rispettivamente uguali[a] *i lati che comprendono gli angoli uguali sono proporzionali, essendo omologhi (cioè, corrispondentisi) quelli opposti agli angoli uguali.*

Siano ABC, DCE triangoli aventi gli angoli rispettivamente uguali, cioè aventi uguali l'angolo ABC all'angolo DCE, l'angolo BAC all'angolo CDE, ed infine l'angolo ACB all'angolo CED; dico che nei triangoli ABC, DCE i lati comprendenti gli angoli uguali sono proporzionali, corrispondendosi (cioè, essendo *omologhi*) quelli opposti agli angoli uguali.

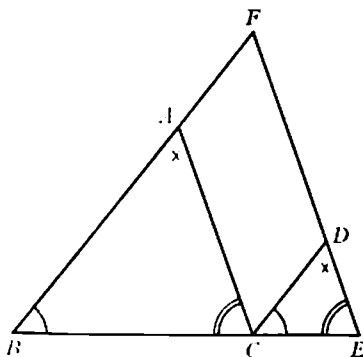
Infatti, si ponga BC in linea retta con CE. Ora, poiché la somma degli angoli ABC, ACB è minore di due retti (I, 17), e l'angolo ACB è uguale all'angolo DEC, la somma di ABC, DEC è minore di due retti; BA, ED quindi, se

a. Letteralmente: « Nei triangoli equiangoli ». Useremo spesso la clausola qui adottata, sempre per facilitare la comprensione.

prolungate, si incontreranno (post. V). Risultino esse prolungate e si incontrino in F.

E poiché l'angolo DCE è uguale all'angolo ABC, si ha che BF è parallela a CD (I, 28). Di nuovo, poiché l'angolo ACB è uguale all'angolo DEC, è parallela AC a FE (id.). Quindi $FACD$ è un parallelogrammo; FA è perciò uguale a DC, ed AC è uguale a FD (I, 34). E poiché nel triangolo FBE risulta che AC è condotta parallela ad uno dei lati, cioè a FE, si ha che $BA : AF = BC : CE$ (VI, 2). Ma AF è uguale a CD; quindi $BA : CD = BC : CE$, e, *permutando*: $BA : BC = CD : CE$ (V, 16). Di nuovo, poiché CD è parallela a BF, si ha: $BC : CE = FD : DE$ (VI, 2). Ma FD è uguale ad AC, per cui $BC : CE = AC : DE$, e, *permutando*: $BC : AC = CE : DE$ (V, 16). Poiché dunque fu dimostrato che $BA : BC = CD : CE$, e che $BC : AC = CE : DE$, si ha, *ex aequo*, che $BA : AC = CD : DE$ (V, 22).

$$\begin{matrix} BA & BC & AC \\ CD & CE & DE \end{matrix}$$

Dunque, nei triangoli aventi gli angoli rispettivamente uguali... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, post. V, 17, 28, 34; V, 16, 22; VI, 2.
È APPLICATA IN: VI, 5, 6, 7, 8, 18, 20, 24, lemma a X, 33; XI, 23; XII, 1, 3; XIII, 8, 10, 11.

PROPOSIZIONE 5.

Se due triangoli hanno i lati proporzionali, i triangoli saranno fra loro equiangoli ed avranno [rispettivamente] uguali gli angoli opposti ai lati omologhi, cioè ai lati che si corrispondono nella proporzione[1].

Siano ABC, DEF due triangoli aventi i lati proporzionali, in modo che AB stia a BC come DE sta ad EF, che BC stia a CA come EF sta a FD, ed infine che AB stia a CA come DE sta a FD[, cioè in modo che valgano le proporzioni: $AB : BC = DE : EF$; $BC : CA = EF : FD$; $AB : : CA = DE : FD$]. Dico che il triangolo ABC ha gli angoli rispettivamente uguali a quelli del triangolo DEF e che nei due triangoli saranno uguali gli angoli opposti ai lati omologhi, cioè l'angolo ABC uguale all'angolo DEF, quello BCA uguale a quello EFD, ed infine BAC uguale ad EDF.

Infatti, si costruiscano sulla retta EF, e con vertici rispettivamente nei suoi punti E, F, l'angolo FEG uguale all'angolo ABC, e l'angolo EFG uguale all'angolo ACB (I, 23); il rimanente angolo in A è perciò uguale al rimanente angolo in G (I, 32).

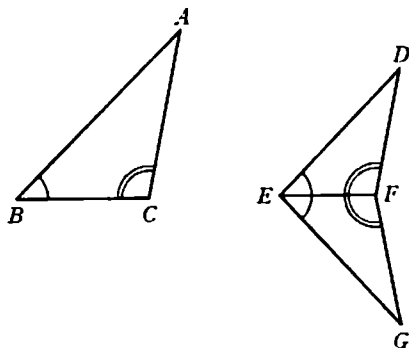
Il triangolo ABC ha quindi gli angoli rispettivamente uguali a quelli del triangolo GEF. Perciò nei triangoli ABC, GEF i lati comprendenti gli angoli uguali sono proporzionali, corrispondendosi quelli opposti agli angoli uguali (VI, 4); quindi $AB : BC = GE : EF$. Ma [per ipotesi:] $AB : BC = = DE : EF$, per cui si ha: $DE : EF = GE : EF$ (V, 11).

[1] Nelle proposizioni 4 e 5 si mostra che per i *triangoli* l'uguaglianza rispettiva dei tre angoli porta come conseguenza la proporzionalità tra i lati, e inversamente.

La definizione prima del libro sesto si dimostra dunque sovrabbondante per i triangoli, bastando che si verifichi una delle condizioni perché automaticamente si verifichi l'altra.

Nella seguente proposizione 6 si dà poi un altro criterio di similitudine (uguaglianza di un solo angolo ad un angolo, e proporzionalità tra i lati comprendenti gli angoli uguali). Va osservato che le dimostrazioni dei tre *criteri di similitudine* si servono del quinto postulato: appunto Wallis ricondusse detto postulato sostanzialmente all'affermazione dell'esistenza di figure simili.

Ciascuna delle due rette *DE*, *GE* ha quindi il medesimo rapporto rispetto ad *EF*, sicché *DE* è uguale a *GE* (V, 9). Per la stessa ragione, anche *DF* è uguale a *GF*. Poiché dunque *DE* è uguale ad *EG*, ed *EF* è comune, i due lati *DE*, *EF* sono uguali ai due lati *GE*, *EF*; e la base *DF* è uguale alla base *FG*; l'angolo *DEF* è quindi uguale all'angolo *GEF* (I, 8), il triangolo *DEF* è uguale al triangolo *GEF*, e gli angoli rimanenti del primo, ossia quelli opposti ai lati uguali, sono uguali ai rispettivi angoli rimanenti del secondo (I, 4). Perciò sono uguali pure l'angolo *DFE* all'angolo *GFE*, e l'angolo *EDF* all'angolo *EGF*. Ora, poiché l'angolo *DEF* è uguale all'angolo *GEF*, ma l'angolo *GEF* è uguale all'angolo *ABC*, anche gli angoli *ABC*, *DEF* sono uguali. Per la stessa ragione, pure l'angolo *ACB* è uguale all'angolo *DFE*, ed infine l'angolo in *A* è uguale all'angolo in *D*; il triangolo *ABC* ha quindi i suoi angoli rispettivamente uguali a quelli del triangolo *DEF*.

Dunque, se due triangoli hanno i lati proporzionali... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 4, 8, 23, 32; V, 9, 11; VI, 4.

PROPOSIZIONE 6.

Se due triangoli hanno [rispettivamente] un angolo uguale ad un angolo[a], *e proporzionali i lati comprendenti i due angoli*

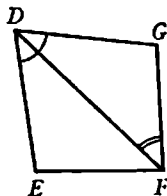
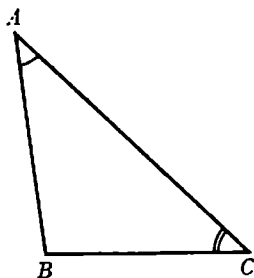
a. Cioè, un angolo dell'uno uguale ad un angolo dell'altro, in quanto presi in considerazione attuale; abbiamo posto quindi l'avverbio *rispettivamente*, ed in séguito lo useremo senza più darne avviso, in questo ed in casi similari.

uguali, i triangoli saranno fra loro equiangoli: avranno cioè rispettivamente uguali gli angoli opposti ai lati omologhi.

Siano *ABC*, *DEF* due triangoli aventi rispettivamente un angolo, cioè *BAC*, uguale ad un angolo, *EDF*, e proporzionali i lati comprendenti i due angoli uguali, in modo che *BA* stia ad *AC* come *ED* sta a *DF* [$BA : AC = ED : DF$]; dico che il triangolo *ABC* ha gli angoli rispettivamente uguali a quelli del triangolo *DEF*, e che avrà cioè l'angolo *ABC* uguale all'angolo *DEF*, e l'angolo *ACB* uguale all'angolo *DFE*.

Infatti, si costruiscano sulla retta *DF*, e rispettivamente coi vertici nei suoi punti *D*, *F*, l'angolo *FDG* uguale all'uno o all'altro indifferentemente degli angoli *BAC*, *EDF*, e l'angolo *DFG* uguale all'angolo *ACB* (I, 23); quindi il rimanente angolo in *B* [del primo triangolo dato] è uguale al rimanente angolo in *G* [del triangolo costruito] (I, 32).

Il triangolo *ABC* ha perciò gli angoli rispettivamente uguali a quelli del triangolo *DFG*. Si ha quindi la proporzione: $BA : AC = GD : DF$ (VI, 4). Ma anche, per ipotesi, $BA : AC = ED : DF$; quindi anche, $ED : DF = GD : DF$ (V, 11). Perciò *ED* è uguale a *GD* (V, 9), e *DF* è comune [ai due triangoli *DEF*, *DGF*], sicché i due lati *ED*, *DF* sono uguali ai due lati *GD*, *DF*; e l'angolo *EDF* è uguale all'angolo *GDF*; la base *EF* è quindi uguale alla base *GF*, il triangolo *DEF* è uguale al triangolo *DGF*, e gli angoli rimanenti del primo, ossia quelli opposti ai lati uguali, saranno uguali ai rispettivi angoli rimanenti del secondo (I, 4). L'angolo *DFG* è così uguale all'angolo *DFE*, e l'angolo *DGF* è uguale all'angolo *DEF*. Ma l'angolo *DFG* è uguale all'angolo *ACB*, per cui anche gli angoli *ACB*, *DFE* sono fra loro uguali. Ma, per ipotesi, sono uguali pure gli angoli *BAC*, *EDF*; quindi anche il rimanente angolo in *B* [del triangolo dato *ABC*] è uguale al rimanente angolo in *E* [dell'altro] (I, 32); il triangolo *ABC* ha perciò tutti gli angoli rispettivamente uguali a quelli del triangolo *DEF*.

Dunque, se due triangoli hanno rispettivamente un angolo uguale ad un angolo... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 4, 23, 32; V, 9, 11; VI, 4.

È APPLICATA IN: VI, 20, 32; XII, 1, 4, 12; XIII, 18.

PROPOSIZIONE 7.

Se due triangoli hanno rispettivamente un angolo uguale ad un angolo, proporzionali i lati comprendenti un'altra coppia di angoli, ed i rimanenti [terzi] angoli o tutti e due minori, oppure ambedue non minori di un angolo retto, i triangoli saranno fra loro equiangoli: avranno cioè rispettivamente uguali gli angoli compresi fra lati proporzionali [2].

Siano ABC, DEF due triangoli aventi rispettivamente un angolo uguale ad un angolo, cioè BAC uguale ad EDF, proporzionali i lati che comprendono gli angoli ABC, DEF, in modo che AB stia a BC come DE sta ad EF [$AB : BC = DE : EF$], e, dapprima, i rispettivi rimanenti angoli in C, F minori tutti e due di un retto; dico che il triangolo ABC è equiangolo rispetto al triangolo DEF, [cioè ha tutti gli angoli ordinatamente uguali a quelli del triangolo DEF, ossia] che l'angolo ABC sarà uguale all'angolo DEF, e che evidentemente il rimanente angolo in C del primo triangolo sarà uguale al rimanente angolo in F del secondo.

Infatti, se l'angolo ABC fosse disuguale rispetto all'angolo DEF, uno di essi sarebbe maggiore. Sia maggiore ABC.

[2] È, questo, il cosiddetto *caso ambiguo* della similitudine dei triangoli. Euclide non ha, invece, considerato nel libro primo il caso *ambiguo* corrispondente per l'uguaglianza.

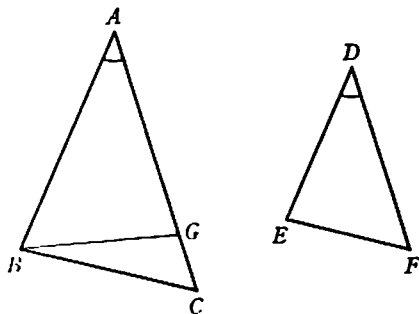
Sulla retta AB, e con vertice nel punto B di essa, si costruisca allora l'angolo ABG uguale all'angolo DEF (I, 23).

Poiché adesso l'angolo A è uguale [per ipotesi] all'angolo D, ed ABG è uguale a DEF [per costruzione], l'angolo rimanente AGB del primo triangolo è uguale all'angolo rimanente DFE del secondo (I, 32). Il triangolo ABG ha quindi i suoi angoli rispettivamente uguali a quelli del triangolo DEF. Perciò $AB : BG = DE : EF$ (VI, 4). Ma, per ipotesi, $DE : EF = AB : BC$; quindi [$AB : BG = AB : BC$, ed] AB ha lo stesso rapporto rispetto a ciascuna delle due rette BC, BG (V, 11); perciò BG è uguale a BC (V, 9). Cosicché si ha pure che l'angolo in C è uguale all'angolo BGC (I, 5). Ma per ipotesi l'angolo in C è minore di un retto; anche l'angolo BGC è quindi minore di un retto, cosicché l'angolo AGB ad esso adiacente è maggiore di un retto (I, 13). E fu dimostrato che esso è uguale all'angolo in F; pure l'angolo in F è perciò in tal caso maggiore di un retto. Ma esso è per ipotesi minore di un retto: il che è assurdo. L'angolo ABC non è quindi disuguale rispetto all'angolo DEF, ed è perciò uguale ad esso. Ma è uguale anche l'angolo in A all'angolo in D, per cui pure il rimanente angolo in C del primo triangolo è uguale al rimanente angolo in F del secondo (I, 32). Dunque, il triangolo ABC è equiangolo rispetto al triangolo DEF[, ossia ha i suoi tre angoli rispettivamente uguali a quelli del triangolo DEF].

Ma, di nuovo, sia adesso il caso in cui ciascuno dei due angoli in C, F sia per ipotesi non minore di un retto; dico nuovamente che, pure in tal caso, il triangolo ABC ha tutti gli angoli rispettivamente uguali a quelli del triangolo DEF.

Infatti, eseguita la medesima costruzione, potremo similmente dimostrare che BC è uguale a BG; cosicché ancora l'angolo in C è uguale all'angolo BGC (I, 5). Ma l'angolo in C non è minore di un retto, per cui anche BGC non è minore di un retto. Nel triangolo BGC, la somma di due angoli sarebbe così non minore di due retti: il che è impossibile (I, 17). Quindi, di nuovo, l'angolo ABC non è disuguale rispetto all'angolo DEF, ed è perciò uguale ad esso. Ma è uguale anche l'angolo in A all'angolo in D; il rima-

nente angolo in C del primo triangolo è quindi uguale al rimanente angolo in F del secondo (I, 32). Il triangolo ABC è perciò equiangolo rispetto al triangolo DEF[, ossia ha i suoi tre angoli rispettivamente uguali a quelli di DEF].

Dunque, se due triangoli hanno rispettivamente un angolo uguale ad un angolo... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 5, 13, 17, 23, 32; V, 9, 11; VI, 4.

È APPLICATA IN: VI, 20, 32; XII, 1, 4, 12; XIII, 18.

PROPOSIZIONE 8.

Se in un triangolo rettangolo si conduce la perpendicolare dall'angolo retto sulla base, la stessa perpendicolare divide il triangolo in due triangoli simili[a] *a tutto quanto il triangolo e fra loro*[3].

Sia ABC un triangolo rettangolo avente l'angolo BAC retto, e si conduca da A su BC la perpendicolare AD; dico

a. Letteralmente: i triangoli alla perpendicolare sono simili.

[3] Dalla similitudine fra il triangolo rettangolo *totale* e ciascuno dei due triangoli nei quali l'altezza lo divide, si può ricavare il cosiddetto teorema di Euclide, e quindi il teorema di Pitagora applicando la seguente VI, 16 (rettangolo dei medi equivalente al rettangolo degli estremi, se quattro segmenti sono in proporzione). Infatti ciascun cateto risulta medio proporzionale tra l'ipotenusa e la parte corrispondente dell'ipotenusa stessa, sicché il quadrato di un cateto equivale al rettangolo dell'ipotenusa e di quella *parte* dell'ipotenusa (proiezione del cateto sull'ipotenusa). Basta addizionare i quadrati dei due cateti ed i due rettangoli (che insieme dànno il quadrato dell'ipotenusa) per giungere al teorema di Pitagora.

È stata anzi anche formulata l'ipotesi che questa via abbia offerto una prima dimostrazione dello stesso teorema di Pitagora: dimostrazione

che ciascuno dei due triangoli *ABD*, *ADC* è simile a tutto quanto il triangolo *ABC*, e che essi sono inoltre simili fra loro.

Infatti, poiché l'angolo *BAC* è uguale all'angolo *ADB* – difatti ciascuno di essi è retto –, e l'angolo in *B* è comune ai due triangoli *ABC* ed *ABD*, il rimanente angolo *ACB* del primo triangolo è uguale al rimanente angolo *BAD* del secondo (I, 32); il triangolo *ABC* ha così tutti gli angoli rispettivamente uguali a quelli del triangolo *ABD*. Quindi *BC*, che nel triangolo *ABC* è lato opposto all'angolo retto, sta ad *AB*, che nel triangolo *ABD* è opposto all'angolo retto, come lo stesso lato *AB*, che nel triangolo *ABC* è opposto all'angolo in *C*, sta a *BD*, che nel triangolo *ABD* è opposto all'angolo uguale *BAD*, e come infine *AC* sta ad *AD*, che è opposto[, come *AC*,] all'angolo in *B* comune ai due triangoli[, ossia: $BC : AB = AB : BD = AC : AD$] (VI, 4). Il triangolo *ABC* ha quindi i suoi angoli rispettivamente uguali a quelli del triangolo *ABD* ed i due triangoli hanno, insieme, proporzionali i lati comprendenti gli angoli uguali. Perciò il triangolo *ABC* è simile al triangolo *ABD* (VI, def. I). Similmente potremo dimostrare che il triangolo *ABC* è simile anche al triangolo *ADC*, per cui ciascuno dei due triangoli *ABD*, *ADC* è simile a tutto quanto il triangolo *ABC*.

Dico adesso che i triangoli *ABD*, *ADC* sono simili anche fra loro.

Infatti, poiché l'angolo retto *BDA* è uguale all'angolo retto *ADC*, ma fu tuttavia anche dimostrato che l'angolo *BAD* è uguale all'angolo in *C*, pure il rimanente angolo in *B* del primo triangolo è uguale al rimanente angolo *DAC* del secondo (I, 32); il triangolo *ABD* ha quindi i suoi angoli

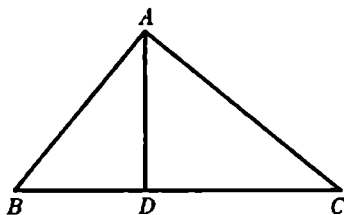
che, tuttavia, divenne rigorosa soltanto quando, con Eudosso di Cnido, la teoria delle proporzioni fu valida anche nel caso delle linee incommensurabili.

Dopo che è stata esposta nel libro quinto la teoria delle proporzioni in questione, Euclide ha ben diritto di servirsene per dimostrare in sostanza il teorema di Pitagora in questa proposizione del libro sesto. Ciò tanto più che egli ha già fornito (e forse egli stesso ha ideato) la dimostrazione dello stesso teorema indipendentemente dalle proporzioni ma fondando solo sulla teoria dell'equivalenza, nella prop. 47 del libro primo.

rispettivamente uguali a quelli del triangolo ADC. Perciò BD, che nel triangolo ABD è lato opposto all'angolo BAD, sta ad AD, che nel triangolo ADC è opposto all'angolo in C uguale all'angolo BAD, come lo stesso lato AD, che nel triangolo ABD è opposto all'angolo in B, sta a DC, che nel triangolo ADC è opposto all'angolo DAC uguale all'angolo in B, e come infine BA sta ad AC, quei lati cioè che sono opposti agli angoli retti[, ossia: $BD : AD = AD : DC = BA : AC$] (VI, 4); il triangolo ABD è quindi simile al triangolo ADC (VI, def. I).

Dunque, se in un triangolo rettangolo si conduce una perpendicolare... (secondo l'enunciato).

APPLICA: I, 32; VI, 4.

È APPLICATA IN: VI, 31; X, 32 lemma; XIII, 15, 16, 18.

COROLLARIO.

È da ciò evidente che, se in un triangolo rettangolo si conduce la perpendicolare dall'angolo retto sulla base, la retta così condotta è media proporzionale fra le parti nelle quali essa divide la base [a]. – C.D.D.

È APPLICATO IN: VI, 13; X, 32 coroll.; XII, 17; XIII, 13.

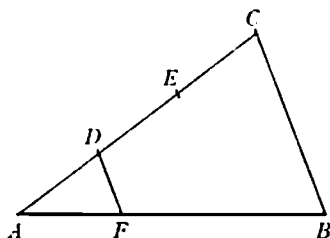
PROPOSIZIONE 9.

Togliere da una retta data una [qualunque] parte assegnata.

Sia AB la retta data; si deve dunque togliere da AB una parte assegnata qualunque.

a. Letteralmente: fra le parti della base.

Si assegni[, per esempio, che si debba togliere] la terza parte. Si conduca allora, partendo da A, una retta AC che comprenda con AB un angolo a caso, si prenda su AC un punto a piacere D, e si pongano DE, EC uguali ad AD (I, 3), si tracci la congiungente BC, e per D si conduca DF ad essa parallela (I, 31).

Poiché dunque, nel triangolo ABC, è stata condotta FD parallela ad uno dei lati, cioè a BC, si ha la proporzione: $CD : DA = BF : FA$ (VI, 2). Ma CD è doppia di DA; anche BF è quindi doppia di FA; perciò AB è tripla di AF.

Dunque, dalla retta data AB è stata tolta la terza parte assegnata AF. - C.D.F.

APPLICA: I, 3, 31; VI, 2.

PROPOSIZIONE 10.

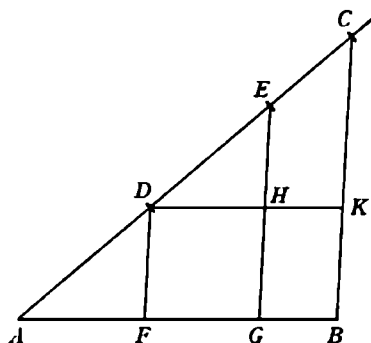
Dividere una retta data, ed indivisa, in parti proporzionali e similmente disposte rispetto a quelle di un'altra retta data, già divisa [in parti].

Sia AB la retta indivisa data, AC la retta divisa nei punti D, E, e si pongano le rette in modo da comprendere un angolo qualsiasi; si tracci la congiungente CB, si conducano per D, E le rette DF, EG parallele a CB, ed inoltre per D si conduca DHK parallela ad AB (I, 31). Ciascuna delle due figure $FDHG$, $GHKB$ è quindi un parallelogrammo; perciò DH è uguale a FG, mentre HK è uguale a GB (I, 34). Ora, poiché nel triangolo DKC la retta EH è stata condotta parallela ad uno dei lati, cioè al lato CK, si ha la proporzione: $CE : ED = KH : HD$ (VI, 2). Ma KH è uguale a BG, mentre HD è uguale a GF; quindi $CE : ED = BG : GF$. Di nuovo, poiché nel triangolo AGE è stata condotta FD parallela ad uno dei lati, cioè al lato GE, si ha così la proporzione: $ED : DA = GF : FA$ (VI, 2). Ma fu anche dimostrato

che $CE : ED = BG : GF$; perciò CE sta ad ED come BG sta a GF, ed ED sta a DA come GF sta a FA.

Dunque, la retta indivisa data AB è stata divisa in parti proporzionali e similmente disposte rispetto a quelle della retta divisa data AC. – C.D.F.

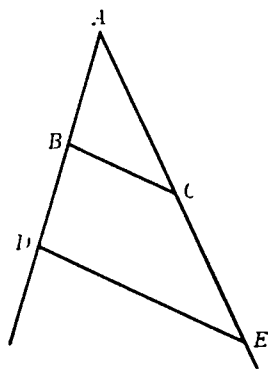
APPLICA: I, 31, 34; VI, 2.

È APPLICATA IN: XIII, 13, 15, 16.

PROPOSIZIONE 11.

Date due rette, trovare [dopo di esse] la terza proporzionale.

Siano AB, AC le due rette date e si pongano esse in modo da comprendere un angolo qualsiasi. Si deve dunque trovare la terza proporzionale dopo AB, AC. Infatti, si prolunghino AB, AC e si ponga BD uguale ad AC (I, 3), si tracci la congiungente BC, e per D si conduca DE ad essa parallela (I, 31).

Poiché dunque, nel triangolo ADE, la retta BC risulta condotta parallela ad uno dei lati, cioè a DE, si ha la proporzione: $AB : BD = AC : CE$ (VI, 2). Ma BD è uguale ad AC; quindi AB sta ad AC come AC sta a CE.

Dunque, date le due rette AB, AC, è stata trovata la terza proporzionale CE dopo di esse [a]. – C.D.F.

APPLICA: I, 3, 31; VI, 2.

È APPLICATA IN: VI, 19, 22; X, 96.

a. Letteralmente: ad esse, rispetto ad esse.

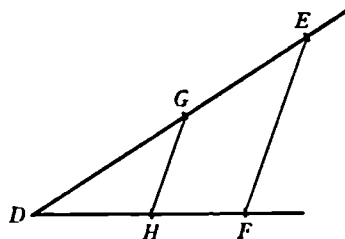
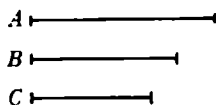
PROPOSIZIONE 12.

Date tre rette, trovare la quarta proporzionale dopo di esse[4].

Siano A, B, C le tre rette date; si deve dunque trovare la quarta proporzionale dopo A, B, C.

Si assumano le due rette DE, DF tali da comprendere un angolo qualsiasi EDF, si ponga DG uguale ad A, si pongano GE uguale a B, ed ancora DH uguale a C, e, tracciata la congiungente GH, si conduca per E la retta EF ad essa parallela (I, 31).

Poiché dunque, nel triangolo DEF, la retta GH risulta condotta parallela ad uno dei lati, cioè ad EF, si ha: $DG : GE = DH : HF$ (VI, 2). Ma DG è uguale ad A, mentre GE è uguale a B, e DH è uguale a C; perciò A sta a B come C sta a HF.

Dunque, date le tre rette A, B, C, è stata trovata la quarta proporzionale HF [dopo di esse]. - C.D.F.

APPLICA: I, 31; VI, 2.

È APPLICATA IN: VI, 22, 23; X, 27, 28, 31, 32, 104; XI, 27.

[4] Il problema della costruzione della quarta proporzionale dopo tre rette date equivale a quello dell'applicazione parabolica delle aree, che è stato risolto, naturalmente senza far ricorso alle proporzioni, nel libro primo (prop. 44-45). Infatti, determinare l'altezza x di un rettangolo di base a, avente l'area data $b\,c$, ossia risolvere l'equazione $ax = bc$, equivale, in base alla VI, 16, alla determinazione della quarta proporzionale x dopo tre rette a b c: $a : b = c : x$.

PROPOSIZIONE 13.

Date due rette, trovare [fra esse] la media proporzionale[5].

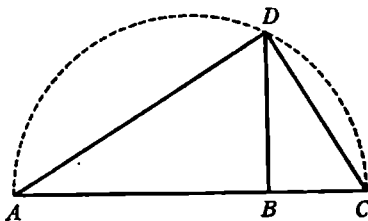
Siano AB, BC le due rette date; si deve dunque trovare la media proporzionale fra AB, BC.

Si pongano in linea retta fra loro, e su AC si descriva il semicerchio ADC, dal punto B si conduca la retta BD perpendicolare alla retta AC, e si traccino le congiungenti AD, DC.

Poiché l'angolo ADC è un angolo in un semicerchio, esso è retto (III, 31). E poiché nel triangolo rettangolo ADC è stata condotta dal vertice dell'angolo retto[a] la perpendicolare DB sulla base, si ha che DB è media proporzionale fra le parti AB, BC della base (VI, 8 coroll.).

Dunque, date le due rette AB, BC, è stata trovata la media proporzionale DB fra esse. – C.D.F.

APPLICA: I, 3, 11; III, 31; VI, 8 coroll.

È APPLICATA IN: VI, 25; X, 6 coroll., 10, 27, 28, 31, 32.

a. Letteralmente: dall'angolo retto.

[5] Va ricordato che la costruzione della media proporzionale x tra due rette a b ($a : x = x : b$) equivale, in base alla VI, 16, alla costruzione di un quadrato equivalente ad un rettangolo dato ($x^2 = ab$). E quest'ultimo problema è stato già risolto da Euclide nel libro secondo (prop. 14) indipendentemente dalle proporzioni. La costruzione della citata II, 14 acquista particolare luce di raffinata eleganza geometrica se si pone mente al fatto che le due costruzioni (della II, 14 e di questa VI, 13) sono sostanzialmente identiche, pur partendo da utilizzazione di mezzi di diversa natura.

PROPOSIZIONE 14.

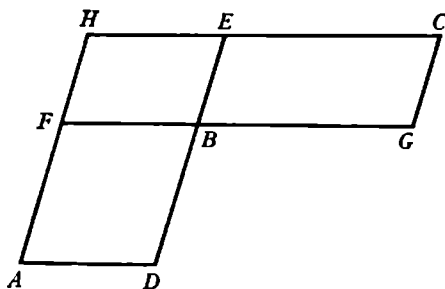
Nei parallelogrammi uguali [cioè, se due parallelogrammi sono equivalenti] ed aventi gli angoli rispettivamente uguali, i lati intorno agli angoli uguali sono inversamente proporzionali; e quei parallelogrammi sono uguali [cioè, due parallelogrammi sono equivalenti] che abbiano gli angoli rispettivamente uguali, ed i cui lati intorno agli angoli uguali siano inoltre inversamente proporzionali.

Siano *ADBF*, *BGCE* [due] parallelogrammi uguali [= equivalenti] ed aventi gli angoli rispettivamente uguali, che abbiano [ad esempio] uguali gli angoli in *B*, e si pongano i lati *DB*, *BE* in linea retta; anche *FB*, *BG* sono quindi in linea retta (I, 14). Dico che in *ADBF*, *BGCE* i lati intorno agli angoli uguali sono inversamente proporzionali, vale a dire che *DB* sta a *BE* come *BG* sta a *FB* [$DB : BE = BG : FB$].

Infatti, si completi il parallelogrammo *FBEH*. Poiché dunque il parallelogrammo *ADBF* è uguale al parallelogrammo *BGCE*, e *FBEH* è un'altra qualsiasi grandezza [omogenea] si ha che $ADBF : FBEH = BGCE : FBEH$ (V, 7). Ma $ADBF : FBEH = DB : BE$ (VI, 1), mentre $BGCE :$ $: FBEH = BG : FB$ (id.); quindi anche, $DB : BE = BG : FB$ (V, 11). Dunque, nei parallelogrammi *ADBF*, *BGCE* i lati intorno agli angoli uguali sono inversamente proporzionali.

Ma sia adesso il caso in cui [per ipotesi sia:] $DB : BE =$ $= BG : FB$[, e siano rispettivamente uguali gli angoli]; dico che il parallelogrammo *ADBF* è uguale [equivalente] al parallelogrammo *BGCE*.

Infatti, poiché *DB* sta a *BE* come *BG* sta a *FB*, ma *DB* sta a *BE* come il parallelogrammo *ADBF* sta al parallelogrammo *FBEH* (VI, 1), mentre *BG* sta a *FB* come il parallelogrammo *BGCE* sta al parallelogrammo *FBEH* (VI, 1), si ha anche: $ADBF : FBEH = BGCE : FBEH$ (V, 11); il parallelogrammo *ADBF* è quindi uguale al parallelogrammo *BGCE* (V, 9).

Dunque, nei parallelogrammi uguali... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 14; V, 7, 9, 11; VI, 1.

È APPLICATA IN: VI, 16, 30; X, 22; XI, 31, 33, 36.

PROPOSIZIONE 15.

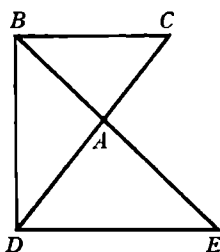
In triangoli uguali [= *equivalenti*] *e che abbiano rispettivamente un angolo uguale ad un angolo, i lati intorno agli angoli uguali sono inversamente proporzionali; e quei triangoli che abbiano rispettivamente un angolo uguale ad un angolo ed i cui lati intorno agli angoli uguali siano inversamente proporzionali, sono uguali* [= *equivalenti*].

Siano ABC, ADE triangoli uguali che abbiano rispettivamente un angolo uguale ad un angolo, cioè [ad esempio] l'angolo BAC uguale all'angolo DAE; dico che nei triangoli ABC, ADE i lati intorno agli angoli uguali sono inversamente proporzionali, vale a dire che AC sta ad AD come AE sta ad AB [$AC : AD = AE : AB$].

Infatti, si pongano i triangoli in modo che AC sia in linea retta con AD; perciò anche AE viene ad essere in linea retta con AB (I, 14). E si tracci la congiungente BD.

Poiché dunque il triangolo ABC è uguale al triangolo ADE, ed il triangolo ABD è un'altra qualsiasi grandezza, si ha che il triangolo ABC sta al triangolo ABD come il triangolo ADE sta al triangolo ABD (V, 7). Ma $ABC : ABD = AC : AD$ (VI, 1), ed $ADE : ABD = AE : AB$ (id.). Quindi anche, $AC : AD = AE : AB$ (V, 11). Dunque, nei triangoli ABC, ADE i lati intorno agli angoli uguali sono inversamente proporzionali.

Ma sia adesso il caso in cui, nei triangoli ABC, ADE, i lati [intorno agli angoli uguali] siano inversamente proporzionali, e si abbia così: $AC : AD = AE : AB$; dico che il triangolo ABC è uguale al triangolo ADE.

Infatti, tracciata di nuovo la congiungente BD, poiché $AC : AD = AE : AB$, ma AC sta ad AD come il triangolo ABC sta al triangolo ABD, mentre AE sta ad AB come il triangolo ADE sta al triangolo ABD (VI, 1), si ha che il triangolo ABC sta al triangolo ABD come il triangolo ADE sta al triangolo ABD [$ABC : ABD = ADE : ABD$] (V, 11). Ciascuno dei due triangoli ABC, ADE ha quindi il medesimo rapporto rispetto al triangolo ABD. Perciò il triangolo ABC è uguale [equivalente] al triangolo ADE (V, 9).

Dunque, in triangoli uguali... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 14; V, 7, 9, 11; VI, 1.
È APPLICATA IN: VI, 19.

PROPOSIZIONE 16.

Se quattro rette sono proporzionali, il rettangolo compreso dai termini estremi[a] *è uguale al rettangolo compreso dai termini medi; e se il rettangolo compreso da[lle rette che costituiscono in una proporzione] i termini estremi è uguale al rettangolo compreso dai termini medi, le quattro rette saranno proporzionali*[6].

Siano AB, CD, E, F quattro rette proporzionali, in modo che AB stia a CD come E sta a F; dico che il rettan-

a. Letteralmente è: «dalle rette estreme... dalle medie...».

[6] È questo il teorema fondamentale, che, per dir così, getta un ponte fra la teoria delle proporzioni (nel caso delle rette) e la teoria dell'equivalenza dei poligoni, cioè fra il libro sesto e il libro primo degli *Elementi*.

golo compreso da *AB*, *F* è uguale al rettangolo compreso da *CD*, *E*.

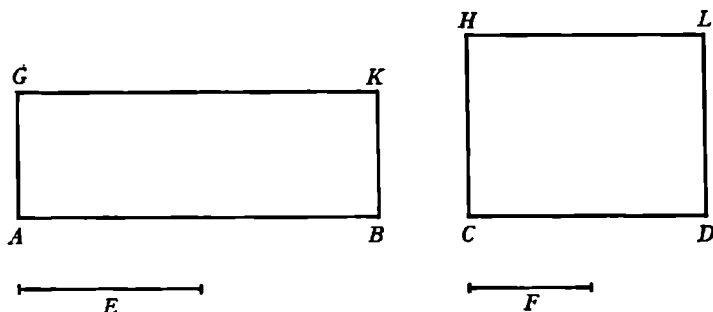
Infatti, si conducano dai punti *A*, *C* le rette *AG*, *CH* rispettivamente perpendicolari alle rette *AB*, *CD*, si pongano *AG* uguale a *F* e *CH* uguale ad *E*, e si completino i rettangoli[a] *ABKG*, *CDLH*.

Ora, poiché *AB* sta a *CD* come *E* sta a *F*, [per ipotesi,] ed *E* è uguale a *CH*, mentre *F* è uguale ad *AG*, si ha che $AB : CD = CH : AG$. Nei parallelogrammi [rettangolari] *ABKG*, *CDLH* i lati intorno agli angoli uguali sono quindi inversamente proporzionali. Ma sono uguali i parallelogrammi aventi gli angoli rispettivamente uguali, ed i cui lati intorno agli angoli uguali siano inversamente proporzionali (VI, 14), per cui il rettangolo *ABKG* è uguale al rettangolo *CDLH*. Ma *ABKG* è il rettangolo di *AB*, *F* – difatti *AG* è uguale a *F* –, mentre *CDLH* è il rettangolo di *CD*, *E* – difatti *E* è uguale a *CH* –; perciò il rettangolo compreso da *AB*, *F* è uguale [equivalente] al rettangolo compreso da *CD*, *E*.

Ma sia adesso il caso in cui il rettangolo compreso da *AB*, *F* è uguale al rettangolo compreso da *CD*, *E*; dico che le quattro rette saranno proporzionali, ossia che $AB : CD = E : F$.

Infatti, eseguita la medesima costruzione, poiché il rettangolo di *AB*, *F* è [per ipotesi] uguale al rettangolo di *CD*, *E*, ed il rettangolo di *AB*, *F* è *ABKG* – difatti *AG* è uguale a *F* –, mentre il rettangolo di *CD*, *E* è *CDLH* – difatti *CH* è uguale ad *E* –, si ha che *ABKG* è uguale a *CDLH*. Ed essi hanno gli angoli rispettivamente uguali. Ma nei parallelogrammi uguali ed aventi gli angoli rispettivamente uguali, i lati intorno agli angoli uguali sono inversamente proporzionali (VI, 14). Quindi $AB : CD = CH : AG$. Ma *CH* è uguale ad *E*, ed *AG* è uguale a *F*; perciò *AB* sta a *CD* come *E* sta a *F* [$AB : CD = E : F$].

a. Letteralmente: i parallelogrammi (cioè, i parallellogrammi rettangolari).

Dunque, se quattro rette sono proporzionali... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

Applica: I, 11, 28; VI, 14.

È applicata in: VI, 17; X, 28, 32, lemma X, 33, 112, 113.

Proposizione 17.

Se tre rette sono proporzionali, il rettangolo compreso dai termini estremi è uguale al quadrato del termine medio; e se il rettangolo compreso dai termini estremi è uguale al quadrato del termine medio, le tre rette saranno proporzionali [7].

Siano A, B, C tre rette proporzionali, in modo che A stia a B come B sta a C; dico che il rettangolo compreso da A, C è uguale al quadrato di B.

Si ponga D uguale a B.

Ora, poiché $A : B = B : C$, ma B è uguale a D, si ha che $A : B = D : C$. Ma se quattro rette sono proporzionali, il rettangolo compreso dai termini estremi è uguale al rettangolo compreso dai termini medi (VI, 16). Il rettangolo di A, C è quindi uguale al rettangolo di B, D. Ma il rettangolo di B, D è il quadrato di B – difatti B è uguale a D –; perciò il rettangolo compreso da A, C è uguale al quadrato di B.

Ma sia adesso il caso in cui il rettangolo di A, C è uguale al quadrato di B; dico che A sta a B come B sta a C.

[7] È, questo, un caso particolare (relativo alle proporzioni continue) del teorema immediatamente precedente VI, 16.

Testa marmorea di Tolomeo I Soter

(Copenhagen, Carlsberg Glyptotek).

Infatti, eseguita la medesima costruzione, poiché il rettangolo di *A*, *C* è [per ipotesi] uguale al quadrato di *B*, ma il quadrato di *B* è il rettangolo di *B*, *D* – difatti *B* è uguale a *D* –, il rettangolo di *A*, *C* è uguale al rettangolo di *B*, *D*. Ma se il rettangolo compreso dai termini estremi è uguale a quello compreso dai termini medi, le quattro rette sono proporzionali (VI, 16). Quindi *A* sta a *B* come *D* sta a *C*. Ma *B* è uguale a *D*; perciò *A* sta a *B* come *B* sta a *C*.

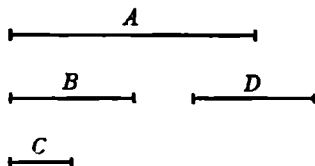
Dunque, se tre rette sono proporzionali... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: V, 7, 11; VI, 16.

È APPLICATA IN: X, 25, 27, 28, 31, 32, lemma a X, 33, 54, 60, 91, 97, 98, 100; XIII, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 13.

A

B D

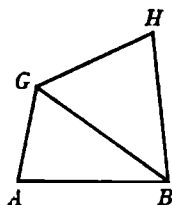
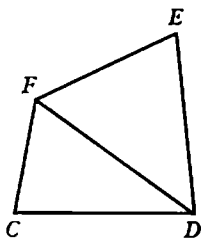
C

PROPOSIZIONE 18.

Descrivere su una retta data una figura rettilinea, che sia simile ad una figura rettilinea data, e similmente disposta.

Siano *AB* la retta data e *CDEF* la figura rettilinea data (= il poligono dato); si deve dunque descrivere sulla retta *AB* un poligono che sia simile al poligono *CDEF*, e similmente disposto.

Si tracci la congiungente *DF* e si costruiscano sulla retta *AB*, con vertici rispettivamente nei punti *A*, *B* di essa, l'angolo *GAB* uguale all'angolo in *C* e l'angolo *ABG* uguale all'angolo *CDF* (I, 23). Quindi il rimanente angolo *CFD* del triangolo *CDF* è uguale all'angolo *AGB* del triangolo *ABG* (I, 32); il triangolo *CDF* ha perciò i suoi angoli rispettivamente uguali a quelli del triangolo *ABG*. Si hanno conseguentemente le proporzioni: $DF : BG = CF : AG = CD : AB$ (VI, 4). Di nuovo, si costruiscano sulla retta *BG* e con vertici nei punti *B*, *G* di essa l'angolo *BGH* uguale all'angolo *DFE* e l'angolo *GBH* uguale all'angolo *FDE* (I, 23). Perciò

il rimanente angolo in E del triangolo FDE è uguale al rimanente angolo in H del triangolo GBH (I, 32); il triangolo FDE ha quindi i suoi angoli rispettivamente uguali a quelli del triangolo GBH; si hanno perciò le proporzioni: $DF : BG = FE : GH = DE : BH$ (VI, 4). Ma fu anche dimostrato che $DF : BG = CF : AG = CD : AB$; quindi anche, $CF : AG = CD : AB = FE : GH = DE : BH$. E poiché l'angolo CFD è uguale all'angolo AGB, e l'angolo DFE è uguale all'angolo BGH, tutto quanto l'angolo CFE è uguale a tutto quanto l'angolo AGH. Per la stessa ragione, pure l'angolo CDE è uguale all'angolo ABH. Ma anche l'angolo in C è uguale all'angolo in A, mentre l'angolo in E è uguale all'angolo in H. Il poligono $ABHG$ ha così tutti gli angoli rispettivamente uguali a quelli del poligono $CDEF$, ed inoltre i poligoni hanno proporzionali i lati intorno ai loro angoli uguali; perciò il poligono $ABHG$ è simile al poligono $CDEF$ (VI, def. I).

Dunque, sulla retta data AB è stata descritta la figura rettilinea[, cioè il poligono] $ABHG$ simile al poligono dato $CDEF$, e similmente disposta. – C.D.F.

APPLICA: I, post. V, 23, 32; V, 11; VI, 4.
È APPLICATA IN: VI, 22, 25, 28, 29; XII, 11, 12.

PROPOSIZIONE 19.

I triangoli simili stanno fra loro in rapporto duplicato di quello dei lati omologhi [8].

Siano ABC, DEF triangoli simili aventi l'angolo in B uguale all'angolo in E, e tali che AB stia a BC come DE

[8] Per la definizione di «ragione duplicata» rinviamo il lettore alla nota all'apposita def. IX del libro quinto.

Oggi il teorema stesso viene enunciato sotto la forma equivalente:

sta ad EF, cosicché il lato BC sia omologo del lato EF (V, def. XI); dico che il triangolo ABC ha rispetto al triangolo DEF rapporto duplicato di quello che BC ha rispetto ad EF.

Infatti, si prenda la terza proporzionale BG dopo BC, EF, cosicché BC stia ad EF come EF sta a BG [$BC : EF = EF : BG$] (VI, 11), e si tracci la congiungente AG.

Poiché dunque [per ipotesi] $AB : BC = DE : EF$, si ha, *permutando*, che $AB : DE = BC : EF$ (V, 16). Ma $BC : EF = EF : BG$. Quindi anche, $AB : DE = EF : BG$ (V, 11); nei triangoli ABG, DEF, allora, i lati intorno agli angoli uguali sono inversamente proporzionali. Ma sono uguali quei triangoli che abbiano rispettivamente un angolo uguale ad un angolo ed i cui lati intorno agli angoli uguali siano inversa-

« I triangoli simili stanno tra loro come i quadrati dei lati omologhi ». Ciò si vede bene ponendo l'enunciato del teorema sotto la forma che troviamo nell'importantissimo corollario che segue questa prop. VI, 19.

Il teorema parte dalla considerazione di due triangoli simili, A B, dei quali a, b siano rispettivamente lati omologhi. I triangoli (intesi come superficie) non stanno tra loro come i lati (ciò che avviene per i perimetri), ma si ha la proporzione:

$$A : B = a : x$$

dove x è il terzo proporzionale dopo i lati omologhi:

$$a : b = b : x$$

Il corollario parte, invece, da questa proporzione, ossia considera tre rette a, b, x in proporzione continua, e ne deduce:

$$a : x = A : B$$

cioè deduce che la prima retta (a) sta alla terza (x) come un triangolo A costruito sulla prima retta sta al triangolo simile B descritto sulla seconda retta (b).

Il corollario viene enunciato da Euclide per *figure in generale*, anziché per i triangoli, come ne avrebbe diritto.

Se come figure simili costruite su a, b consideriamo i quadrati $q(a)$, $q(b)$ abbiamo che se:

$$a : b = b : x$$

si ricava:

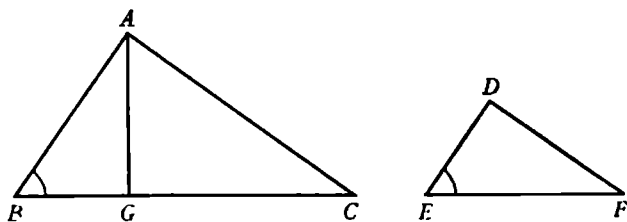
$$a : x = q(a) : q(b)$$

cioè che il rapporto duplicato tra due rette a, b è il rapporto tra i quadrati costruiti su di esse:

$$\text{dupl. } (a : b) = q(a) : q(b)$$

come era stato già detto sopra.

mente proporzionali (VI, 15). Perciò il triangolo ABG è uguale al triangolo DEF. Ora, poiché $BC : EF = EF : BG$, ma, se tre rette sono proporzionali, la prima ha rispetto alla terza rapporto duplicato di quello che ha rispetto alla seconda (V, def. IX), si ha che BC ha rispetto a BG rapporto duplicato di quello che BC ha rispetto ad EF. Ma BC sta a BG come il triangolo ABC sta al triangolo ABG (VI, 1); perciò anche il triangolo ABC ha rispetto al triangolo ABG rapporto duplicato di quello che BC ha rispetto ad EF [$ABC : ABG =$ dupl. $(BC : EF)$]. Ma il triangolo ABG è uguale al triangolo DEF; quindi anche, il triangolo ABC ha rispetto al triangolo DEF rapporto duplicato di quello che BC ha rispetto ad EF [$ABC : DEF =$ dupl. $(BC : EF)$].

Dunque, triangoli simili... (secondo l'enunciato).

Applica: V, 7, 11, 15, 16; VI, 1, 11, 15.

È applicata in: VI, 20.

Corollario.

È da ciò evidente che, se tre rette sono proporzionali, la prima sta alla terza come la figura descritta sulla prima sta a quella simile e similmente descritta sulla seconda. – C.D.D.

È applicato in: VI, 22, 25, 31; XIII, 14, 18.

PROPOSIZIONE 20.

[Due] poligoni simili si dividono in ugual numero di triangoli simili [tra loro a due a due] ed aventi lo stesso rapporto che hanno fra loro i poligoni[a]*; ed un poligono ha rispetto all'altro poligono rapporto duplicato di quello che un lato ha rispetto al lato omologo.*

Siano *ABCDE*, *FGHKL* [due] poligoni simili, e sia il lato *AB* omologo del lato *FG*; dico che i poligoni *ABCDE*, *FGHKL* si dividono in ugual numero di triangoli simili, aventi tra loro a due a due lo stesso rapporto dei poligoni in questione, e che il poligono *ABCDE* ha rispetto al poligono *FGHKL* rapporto duplicato di quello che *AB* ha rispetto a *FG*.

Si traccino le congiungenti *BE*, *EC*, *GL*, *LH*.

Ora, poiché il poligono *ABCDE* è simile al poligono *FGHKL*, l'angolo *BAE* del primo è uguale all'angolo *GFL* del secondo (VI, def. I). Inoltre, $AB : AE = FG : FL$ (id.). Poiché dunque *ABE*, *FGL* sono due triangoli aventi rispettivamente un angolo uguale ad un angolo, e proporzionali i lati intorno agli angoli uguali, il triangolo *ABE* ha i suoi angoli rispettivamente uguali a quelli del triangolo *FGL* (VI, 6), cosicché è anche [ad esso] simile (VI, 4 e def. I); l'angolo *ABE* è quindi uguale all'angolo *FGL*. Ma pure tutto quanto l'angolo *ABC* è uguale a tutto quanto l'angolo *FGH*, a causa della similitudine dei poligoni; perciò il rimanente angolo *EBC* è uguale all'angolo *LGH*. E poiché, a

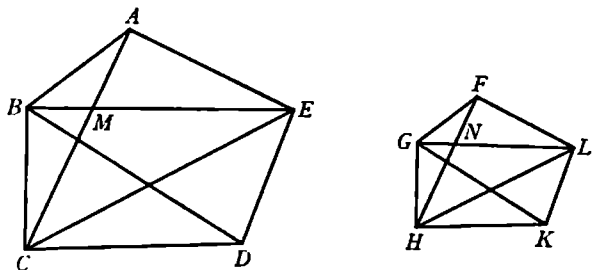
a. Si dice, letteralmente, « omologhi ai poligoni rispettivi tutti quanti », cioè non si usa ὁμόλογος, *omologo*, da solo, assolutamente, ma col dativo; il significato, quindi, sembra appunto essere « proporzionali a, aventi lo stesso rapporto con ». D'altronde, Euclide dice poco dopo: « essi (i triangoli, cioè) sono anche omologhi ai poligoni rispettivi tutti quanti, vale a dire triangoli tali da essere proporzionali, e cioè che *ABE*, *EBC*, *ECD* siano (termini) antecedenti, mentre *FGL*, *LGH*, *LHK* sono loro conseguenti », ossia triangoli ciascuno dei quali corrisponde al rispettivo fra i primi come conseguente ad antecedente.

causa della similitudine dei triangoli ABE, FGL, si ha che $BE : AB = GL : FG$, ma anche, tuttavia, a causa della similitudine dei poligoni, $AB : BC = FG : GH$, si ha, *ex aequo*: $BE : BC = GL : GH$ (V, 22), e così i lati intorno agli angoli uguali EBC, LGH sono proporzionali; il triangolo EBC ha quindi i suoi angoli rispettivamente uguali a quelli del triangolo LGH (VI, 6), cosicché il triangolo EBC è pure simile al triangolo LGH (VI, 4 e def. I). Per la stessa ragione, anche il triangolo ECD è simile al triangolo LHK. Quindi i poligoni simili $ABCDE$, $FGHKL$ sono stati divisi in triangoli simili a due a due, ed in ugual numero.

Dico che i triangoli simili [di ciascuna coppia] hanno anche fra loro lo stesso rapporto che han fra loro i poligoni, vale a dire che essi sono a due a due nello stesso rapporto, e che sono termini antecedenti ABE, EBC, ECD, mentre FGL, LGH, LHK sono loro termini conseguenti[, ossia: $ABE : FGL = EBC : LGH = ECD : LHK$], ed inoltre che il poligono $ABCDE$ ha rispetto al poligono $FGHKL$ rapporto duplicato di quello che un lato ha rispetto al lato omologo, vale a dire che AB ha rispetto a FG[: dico cioè che $ABCDE :$ $: FGHKL = \text{dupl.} (AB : FG)$].

Infatti, si traccino le congiungenti AC, FH. Ora, poiché per la similitudine dei poligoni l'angolo ABC è uguale all'angolo FGH, ed AB sta a BC come FG sta a GH, il triangolo ABC ha i suoi angoli rispettivamente uguali a quelli del triangolo FGH (VI, 6); perciò l'angolo BAC del primo è uguale all'angolo GFH del secondo, e l'angolo BCA del primo è uguale all'angolo GHF del secondo. E poiché l'angolo BAM è uguale all'angolo GFN, ma pure l'angolo ABM è uguale all'angolo FGN [come è stato sopra dimostrato], anche il rimanente angolo AMB del triangolo ABM è uguale al rimanente angolo FNG del triangolo FGN (I, 32); il triangolo ABM ha quindi i suoi angoli rispettivamente uguali a quelli del triangolo FGN. Similmente potremo dimostrare che anche il triangolo BMC ha i suoi angoli rispettivamente uguali a quelli del triangolo GNH. Si hanno così le proporzioni: $AM : BM = FN : GN$, e $BM : CM = GN : HN$ (VI, 4), cosicché pure, *ex aequo*: $AM : CM = FN : HN$ (V, 22). Ma

AM sta a *CM* come il triangolo *AMB* sta al triangolo *CMB*, ed [anche come] il triangolo *AME* sta al triangolo *CME* – difatti quei triangoli stanno fra loro come le basi (VI, 1)[, e si ricava la proporzione fra triangoli: $AMB : CMB = AME : CME$ (V, 11)] –. Quindi anche, uno dei termini antecedenti sta ad uno dei conseguenti come la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti[, ossia: $AMB : CMB = (AMB + AME) : (CMB + CME)$] (V, 12); il triangolo *AMB* sta quindi al triangolo *CMB* come il triangolo *ABE* sta al triangolo *CBE* [$AMB : CMB = ABE : CBE$]. Ma il triangolo *AMB* sta al triangolo *CMB* come *AM* sta a *CM* [$AMB : CMB = AM : CM$] (VI, 1); perciò anche, $AM : CM = ABE : CBE$ (V, 11). Per la stessa ragione, si ha pure: $FN : HN = FGL : HGL$. Ora, $AM : CM = FN : HN$[, come è stato dedotto sopra *ex aequo*]; quindi anche, il triangolo *ABE* sta al triangolo *CBE* come il triangolo *FGL* sta al triangolo *HGL*[, ossia vale la proporzione fra triangoli: $ABE : CBE = FGL : HGL$] (V, 11), e, *permutando*, $ABE : FGL = CBE : HGL$ (V, 16). Similmente potremo pure dimostrare, dopo aver tracciato le congiungenti *BD*, *GK*, che il triangolo *CBE* sta al triangolo *HGL* come il triangolo *ECD* sta al triangolo *LHK*. Ma poiché $ABE : FGL = CBE : HGL = ECD : LHK$, si ha anche che uno dei termini antecedenti sta ad uno dei conseguenti come la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti (V, 12); di conseguenza, il triangolo *ABE* sta al triangolo *FGL* come [tutto] il poligono *ABCDE* sta a [tutto] il poligono *FGHKL*. Ma il triangolo *ABE* ha rispetto al triangolo *FGL* rapporto duplicato di quello che il lato *AB* ha rispetto al lato omologo *FG* – difatti, triangoli simili stanno fra loro in rapporto duplicato di quello dei lati omologhi (VI, 19) –. Quindi anche il poligono *ABCDE* ha rispetto al poligono *FGHKL* rapporto duplicato di quello che il lato *AB* ha rispetto al lato omologo *FG*.

Dunque, [due] poligoni simili si dividono in ugual numero di triangoli simili... (secondo l'enunciato).

APPLICA: I, 32; V, 11, 12, 16, 22; VI, 1, 4, 6, 19.

È APPLICATA IN: X, 9, 10; XII, 1, 8 coroll.

COROLLARIO.

Similmente, anche nel caso di quadrilateri, si potrà dimostrare che essi stanno fra loro in rapporto duplicato di quello dei lati omologhi. Ma ciò fu pure dimostrato nel caso di triangoli; cosicché, anche in generale, figure rettilinee simili stanno fra loro in rapporto duplicato di quello dei lati omologhi [9]. – C.D.D.

È APPLICATO IN: X, 6 coroll., 112.

PROPOSIZIONE 21.

Poligoni simili ad uno stesso poligono[a] *sono simili anche fra loro* [10].

Infatti, ciascuno dei due poligoni A, B sia simile al poligono C; dico che sono simili fra loro anche A e B.

a. Letteralmente, abbiamo *figure rettilinee.*

[9] Ricordiamo che «figure rettilinee» sono per Euclide i triangoli, i quadrilateri, i poligoni, intendendo egli con quest'ultima denominazione soltanto le *figure rettilinee*, aventi più di quattro lati.

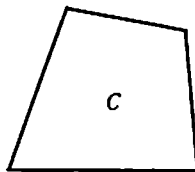
[10] Viene qui dimostrato che la similitudine è una relazione che gode della proprietà transitiva. La dimostrazione si fonda sul fatto che vale la proprietà transitiva per l'uguaglianza (tra gli angoli) e per l'uguaglianza dei rapporti (tra rette).

Per analoghi motivi valgono per la similitudine anche la proprietà

Poiché *A* è difatti simile a *C*, esso ha tutti gli angoli rispettivamente uguali a quelli di *C* ed ha proporzionali i lati intorno agli angoli uguali (VI, def. I). Di nuovo, poiché *B* è simile a *C*, esso ha gli angoli rispettivamente uguali a quelli di *C* ed ha proporzionali i lati intorno agli angoli uguali (id.). Ciascuno dei due poligoni *A*, *B* ha quindi gli angoli rispettivamente uguali a quelli di *C*, e perciò uguali fra loro, ed ha proporzionali i lati intorno agli angoli uguali [a].

Dunque, *A* è simile a *B* (VI, def. I). - C.D.D.

Applica: V, 11.

È applicata in: VI, 22, 24, 28, 29.

Proposizione 22.

Se quattro rette sono proporzionali, anche poligoni simili [a due a due] e similmente disposti descritti su esse saranno in proporzione; e se poligoni [a due a due] simili e similmente

a. Avremmo qui un passo: « cosicché anche *A* è equiangolo rispetto a (cioè, ha gli angoli rispettivamente uguali a quelli di) *B*, ed ha proporzionali i lati intorno agli angoli uguali »; Heiberg segue P, che lo omette, e congettura che possa magari essere aggiunta di Teone.

riflessiva e quella simmetrica, sicché la similitudine è una di quelle che modernamente si chiamano *relazioni di equivalenza*.

Occorre tuttavia osservare che Euclide si occupa esplicitamente soltanto della proprietà transitiva: per l'uguaglianza in linea generale nella prima *Nozione comune*, per l'uguaglianza tra rapporti nella V, 11 e finalmente in questa VI, 21, per la similitudine.

disposti, descritti su [quattro] rette, sono in proporzione, anche le rette stesse saranno proporzionali [11].

Siano AB, CD, EF, GH quattro rette proporzionali, in modo che AB stia a CD come EF sta a GH, e si descrivano su AB, CD i poligoni KAB, LCD, simili e similmente disposti, e su EF, GH i poligoni EPM, $GHQN$, simili e similmente disposti; dico che KAB sta a LCD come $EFPM$ sta a $GHQN$.

Infatti, si prenda la terza proporzionale O dopo AB, CD, e si prenda la terza proporzionale R dopo EF, GH (VI, 11). Ora, poiché AB sta a CD come EF sta a GH, e CD sta ad O come GH sta a R, [in quanto $AB : CD = CD : O$ ed $EF : GH = GH : R$, da cui, essendo per ipotesi: $AB : CD = EF : GH$, si ricava: $CD : O = GH : R$ (V, 11),] si ha, *ex aequo*: $AB : O = EF : R$ (V, 22). Ma $AB : O = KAB : LCD$, mentre $EF : R = EFPM : GHQN$ [VI, 19, coroll.: se tre rette sono proporzionali, la prima sta alla terza come un poligono descritto sulla prima sta ad uno simile e similmente descritto costruito sulla seconda]; quindi anche, KAB sta a LCD come $EFPM$ sta a $GHQN$ (V, 11).

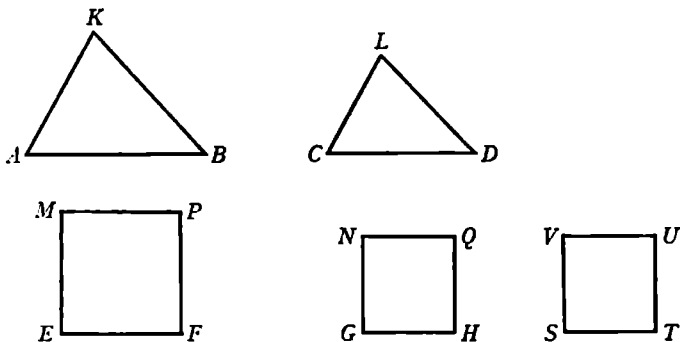
Ma sia adesso il caso in cui KAB stia [per ipotesi] a LCD come $EFPM$ sta a $GHQN$; dico anche che AB sta a CD come EF sta a GH. Infatti, se AB non stesse a CD come EF sta a GH, supponiamo che valga la proporzione: $AB : CD = EF : ST$ (VI, 12), e si descriva su ST il poligono $STUV$, simile e similmente disposto rispetto all'uno o all'altro dei poligoni $EFPM$, $GHQN$ (VI, 18).

Poiché dunque $AB : CD = EF : ST$, e su AB, CD sono stati descritti i poligoni KAB, LCD, simili e similmente disposti, e su EF, ST i poligoni $EFPM$, $STUV$, simili e

[11] È particolarmente interessante il caso particolare nel quale i quattro poligoni costruiti sulle quattro rette siano tutti quadrati: si ricava così che se quattro rette sono in proporzione, sono in proporzione anche i quadrati su di esse costruiti.

E la VI, 22 trova applicazione appunto per questo caso particolare, ad esempio nella X, 14 e nella X, 22.

similmente disposti, si ha: $KAB : LCD = EFPM : STUV$[, secondo quanto è stato sopra già dimostrato]. Ma anche, per ipotesi, $KAB : LCD = EFPM : GHQN$; perciò si ha pure: $EFPM : STUV = EFPM : GHQN$ (V, 11). Il poligono $EFPM$ ha quindi lo stesso rapporto rispetto a ciascuno dei due poligoni $GHQN$, $STUV$, per cui $GHQN$ è uguale a $STUV$ (V, 9). Ma $GHQN$ è anche simile e similmente disposto rispetto a $STUV$; perciò GH è uguale a ST[12]. E poiché $AB : CD = EF : ST$, ma ST è uguale a GH, si ha che AB sta a CD come EF sta a GH.

Dunque, se quattro rette sono proporzionali... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: V, 9, 11, 22; VI, 11, 12, 18, 19 coroll., 21.

È APPLICATA IN: X, 14, 22, 66, 68; XIII, 15.

[12] Si tratta qui di due poligoni che s'è riconosciuto essere *uguali* (= equivalenti) e *simili* (cfr. per l'analogia, la def. X del libro undicesimo). Si è quindi in presenza di quella relazione (uguaglianza in senso stretto) che noi chiamiamo anche *congruenza*. I lati omologhi sono perciò uguali.

PROPOSIZIONE 23.

[*Due*] *parallelogrammi aventi gli angoli rispettivamente uguali hanno fra loro rapporto composto dei rapporti dei lati*[a] [13].

Siano $ABCD$, $CEFG$ [due] parallelogrammi aventi gli angoli rispettivamente uguali, ed aventi [per esempio] l'an-

a. Alla lettera il testo dice qui, nel resto della proposizione, ed in genere come formula tecnica, *il rapporto dei lati*, un po' negligentemente – nota Heiberg – al posto dell'espressione completa *il rapporto composto dei rapporti dei lati*: abbiamo, cioè, λόγον τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν invece di λόγον τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν τῶν πλευρῶν (λόγων).

[13] Qui Euclide introduce la «ragione composta» senza averla prima definita. In linguaggio moderno diremo che si tratta del prodotto di due rapporti:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D}$$

Ma Euclide, non considerando in generale i rapporti tra grandezze come numeri, non può far entrare in gioco l'operazione di moltiplicazione.

Ricorre allora alla sostituzione del secondo rapporto C/D con un rapporto ad esso uguale, ma avente per antecedente il conseguente B del primo rapporto.

Pone cioè:

$$C : D = B : X$$

dove X è la quarta proporzionale dopo C, D, B (e nel caso delle *rette* egli sa costruirla: VII, 12).

Euclide passa dunque dalla considerazione dei due rapporti (che noi diremmo *da moltiplicare*):

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D}$$

a quella dei due rapporti:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{B}{X}$$

e chiama rapporto composto (o *ragione composta*) dei due rapporti (semplici) A/B e B/X il rapporto $\dfrac{A}{X}$.

Così, nella dimostrazione di questo teorema, Euclide considera certi tre segmenti K, L, M e i loro rapporti K/L e L/M. E aggiunge: «Il rapporto di K a M è composto (σύγκειται) del rapporto di K a L e del rapporto di L a M».

Va poi osservato che se i due rapporti che si compongono sono uguali

golo BCD uguale all'angolo ECG; dico che il parallelogrammo $ABCD$ ha rispetto al parallelogrammo $CEFG$ rapporto composto dei rapporti dei lati.

tra loro, si ricade nel caso della *ragione duplicata* (cfr. nota alla def. IX del libro quinto).

Se infatti è:

$$A : B = C : D$$

cioè se i due rapporti A/B e C/D sono uguali, la loro *ragione composta*, che si indicherebbe per noi così:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D}$$

si trova trasformando il rapporto $C : D$ in quello $B : X$ ad esso uguale:

$$C : D = B : X$$

ossia, essendo $C : D = A : B$ per l'uguaglianza tra i due rapporti dai quali siamo partiti, deve essere

$$A : B = B : X$$

Dunque X è la terza proporzionale dopo le due grandezze A, B.

Il rapporto composto cercato è così:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{B}{X} = \frac{A}{X}$$

ovvero:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{A}{B} = \frac{A}{X}$$

Dunque la ragione duplicata del rapporto $A : B$ (che per noi equivale al prodotto del rapporto per sé stesso, ossia del suo quadrato), è il *rapporto composto* di $A : B$ e di $A : B$ stesso.

Cioè: rapporto duplicato di $A : B$ è il rapporto $A : X$ dove $A : B = B : X$.

Va infine osservato che Euclide nel libro decimo (prop. 9) si serve della seguente proprietà: se due rapporti sono uguali sono uguali anche i loro rapporti duplicati.

Questo è un caso particolare della proprietà seguente: « Ragioni composte di ragioni uguali sono uguali ».

Cioè: se:

$$A : B = C : D$$

e:

$$B : E = D : F$$

si ricava:

$$A : E = C : F$$

cioè si giunge ad uguale *rapporto composto* sia che si compongano tra loro i rapporti $A : B$ e $B : E$ sia che si compongano tra loro i rapporti ad essi rispettivamente uguali $C : D$ e $D : F$.

E questa proprietà non è altro che la deduzione *ex aequo* delle pro-

Infatti, si pongano i parallelogrammi in modo tale che BC sia in linea retta con CG, per cui anche DC è in linea retta con CE (I, 14). Si completi inoltre il parallelogrammo $DCGH$, si assuma una retta qualunque K, e si determinino altre due rette L, M tali che sia: $BC : CG = K : L$, e $DC : CE = L : M$ (VI, 12).

I rapporti di K con L e di L con M sono quindi uguali ai rapporti dei lati, cioè di BC con CG e di DC con CE. Ma il rapporto di K con M è composto del rapporto di K con L e di quello di L con M; cosicché si ha pure che K ha rispetto a M rapporto composto dei rapporti dei lati. E poiché $BC : CG = ABCD : DCGH$ (VI, 1), ma $BC : CG = K : L$, si ha anche: $K : L = ABCD : DCHG$ (V, 11).

porzioni, della quale viene dimostrata la validità nella V, 22 (cfr. nota alla def. XVII del libro quinto).

Piuttosto Euclide, nella stessa prop. 9 del libro decimo, ammette che, inversamente, se due rapporti duplicati sono uguali, sono uguali pure i corrispondenti rapporti semplici.

Cioè da:

$$A : X = C : Y$$

dove X, Y sono determinati dalle relazioni:

$$A : B = B : X \quad \text{e} \quad C : D = D : Y$$

ricava:

$$A : B = C : D$$

come cosa evidente, senza che ne abbia fornito dimostrazione.

Terminiamo questa nota facendo presente che lo schema dimostrativo della VI, 23 viene adoperato in modo esattamente corrispondente da Galileo, nel suo *Discorso intorno alle cose che stanno in su l'acqua, o che in quella si muovono* (Firenze, 1612), quando vuol dimostrare che «*i pesi assoluti de' solidi hanno la proporzione composta delle proporzioni delle loro gravità in ispecie e delle lor moli*».

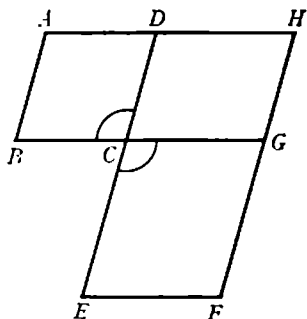
Cioè, ricordando che Galileo usa il termine *proporzione* dove noi diciamo *rapporto o ragione*, che la *gravità in specie* corrisponde al *peso specifico*, e che le *moli* sono i *volumi*, il teorema di Galileo si esprime con la formula:

$$\frac{P_a}{P_b} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{V_a}{V_b}$$

dove P_a, P_b sono i pesi assoluti di due corpi A, B, mentre V_a, V_b sono i loro volumi, e α, β sono i loro *pesi specifici*.

È noto che Galileo, il quale pur criticò come contraria all'intuizione la definizione euclidea di proporzione (cfr. nota alla def. V del libro quinto), pur conosceva perfettamente gli *Elementi* di Euclide, e ne ammirò l'autore.

Di nuovo, poiché $DC : CE = DCGH : CEFG$ (VI, 1), ma $DC : CE = L : M$, si ha pure: $L : M = DCGH : CEFG$ (V, 11). Poiché dunque fu dimostrato che K sta a L come il parallelogrammo $ABCD$ sta al parallelogrammo $DCGH$, e che L sta a M come il parallelogrammo $DCGH$ sta al parallelogrammo $CEFG$, si ha, *ex aequo*, che $K : M = ABCD : CEFG$. Ma K rispetto a M ha rapporto composto dei rapporti dei lati; perciò anche $ABCD$ ha rispetto a $CEFG$ rapporto composto dei rapporti dei lati.

Dunque, [due] parallelogrammi aventi gli angoli rispettivamente uguali... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 14; V, 11, 22; VI, 1, 12.

PROPOSIZIONE 24.

In ogni parallelogrammo i parallelogrammi posti intorno alla diagonale sono simili a tutto il parallelogrammo e fra loro.

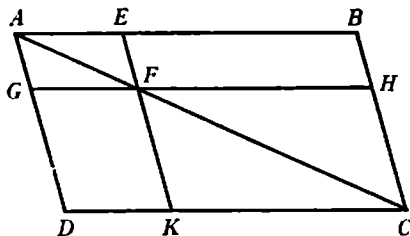
Siano $ABCD$ un parallelogrammo, AC la sua diagonale, ed $AEFG$, $HCKF$ siano parallelogrammi posti intorno ad AC; dico che ciascuno dei due parallelogrammi $AEFG$, $HCKF$ è simile a tutto il parallelogrammo $ABCD$, e che essi sono simili fra loro.

Infatti, poiché nel triangolo ABC la retta EF risulta condotta parallela ad uno dei lati, cioè a BC, si ha la proporzione: $BE : EA = CF : FA$ (VI, 2). Di nuovo, poiché nel triangolo ACD risulta condotta GF parallela ad uno dei lati, cioè a DC, si ha la proporzione: $CF : FA = DG : GA$ (id.). Ma fu dimostrato che $BE : EA = CF : FA$; quindi an-

che, $BE : EA = DG : GA$ (V, 11), e si ha così, *componendo*, $BA : EA = DA : GA$ (V, 18), e, *permutando*, $BA : DA = = EA : GA$ (V, 16). Nei parallelogrammi $ABCD$, $AEFG$ i lati intorno all'angolo comune BAD sono quindi proporzionali. E poiché la retta GF è parallela alla retta DC, l'angolo AFG è uguale all'angolo DCA (I, 29); e l'angolo DAC, nei due triangoli ADC, AGF, è comune; quindi il triangolo ADC ha i suoi angoli rispettivamente uguali a quelli del triangolo AGF (I, 32). Per la stessa ragione, anche il triangolo ACB ha i suoi angoli rispettivamente uguali a quelli del triangolo AFE, e tutto quanto il parallelogrammo $ABCD$ ha quindi gli angoli rispettivamente uguali a quelli del parallelogrammo $AEFG$. Si hanno perciò le proporzioni: $AD : DC = AG : GF$; $DC : CA = GF : FA$; $CA : CB = = FA : FE$; $CB : BA = FE : EA$ (VI, 4). E poiché fu dimostrato che $DC : CA = GF : FA$, e $CA : CB = FA : FE$, si ha *ex aequo*: $DC : CB = GF : FE$ (V, 22). Perciò nei parallelogrammi $ABCD$, $AEFG$ i lati intorno agli angoli uguali sono proporzionali; il parallelogrammo $ABCD$ è quindi simile al parallelogrammo $AEFG$ (VI, def. I)[a]. Per la stessa ragione, il parallelogrammo $ABCD$ è simile anche al parallelogrammo $HCKF$, sicché ciascuno dei due parallelogrammi $AEFG$, $HCKF$ è simile al parallelogrammo $ABCD$. Ma poligoni simili ad uno stesso poligono sono simili anche fra loro

a. Simson (*op. cit.*, pp. 396-397) era d'opinione che la dimostrazione eseguita in VI, 24 fosse stata compilata da qualche non abile editore, che ne aveva poste insieme, malamente, altre due, la prima delle quali provava per mezzo delle parallele (VI, 2) che i lati comprendenti nei parallelogrammi l'angolo in comune sono proporzionali, mentre la seconda faceva uso della similarità dei triangoli (VI, 4) da cui i parallelogrammi risultano. Heiberg all'affermazione che il parallelogrammo $ABCD$ è simile al parallelogrammo $AEFG$, nota: « Difatti sono anche equiangoli » (cioè, hanno gli angoli rispettivamente uguali), come già visto prima – e ritiene che questa semplice ragione basti a dissipare i « cavilli » di Simson, anche se sia da riconoscere che Euclide qui manchi piuttosto dell'abituale perspicuo ordine, almeno come norma, e di completezza.

(VI, 21), per cui sono simili fra loro pure i parallelogrammi *AEFG*, *HCKF*.

Dunque, in ogni parallelogrammo i parallelogrammi posti intorno alla diagonale... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 29, 32; V, 11, 16, 18, 22; VI, 2, 4, 21.

È APPLICATA IN: VI, 26, 29.

PROPOSIZIONE 25.

Costruire un poligono che sia simile ad un poligono dato, ed insieme sia uguale (equivalente) ad un altro poligono dato [14].

Sia *ABC* il poligono dato, simile al quale occorre costruire un altro poligono, e *D* il poligono al quale occorre sia uguale

[14] È, questo, un problema *forte* sulla trasformazione di poligoni in altri soddisfacenti a determinate condizioni. Le condizioni stesse sono infatti assai *esigenti*: si vuole che si costruisca un poligono avente data area e data forma al tempo stesso: o, ciò che fa lo stesso, si vuol trasformare un poligono qualunque in un altro ad esso equivalente, ma simile ad un altro ancora: si vuole cioè (senza alterarne l'area) imporre, per dir così, a un poligono di assumere forma (poligonale) qualsivoglia.

La risoluzione di un problema così generale richiede l'uso delle proporzioni, e quindi trova posto in questo libro sesto. Ma nei libri primo e secondo è stato risolto un caso particolare, trasformando un poligono in un quadrato equivalente (l'ultimo passo di detta trasformazione vien operato nella II, 14). Si è cioè risolto lì, utilizzando soltanto la teoria dell'equivalenza, il problema di costruire un poligono «uguale» ad un poligono dato e simile a quel particolare poligono che è il quadrato.

Per seguir meglio il procedimento risolutivo di questa VI, 25 si riferisca il lettore alla figura, ma supponendo che i parallelogrammi *BCEL*, *CFME* siano due rettangoli, che indicheremo rispettivamente con *R*, *R'*.

Sarà dunque $ABC = T$ il triangolo al quale deve essere simile quello da costruire, e sarà *D* il poligono al quale detto triangolo da costruire deve essere uguale (= equivalente). Trasformiamo *T* e *D* in parallelogrammi (o rettangoli che siano) *R*, *R'* aventi la stessa altezza. La costruzione si

il poligono da costruire; si deve dunque costruire un poligono che sia insieme simile ad ABC ed uguale a D.

Infatti, si applichi a BC [parabolicamente] il parallelogrammo $BCEL$ uguale al triangolo ABC (I, 44), mentre a CE si applichi il parallelogrammo $CEMF$, uguale a D, e lo si applichi nell'angolo FCE che è uguale all'angolo CBL (I, 45). Quindi BC è in linea retta con CF, e LE è in linea retta con EM. Si prenda inoltre la media proporzionale GH fra BC, CF (VI, 13), e si descriva su GH il poligono KGH, simile ad ABC e similmente disposto rispetto ad esso (VI, 18).

esegue dapprima assegnando ad R la stessa base BC di T e altezza metà di quella di T (sicché è $R = T$) e poi eseguendo, sulla base CE, l'applicazione parabolica dell'area D (cfr. I, 44-45) sicché si ha $R' = D$. Poiché parallelogrammi aventi uguali altezze stanno tra loro come le basi (VI, 1) si ha:

$$R : R' = BC : CF$$

ossia:

$$T : D = BC : CF$$

Ora il triangolo T' da costruire deve essere (così richiede il problema) simile a T. Tutto sta dunque nel trovare quale base GH si debba assegnare a T', dato che su quella base potremo poi sùbito costruire un poligono (triangolo nel nostro caso) simile a T (VI, 18). Possiamo, per trovare la base di T', applicare il corollario della VI, 19, il quale ci dice che se tre rette sono in proporzione (continua) la prima sta alla terza come un poligono costruito sulla prima sta al poligono simile costruito sulla seconda. Se, quindi, supponiamo di avere già costruito il poligono richiesto T', abbiamo i due poligoni simili T, T', sicché i loro lati omologhi BC, GH rappresentano la *prima* e la *seconda* retta della proporzione.

E il corollario ci dice che:

$$T : T' = BC : X$$

dove X è determinato dalla proporzione:

$$BC : GH = GH : X$$

(sicché X fa da *terza retta*).

Ma il problema richiede che T' non solo sia simile a T, ma sia anche *uguale* a D.

Quindi nella proporzione sopra scritta possiamo porre D al posto di T':

$$T : D = BC : X$$

D'altra parte la costruzione di R' ci aveva dato la proporzione:

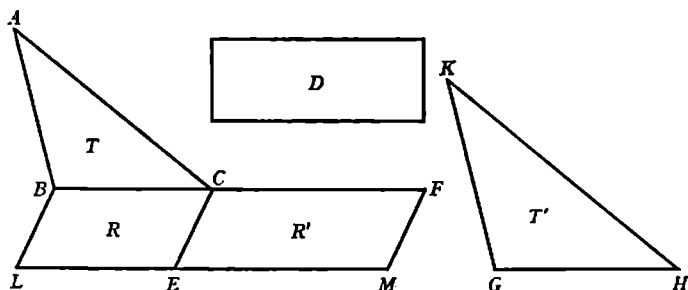
$$T : D = BC : CF$$

sicché lo scopo viene raggiunto ponendo $X = CF$; vale cioè la proporzione:

$$BC : GH = GH : CF$$

ossia la base incognita GH si trova come media proporzionale tra BC e CF.

Ora, poiché BC sta a GH come GH sta a CF[$BC : GH =$ $= GH : CF$], ma se tre rette sono proporzionali, la prima sta alla terza come la figura descritta sulla prima sta a quella simile e similmente disposta descritta sulla seconda (VI, 19, coroll.), si ha che BC sta a CF come il triangolo ABC sta al triangolo KGH [$BC : CF = ABC : KGH$]. Ma anche, BC sta a CF come il parallelogrammo $BCEL$ sta al parallelogrammo $CEMF$ [$BC : CF = BCEL : CEMF$] (VI, 1). Perciò si ha pure: $ABC : KGH = BCEL : CEMF$ (V, 11), e, *permutando*: $ABC : BCEL = KGH : CEMF$ (V, 16). Ma il triangolo ABC è uguale al parallelogrammo $BCEL$, per cui sono uguali pure il triangolo KGH ed il parallelogrammo $CEMF$. Ma il parallelogrammo $CEMF$ è uguale a D; anche KGH è quindi uguale a D. E KGH è anche simile ad ABC.

Dunque, è stato costruito il poligono KGH che è simile al poligono dato ABC, ed è pure uguale ad un altro poligono dato D. - C.D.F.

APPLICA: I, 14, 29, 44, 45; V, 11, 16; VI, 1, 13, 18, 19 coroll.
È APPLICATA IN: VI, 28, 29.

PROPOSIZIONE 26.

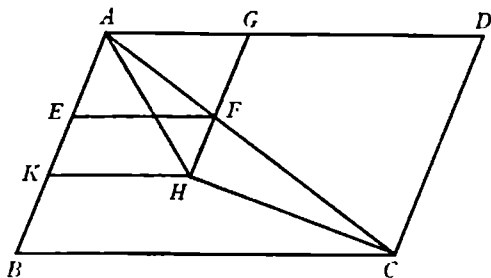
Se da un parallelogrammo si sottrae un parallelogrammo che sia simile a tutto quanto il primo parallelogrammo e similmente disposto [rispetto ad esso], e che con esso abbia un angolo comune, il parallelogrammo [sottratto] è posto intorno alla stessa diagonale di tutto quanto il primo parallelogrammo.

Infatti, dal parallelogrammo $ABCD$ si sottragga il parallelogrammo $AEFG$, simile e similmente disposto rispetto al

parallelogrammo $ABCD$, ed avente l'angolo DAB comune con esso; dico che $ABCD$ ed $AEFG$ sono posti intorno alla stessa diagonale.

Non lo siano difatti, ma, se possibile, sia AHC la loro diagonale [a], cioè GF, prolungata, incontri in H la diagonale AHC [b], e per H si conduca HK parallela all'una o all'altra indifferentemente delle rette AD, BC (I, 31 e 30).

Poiché dunque $ABCD$ è posto intorno alla stessa diagonale di $AGHK$, si ha che $AD : AB = AG : AK$ (VI, 24 e def. I). Ma anche si ha, a causa pure della similitudine di $ABCD$, $AEFG$, che $AD : AB = AG : AE$ (VI, def. I); perciò pure, $AG : AK = AG : AE$ (V, 11). Quindi AG ha lo stesso rapporto rispetto a ciascuna delle due rette AK, AE. Sarebbero perciò uguali AE, AK (V, 9), la retta minore uguale alla maggiore: il che è impossibile. Quindi $ABCD$ non può non essere posto intorno alla stessa diagonale di $AEFG$, per cui il parallelogrammo $ABCD$ è posto intorno alla stessa diagonale del parallelogrammo $AEFG$.

Dunque, se da un parallelogrammo si sottrae un parallelogrammo... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 30, 31; V, 9, 11; VI, 26.

È APPLICATA IN: VI, 27, 28, 29; X, 91, 95, 96.

a. Il testo greco ha letteralmente ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΑΘΓ, *sia loro diagonale la* (*retta*) AHC; ma evidentemente αὐτῶν, *di essi*, è sbagliato, poiché si assumerebbe proprio quanto va dimostrato, che cioè due parallelogrammi, date certe condizioni, hanno una stessa linea retta come diagonale comune. Heiberg preferisce omettere, secondo la lezione di alcuni codici, αὐτῶν, piuttosto che correggerlo in αὐτοῦ, *di esso*, vale a dire del parallelogrammo $ABCD$, malgrado sia questa la lezione di P: in P appunto, come in alcuni codici teonini, la correzione potrebbe esser sorta naturalmente.

b. Letteralmente sarebbe: « e si prolunghi GF conducendola sino a H ».

PROPOSIZIONE 27.

Di tutti i parallelogrammi applicati ad una stessa retta e che siano mancanti di parallelogrammi simili e similmente disposti rispetto a quello descritto sulla metà della retta, è massimo il parallelogrammo che è applicato alla metà della retta ed è simile al parallelogrammo mancante[15].

Sia AB una retta, si divida essa per metà in C, ed alla retta AB risulti applicato il parallelogrammo $ACDL$ man-

[15] Il teorema dice in sostanza questo. Si divida una retta AB per metà in C, e sulla metà CB si costruisca un parallelogrammo a piacere $CBED$. Si vuole ora *applicare* ad AB un parallelogrammo $AKFG$, mancante di un parallelogrammo $KBMF$ simile al parallelogrammo $CBED$. Si tratta cioè di costruire un parallelogrammo avente per base soltanto una parte AK di AB, mentre l'altra parte KB di AB deve essere base di un altro parallelogrammo $KBMF$ che abbia la stessa altezza di quello $AKFG$ e sia simile a quello $CBED$.

È questa, una generalizzazione del problema dell'applicazione ellittica delle aree, del quale s'è già trattato nella nota alla prop. II, 5. In detta proposizione si tratta di rettangoli e di quadrati: qui nel libro sesto la generalizzazione al caso di parallelogrammi qualunque non ha una vera rilevanza, almeno dal punto di vista algebrico.

Qui, nella VI 27, si dimostra che fra tutti i parallelogrammi applicati ellitticamente ad AB, mancanti di un parallelogrammo ($KBMF$) simile ad un parallelogrammo dato ($CBED$) è massimo quello costruito sulla metà della retta data AB, cioè quello $ACDL$, che del resto è uguale a quello $CBED$ (che costituisce in questo caso, l'area *mancante*). Sicché la massima area che si può applicare ellitticamente ad AB è quella $ACDL$ che risulta uguale all'area *mancante* $CBED$.

Nella II, 5 si tratta invece del massimo rettangolo da applicare: esso è il quadrato costruito sulla metà della retta data.

La VI, 27, e (nel caso particolare dell'angolo retto) la II, 5, ci dànno cioè la *separazione* tra i casi di possibilità e quelli di impossibilità di risoluzione dell'applicazione ellittica. Riferendoci per semplicità al caso dell'angolo retto della II, 5 diremo che il problema si può risolvere se l'area S da applicare non supera il quadrato costruito sulla metà della retta data a, cioè, in nostri simboli, se:

$$S \leqslant \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Se invece S supera quel quadrato il problema non trova soluzione.

Sicché il caso intermedio $S = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ segna la *separazione*, il *taglio*, tra i casi di *possibilità* e quelli di *impossibilità* di risoluzione, ossia costituisce

cante del parallelogrammo $DCBE$ descritto sulla metà di AB, vale a dire su CB; dico che di tutti i parallelogrammi applicati ad AB e che manchino di parallelogrammi simili a $DCBE$ e similmente disposti rispetto ad esso, è massimo quello $ACDL$.

Infatti, si applichi alla retta AB il parallelogrammo $AKFG$ mancante del parallelogrammo $FKBM$, che è simile a $DCBE$ e similmente disposto rispetto ad esso; dico che $ACDL$ è maggiore di $AKFG$.

Poiché difatti il parallelogrammo $DCBE$ è simile al parallelogrammo $FKBM$, i due parallelogrammi sono posti intorno alla stessa diagonale (VI, 26). Si conduca tale loro diagonale DB, e si descriva, cioè si completi, la figura.

Poiché dunque $CKFH$ è uguale a $NFME$ (I, 43), aggiungendo in comune $FKBM$, si ha che tutto quanto $HCBM$

il cosiddetto *diorisma* del problema dell'applicazione ellittica delle aree (da una parola greca che significa appunto *taglio, separazione*).

Coi nostri simboli: applicare ellitticamente ad una retta a l'area S equivale a risolvere l'equazione di secondo grado:

$$(a - x)\, x = S$$

ossia:

$$x^2 - ax + S = O$$

Il discriminante è:

$$\Delta = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - S$$

sicché si hanno soluzioni (reali) se:

$$S \leqslant \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

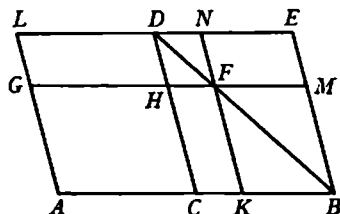
Il caso del discriminante nullo:

$$S = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

è quindi il *diorisma*, cioè opera la *separazione*, il *taglio*, tra i casi di possibilità e quelli di impossibilità.

Forse fu proprio per il problema dell'applicazione ellittica delle aree che venne per la prima volta, eseguendo la *discussione* del problema stesso, stabilito un *diorisma*, e sembra che in tal senso vada interpretata una testimonianza di Proclo, che (nel *Riassunto* premesso al suo *Commento al libro primo degli Elementi di Euclide*) afferma che il matematico Leone « *trovò per primo i diorismi, cioè quando un problema è possibile e quando è impossibile* ».

è uguale a tutto quanto *NKBE*. Ma *HCBM* è uguale a *GACH*, poiché è pure uguale *AC* a *CB* (I, 36). Anche *GACH*, *NKBE* sono quindi uguali. Si aggiunga in comune *HCKF*; tutto quanto *AKFG* è perciò uguale al gnomone *HCBENFH*, cosicché il parallelogrammo *DCBE*, vale a dire *ACDL*, è maggiore del parallelogrammo *AKFG*.

Dunque, di tutti i parallelogrammi applicati ad una stessa retta... (secondo l'enunciato). – C.D.D. [a].

APPLICA: I, 36, 43; VI, 26.

È APPLICATA IN: VI, 28.

PROPOSIZIONE 28.

Applicare ad una retta data un parallelogrammo uguale ad un poligono dato, e che manchi di un parallelogrammo simile ad un parallelogrammo dato; occorre inoltre che il poligono dato non sia maggiore del parallelogrammo descritto sulla metà della retta e che sia simile alla figura mancante[, *cioè al parallelogrammo dato*] [16].

Siano *AB* la retta data e *C* il poligono dato, uguale al quale occorre applicare ad *AB* un parallelogrammo; inoltre *C*

a. In tutti i codici si ritrova la dimostrazione dell'altro caso possibile, in cui cioè *AK* non sia maggiore di *AC*, ma minore di esso: Heiberg tuttavia lo dispone in Appendice, come interpolazione indubitabile.

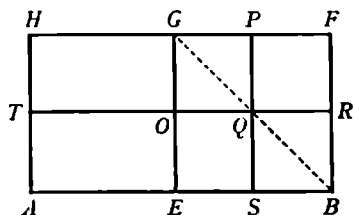
[16] È questo il problema classico dell'applicazione ellittica delle aree generalizzato da Euclide ai parallelogrammi contenuti entro angoli qualunque anziché entro angoli retti.

Il lettore potrà rivedere le note alla II, 5 e alla VI, 27.

Già nell'enunciare il problema, Euclide specifica le condizioni alle

non sia maggiore del parallelogrammo descritto sulla metà di AB e simile al parallelogrammo mancante, e la figura D sia [appunto] il parallelogrammo a cui occorre che quello mancante sia simile; si deve dunque applicare sulla retta

quali i dati debbono soddisfare per assicurare la possibilità di risoluzione, e fa ciò riferendosi alla proposizione immediatamente precedente VI, 27.

Riferiamoci, per semplicità, al caso dell'angolo retto. Si tratta dunque di costruire un rettangolo $ASQT$ di area data C, avente per base una parte AS di AB, ed avente per altezza l'altra parte ($SB = SQ$). Cioè il rettangolo *applicato* $ASQT$ è mancante, *deficiente*, di un quadrato $SBRQ$.

L'area C da applicare, s'è detto, non deve superare il massimo valore possibile, ossia non deve superare il quadrato $AEGH$ costruito sulla metà AE ($= EB$) della retta data.

Si comincia appunto col costruire i due quadrati uguali $AEGH$, $EBFG$. Se per caso ciascun quadrato ha proprio l'area C, il problema è risolto, poiché il rettangolo (quadrato, nel nostro caso) $AEGH$ ha l'area data C ed è *mancante* di un quadrato $EBFG$.

È, questo, il cosiddetto *diorisma*, cioè il caso di separazione tra possibilità e impossibilità di risoluzione del problema. Potremo dunque dire che nel problema dell'applicazione ellittica delle aree il diorisma consiste nel caso in cui l'area applicata è uguale all'area mancante ($AEGH = EBFG$). Cioè, posto $AB = a$, $SQ = SB = x$, C = area da applicare, si tratta di risolvere l'equazione:

$$(a - x)\, x = C$$

ossia:

$$x^2 - ax + C = O$$

Il caso del diorisma corrisponde dunque al caso del discriminante nullo:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - C = O$$

cioè:

$$C = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \text{ (massima area applicabile)}$$

Sotto la dicitura: *area applicata uguale all'area mancante* troviamo ricordato il diorisma dell'applicazione ellittica (la scoperta di Leone? Cfr. nota alla prop. prec. VI, 27) in un celebre passo di Platone: quello cosiddetto dell'*ipotesi geometrica* nel *Menone* (86*a*-87*b*) (cfr. A. FRAJESE, *Su un passo geometrico controverso del Menone*, in «Rivista di filologia classica», 1943, pp. 100-111, e in «Bollettino dell'Unione matematica italiana», serie II, anno V, n. 3 aprile-giugno 1943, pp. 182-189 oppure: A. FRAJESE,

data AB un parallelogrammo uguale al poligono dato C, e che manchi di un parallelogrammo il quale sia simile a D.

Si divida AB per metà nel punto E, si descriva su EB il parallelogrammo $EBFG$, simile e similmente disposto rispetto a D (VI, 18), e si completi il parallelogrammo $AEGH$.

Se dunque $AEGH$ fosse uguale a C, si sarebbe già conseguito quanto proposto; sarebbe stato difatti applicato alla retta data AB il parallelogrammo $AEGH$, uguale al poligono dato C e mancante di un parallelogrammo $EBFG$, simile a D. Ma se non è in tal modo, sia $AEGH$ maggiore

Attraverso la storia della matematica, Roma (Veschi), 1962, pp. 192-196; 2ª ediz., Firenze (Le Monnier), 1969, pp. 212-217.

In che consiste il procedimento risolutivo di Euclide? Esso equivale al nostro procedimento aritmetico che conduce alla formula risolutiva:

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - C}$$

Viene infatti costruito un quadrato $GPQO$ equivalente alla differenza tra il quadrato $EBFG$ e l'area C da applicare (si fa ciò applicando la VI, 25), sicché lo gnomone $OEBFPQO$ è uguale a $EBFG - (EBFG - C)$ ossia è uguale a C. Ma lo gnomone in questione si spezza nella somma di due rettangoli:

$$OEBFPQO = OEBR + QRFP$$

ossia (per il teorema dello gnomone I, 43)

$$OEBFPQO = AEOT + ESQO$$

ossia ancora:

$$C = ASQT$$

Dunque il rettangolo $ASQT$ risolve il problema, poiché ha l'area richiesta C.

Quindi:

$$AS = AE + ES = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - C}$$

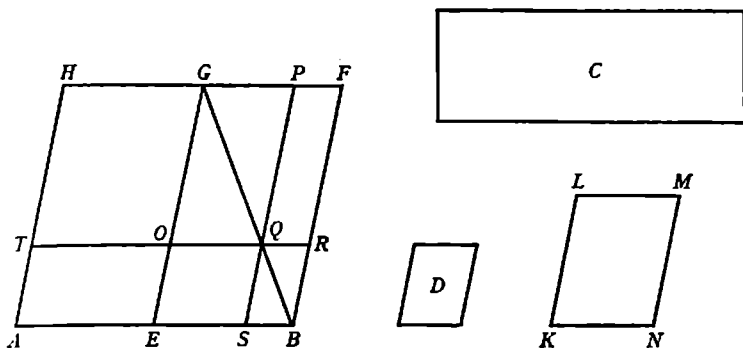
essendo $ES = OQ$ il lato del quadrato di area $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - C$, per la costruzione eseguita.

È questa una delle radici (corrispondente alla base AS). L'altra radice (corrispondente all'altezza SB) è

$$SB = EB - ES = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - C}$$

di C. Ora, $AEGH$ è uguale ad $EBFG$, per cui anche $EBFG$ è maggiore di C. Si costruisca adesso il parallelogrammo $KLMN$ uguale all'eccedenza per cui $EBFG$ è maggiore di C, [cioè uguale alla differenza $EBFG - C$,] e simile e similmente disposto rispetto a D (VI, 25). Ma D è simile ad $EBFG$; quindi anche $KLMN$ è simile ad $EBFG$ (VI, 21). Siano dunque LK lato omologo di GE, e LM lato omologo di GF. Ma poiché $EBFG$ è uguale alla somma di C e di $KLMN$, e si ha che $EBFG$ è maggiore di $KLMN$; pure GE è quindi maggiore di LK, e GF è maggiore di LM. Si pongano GO uguale a LK, e GP uguale a LM, e si completi il parallelogrammo $OGPQ$; esso è perciò uguale e simile a $KLMN$. Quindi $OGPQ$ è simile ad $EBFG$ (VI, 21), per cui $OGPQ$ è posto intorno alla stessa diagonale di $EBFG$ (VI, 26). Sia GQB tale loro diagonale, e si descriva [completa] la figura.

Poiché dunque $EBFG$ è uguale alla somma di C, $KLMN$, ed in tali aree $OGPQ$ è uguale a $KLMN$, si ha che il gnomone rimanente di $EBFG$ è uguale alla figura C che rimane della somma di C, $KLMN$[, ossia: poiché $EBFG = C + KLMN$, e d'altra parte: $EBFG = OGPQ +$ gnomone $OEBFPQO$, si ricava: $C + KLMN = OGPQ +$ gnomone $OEBFPQO$. Ma $KLMN = OGPQ$, e quindi ciò che rimane è uguale a ciò che rimane, ossia gnomone $OEBFPQO = C$]. E poiché $PQRF$ è uguale ad $OESQ$ (I, 43), si aggiunga in comune $QSBR$ [ai due parallelogrammi]; tutto quanto $PSBF$ è perciò uguale a tutto quanto $OEBR$. Ma $OEBR$ è uguale a $TAEO$, poiché è pure uguale il lato AE al lato EB (I, 36); quindi anche $TAEO$, $PSBF$ sono uguali. Si aggiunga in comune $OESQ$ [ai due parallelogrammi]; tutto quanto $TASQ$ è quindi uguale a tutto quanto il gnomone $OEBFPQO$. Ma il gnomone $OEBFPQO$ fu dimostrato uguale a C; perciò anche $TASQ$ è uguale a C.

Dunque, sulla retta data AB è stato applicato il parallelogrammo $TASQ$ uguale al poligono dato C, e mancante del parallelogrammo $QSBR$, il quale è simile a D. – C.D.F.

APPLICA: I, 3, 10, 36, 43; VI, 18, 21, 25, 26, 27.

È APPLICATA IN: X, 17, 33, 34, 35, 54, 55, 57, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 98.

PROPOSIZIONE 29.

Applicare ad una retta data un parallelogrammo uguale ad un poligono dato, e che sia eccedente di un parallelogrammo simile ad un parallelogrammo dato[17].

Siano *AB* la retta data, *C* il poligono dato, uguale al quale occorre applicare ad *AB* un parallelogrammo, e *D* sia

[17] Si tratta ora dell'applicazione *iperbolica*, o *per eccesso*. Si rinvia alle note alla II, 5, alla II, 6 e alla VI, 28. Con riferimento agli angoli retti, si tratta di costruire un rettangolo di area data, avente per base la somma di un segmento dato e di un altro segmento che al tempo stesso deve essere altezza del rettangolo:

$$(a + x)\, x = C$$

Il problema non ammette diorisma, cioè è sempre risolubile. Infatti l'area da applicare non ha un massimo da non oltrepassare, dal momento che si può prendere la retta *aggiunta* x grande quanto si vuole.

Ciò si verifica anche calcolando il discriminante:

$$\Delta = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + C$$

dell'equazione

$$x^2 + ax - C = O$$

Come si vede, il discriminante è sempre positivo.

il parallelogrammo a cui occorre che la figura eccedente sia simile; si deve dunque applicare alla retta data *AB* un parallelogrammo uguale al poligono *C*, e che sia eccedente di un parallelogrammo simile a *D*.

Si divida *AB* per metà in *E*, si descriva su *EB* il parallelogrammo *EBLF*, simile e similmente disposto rispetto a *D*, e si costruisca il parallelogrammo *GKHR*, uguale alla somma delle due figure *EBLF* e *C* e simile e similmente disposto rispetto a *D* (VI, 25). Siano inoltre *KH* lato omologo di *FL*, e *KG* lato omologo di *FE*. Ora, poiché *GKHR* è maggiore di *EBLF*, anche *KH* è maggiore di *FL*, e *KG* è maggiore di *FE*. Si prolunghino le rette *FL*, *FE*, siano *FLM* uguale a *KH* e *FEN* uguale a *KG*, e si completi il parallelogrammo *NFMO*; quindi *NFMO* è uguale e simile a *GKHR*. Ma *GKHR* è simile ad *EBLF*, per cui anche *NFMO* è simile ad *EBLF* (VI, 21); *EBLF* è quindi posto intorno alla stessa diagonale di *NFMO* (VI, 26). Si conduca tale loro diagonale *FO*, e si completi la descrizione della figura.

Poiché *GKHR* è uguale alla somma di *EBLF*, *C*, ma *GKHR* è uguale a *NFMO*, anche *NFMO* è uguale alla somma $EBLF + C$. Si sottragga in comune [dai due termini] il parallelogrammo *EBLF*; quindi il gnomone *NEBLMON*, che rimane dell'uno, è uguale a *C* che rimane dell'altro: difatti $NFMO - EBLF = C$. E poiché *AE* è uguale ad *EB*, pure *AENS* è uguale ad *EBTN* (I, 36), cioè a *LBPM* (I, 43). Si aggiunga in comune *ENOP* [ai due parallelogrammi]; tutto quanto il parallelogrammo *ASOP* è quindi uguale al gnomone *NEBLMON*. Ma il gnomone *NEBLMON* è uguale a *C*; perciò anche *ASOP* è uguale a *C*.

Dunque, alla retta data *AB* è stato applicato il parallelogrammo *ASOP* uguale al poligono dato *C*, e che eccede del parallelogrammo *BTOP*, il quale è simile a *D*, poiché anche *BTOP* è simile ad *EBLF* (VI, 24). – C.D.F.

APPLICA: I, 3, 10, 36, 43; VI, 21, 24, 26.

È APPLICATA IN: VI, 30.

PROPOSIZIONE 30.

Dividere in estrema e media ragione una retta terminata data[18].

Sia AB la retta terminata data; si deve dunque dividere la retta AB in estrema e media ragione (VI, def. III).

Su AB si descriva il quadrato $ABHC$, e si applichi ad AC il parallelogrammo $CFDK$, uguale ad $ABHC$ ed eccedente della figura $AEDK$ simile ad $ABHC$ (VI, 29).

Ma $ABHC$ è un quadrato; quindi anche $AEDK$ è un quadrato. E poiché $ABHC$ è uguale a $CFDK$, si sottragga in comune il rettangolo $FEAC$ [dai due parallelogrammi], per cui $EBHF$ che rimane dell'uno è uguale ad $AEDK$ che rimane dell'altro. Ma $EBHF$ ha i suoi angoli rispettivamente uguali a quelli di $AEDK$; nei parallelogrammi [rettangoli] $EBHF$, $AEDK$ i lati intorno agli angoli uguali sono perciò inversamente proporzionali (VI, 14); si ha così $FE : ED =$ $= AE : EB$. Ma FE è uguale ad AB, ed ED è uguale ad AE. Quindi $AB : AE = AE : EB$. Ma AB è maggiore di AE; perciò anche AE è maggiore di EB (V, def. V).

[18] Si tratta della costruzione della sezione aurea di un segmento. Il problema è stato già risolto in modo indipendente dalla teoria delle proporzioni nel libro secondo (si veda la nota alla def. III di questo libro sesto).

Dunque, la retta AB è stata divisa in estrema e media ragione in E, e la parte maggiore di essa è AE. - C.D.F.[a]

APPLICA: I, 46; V, 7, 11; VI, 14, 29.

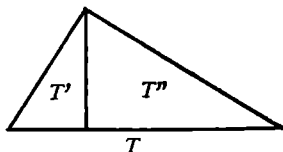
PROPOSIZIONE 31.

Nei triangoli rettangoli la figura descritta sul lato opposto all'angolo retto è uguale alla somma delle figure simili e similmente descritte sui lati che comprendono l'angolo retto[19].

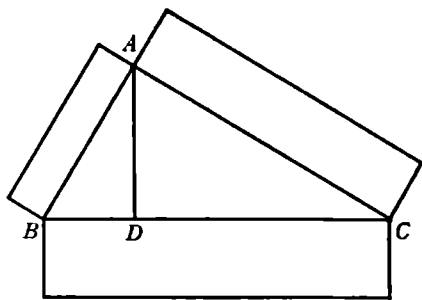
Sia ABC un triangolo rettangolo che abbia retto l'angolo BAC; dico che la figura descritta su BC è uguale alla somma delle figure simili e similmente descritte su BA, AC.

a. Dopo la clausola terminale c.d.f. (ὅπερ ἔδει ποιῆσαι) i Mss. dànno una dimostrazione alternativa, che Heiberg relega in Appendice, qui notando che Campano ha a VI, 29 (l'equivalente di VI, 30; *op. cit.*, 53 *r.*): « idem etiam potest demonstrari ex XI secundi »; anche per questo è intrinsecamente improbabile che Euclide abbia sentito il bisogno di aggiungere lui a se stesso una tale prova alternativa: se la avesse preferita, avrebbe dato solo questa (cfr. HEATH, *op. cit.*, vol. II, p. 268).

[19] Questo teorema costituisce l'estensione del teorema di Pitagora, il quale si presenta come caso particolare quando i poligoni, simili tra loro, descritti sui lati di un triangolo rettangolo, sono dei quadrati.

Come altro caso particolare notevole, si presenta quello di un triangolo rettangolo T che venga diviso dall'altezza in due triangoli rettangoli T', T''. Questi sono simili a T e simili tra loro. Ed appunto T' e T'', costruiti sui due cateti, dànno, sommati insieme, proprio il triangolo totale T (simile agli altri due) costruito sull'ipotenusa.

Si conduca la perpendicolare AD [su BC].

Poiché dunque nel triangolo rettangolo ABC è stata condotta la perpendicolare AD dal vertice dell'angolo retto in A alla base BC, i triangoli ABD, ADC adiacenti alla perpendicolare sono simili a tutto quanto il triangolo ABC e fra loro (VI, 8). E poiché ABC è simile ad ABD, si ha che $BC : AB = AB : BD$ (VI, def. I). Ma poiché tre rette sono proporzionali, la prima sta alla terza come la figura descritta sulla prima sta a quella simile e similmente descritta sulla seconda (VI, 19, coroll.). Quindi BC sta a BD come la figura descritta su BC sta alla figura simile e similmente descritta su AB. Per la stessa ragione, pure BC sta a DC come la figura descritta su BC sta a quella descritta su AC. Cosicché anche, BC sta alla somma di BD, DC come la figura descritta su BC sta alla somma delle figure simili e similmente descritte su AB, AC (V, 7, coroll. e V, 24). Ma BC è uguale alla somma di BD, DC, per cui pure la figura descritta su BC è uguale alla somma delle figure simili e similmente descritte su BA, AC.

Dunque, nei triangoli rettangoli... (secondo l'enunciato). – C.D.D. ª.

Applica: I, 11; V, 7 coroll., 24; VI, 8, 19 coroll.

a. Proclo, alle pp. 426, 6 segg., dove parla del teorema di Pitagora e della dimostrazione «scientifica» che di esso ha operato l'autore degli *Elementi*, accredita a merito particolare di Euclide la massima generalizzazione ed estensione del teorema, cioè di I, 47, che si ha proprio con questa proposizione 31 del libro sesto.

I Mss. dànno di VI, 31 una dimostrazione alternativa posta da Heiberg in Appendice.

PROPOSIZIONE 32.

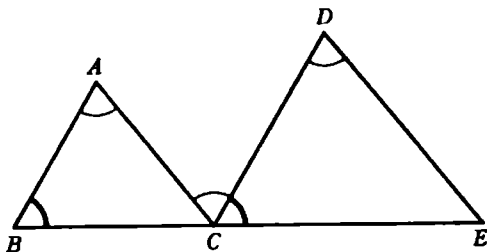
Se due triangoli, che abbiano rispettivamente due lati proporzionali a due lati, vengono uniti in un angolo in modo che i loro lati omologhi siano anche paralleli, i lati rimanenti dei triangoli saranno fra loro in linea retta.

Siano ABC, DCE due triangoli aventi rispettivamente i due lati AB, AC proporzionali ai due lati DC, DE, in modo che AB stia ad AC come DC sta a DE [$AB : AC = DC : DE$], e siano paralleli AB a DC ed AC a DE; dico che BC è in linea retta con CE.

Infatti, poiché la retta AB è parallela alla retta DC, e la retta AC si trova a cadere su esse, gli angoli alterni BAC, ACD sono uguali fra loro (I, 29). Per la stessa ragione, anche l'angolo CDE è uguale all'angolo ACD. Cosicché pure BAC, CDE sono uguali. E poiché ABC, DCE sono due triangoli aventi rispettivamente un angolo, cioè l'angolo in A, uguale ad un angolo, quello in D, e proporzionali i lati intorno agli angoli uguali, in modo che $AB : AC = DC : DE$, il triangolo ABC ha i suoi angoli rispettivamente uguali a quelli del triangolo DCE (VI, 6); l'angolo ABC è quindi uguale all'angolo DCE. Ma fu dimostrato che sono uguali anche gli angoli ACD, BAC, per cui tutto quanto l'angolo ACE è uguale alla somma dei due angoli ABC, BAC. Si aggiunga in comune l'angolo ACB; quindi $ACE + ACB = ABC + BAC + ACB$. Ma la somma degli angoli ABC, BAC, ACB è uguale a due retti (I, 32); quindi anche la somma degli angoli ACE, ACB è uguale a due retti. Con una retta AC, e nel punto C su essa, le due rette CB, CE che non giacciono dalla stessa parte formano perciò gli angoli adiacenti ACE, ACB uguali a due retti; perciò BC è in linea retta con CE (I, 14).

Dunque, se due triangoli che abbiano rispettivamente due lati proporzionali a due lati... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 14, 19, 32; VI, 6.

È APPLICATA IN: XIII, 17.

PROPOSIZIONE 33.

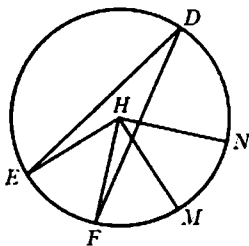
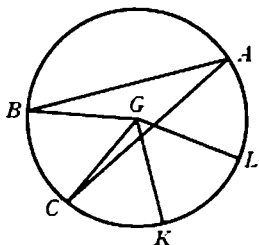
In cerchi uguali, sia gli angoli al centro che quelli alla circonferenza hanno fra loro lo stesso rapporto degli archi su cui insistono [a].

Siano *ABC*, *DEF* cerchi uguali, *BGC*, *EHF* siano angoli ai loro centri *G*, *H* e *BAC*, *EDF* angoli alla circonferenza in ciascun cerchio; dico che l'arco *BC* sta all'arco *EF* come l'angolo *BGC* sta all'angolo *EHF* e come l'angolo *BAC* sta all'angolo *EDF*.

a. Aggiunse Teone a questo punto: « ed infine (hanno fra loro lo stesso rapporto) pure settori (dei cerchi) in quanto costruiti (insistendo) ai centri »; naturalmente, quando Euclide determina: « dico che l'arco *BC*..., ecc. », dopo *l'angolo EDF* si ha un'altra aggiunta: « ed inoltre come sta il settore circolare *GBOC* al settore circolare *HEQF* ». La dimostrazione dell'aggiunta all'enunciato, di cui si dice sopra, è posta alla fine della conclusione con la clausola introduttiva: « Dico che si ha pure che l'arco *BC* sta all'arco *EF* come il settore circolare *GBC* sta al settore circolare *HEF* », ed è da Heiberg collocata in Appendice. Che tutto quanto sia opera di Teone lo desumiamo dalla stessa affermazione che Teone fa al proposito, citando proprio il VI libro di Euclide nella sua edizione ed attribuendo esplicitamente a sé l'assunto e la dimostrazione di cui si tratta, durante il suo commentario alla μαθηματικὴ σύνταξις di Tolemeo, I, p. 201 ed. Halma = p. 50 ed. di Basilea; le interpolazioni di Teone, come pure la dimostrazione, sono omesse da Campano a VI, 32 (corrispondente a VI, 33; *op. cit.*, 53 *v.*) ed il codice P le ha soltanto in mano più recente, al margine o fra le linee. Teone aggiunge al suo teorema sui settori circolari pure un corollario, in Appendice con quella dimostrazione presso Heiberg, che cioè « ... settore circolare sta a settore circolare come anche sta angolo (al centro) ad angolo (al centro corrispondentemente) ».

Infatti, si pongano quanti si voglia archi successivi *CK*, *KL* uguali all'arco *BC*, e quanti si voglia archi successivi *FM*, *MN* uguali all'arco *EF*, e si traccino le congiungenti *GK*, *GL*, *HM*, *HN*.

Poiché dunque gli archi *BC*, *CK*, *KL* sono uguali fra loro, anche gli angoli *BGC*, *CGK*, *KGL* sono uguali fra loro (III, 27); l'arco *BL* è quindi tante volte multiplo dell'arco *BC* quante volte è anche multiplo l'angolo *BGL* dell'angolo *BGC*. Per la stessa ragione, pure l'arco *EN* è tante volte multiplo dell'arco *EF* quante volte è anche multiplo l'angolo *EHN* dell'angolo *EHF*. Se perciò l'arco *BL* è uguale all'arco *EN*, pure l'angolo *BGL* è uguale all'angolo *EHN* (III, 27), se l'arco *BL* è maggiore dell'arco *EN*, anche l'angolo *BGL* è maggiore dell'angolo *EHN*, e se *BL* è minore, *BGL* è minore. Date quindi quattro grandezze, cioè i due archi *BC*, *EF* ed i due angoli *BGC*, *EHF*, sono state prese grandezze equimultiple dell'arco *BC* e dell'angolo *BGC*, cioè l'arco *BL* e l'angolo *BGL*, ed altre grandezze equimultiple dell'arco *EF* e dell'angolo *EHF*, cioè l'arco *EN* e l'angolo *EHN*. Ed è stato dimostrato che se l'arco *BL* supera l'arco *EN*, anche l'angolo *BGL* supera l'angolo *EHN*, se *BL* è uguale ad *EN*, corrispondentemente *BGL* è uguale ad *EHN*, e se *BL* è minore, *BGL* è minore. Quindi l'arco *BC* sta all'arco *EF* come l'angolo *BGC* sta all'angolo *EDF* (V, def. V). Ma si ha la proporzione tra gli angoli: $BGC : EHF = BAC : EDF$ (V, 15) – difatti ciascuno è rispettivamente due volte l'altro (III, 20). Perciò anche l'arco *BC* sta all'arco *EF* come l'angolo *BGC* sta all'angolo *EHF* e come l'angolo *BAC* sta all'angolo *EDF*.

Dunque, in cerchi uguali, sia gli angoli al centro che quelli alla circonferenza... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: III, 20, 27; V, 11, 15.

È APPLICATA IN: XIII, 8, 9.

LIBRO SETTIMO

Come è stato detto nella nota introduttiva al precedente libro sesto, Euclide abbandona ora la indifferenza *nei riguardi della commensurabilità o incommensurabilità delle grandezze: indifferenza che è necessaria per una trattazione geometrica, e alla quale risponde appunto la teoria delle proporzioni del libro quinto: teoria che, come è noto, si riferisce indifferentemente a grandezze commensurabili e incommensurabili, come appare già fin dalla celebre definizione quinta.*

Ora, invece, Euclide abbandona la geometria, e si dedica, nei tre libri settimo, ottavo, nono, allo studio di quelle particolari grandezze, tutte commensurabili tra loro, che son costituite dai numeri.

Inutile avvertire che i numeri *trattati da Euclide sono esclusivamente i numeri interi.*

Dalla geometria si passa dunque all'aritmetica, ma in connessione col libro quinto, ossia con la trattazione dei rapporti tra grandezze, della quale ora si viene a considerare un caso particolare: precisamente il caso particolare estremamente semplice al quale si rivolgono le prime proposizioni del libro quinto. D'altra parte i numeri *(interi) rientrano tra le grandezze trattate nel libro quinto; soddisfano cioè alle condizioni a tali grandezze imposte nelle definizioni terza e quarta di detto libro.*

Nessun dubbio per quanto riguarda l'omogeneità (def. III). In sostanza l'omogeneità consiste nella possibilità di stabilire relazioni di uguaglianza, o di disuguaglianza di dato senso, tra grandezze, le quali possono venire anche addizionate tra

loro. Queste condizioni sono tutte evidentemente soddisfatte dai numeri. Lo stesso si dica per la condizione della def. IV (soddisfare al cosiddetto postulato di Archimede). Se, infatti, due numeri, a, b *sono disuguali in un certo senso (ad esempio se è* a > b), *è sempre possibile trovare un multiplo del minore che superi il maggiore: basta, ad esempio, considerare il prodotto* ab *(dove* a, b, *essendo* numeri *in senso euclideo, sono ambedue maggiori dell'unità).*

A proposito di quest'ultima osservazione, ricordiamo che Euclide non considera esplicitamente *l'unità come numero, sicché il numero è una pluralità di unità (si esclude cioè che l'*insieme *di unità contenga un solo elemento: VII, def. II). Ma nella definizione undicesima si dice che numero primo è quello che è diviso soltanto dall'unità; viene ammessa cioè l'unità tra i divisori. Non viene invece ammesso come divisore il numero stesso (cioè l'unità viene, per dir così,* accettata *come divisore, ma non come quoziente).*

Questa esclusione, piuttosto strana, è forse da mettersi in relazione con la definizione di numero perfetto *(VII, def. XXII): è questo un numero che è uguale alla somma dei suoi divisori.*

Per esempio:

$$6 = 1 + 2 + 3$$
$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

Come si vede dalla regola per trovare numeri perfetti (regola che viene ottenuta nell'ultima proposizione del libro nono, cioè come uno degli scopi finali dei libri aritmetici), tra i divisori figura l'unità, ma non figura il numero stesso (non potrebbe, altrimenti, nessun numero essere uguale alla somma dei suoi divisori).

E siccome la considerazione dei numeri perfetti ha un carattere tradizionale nell'aritmetica greca (sembra sia di origine pitagorica, nel senso che risalga ad una scuola pitagorica abbastanza antica), Euclide venne, per motivi di uniformità, costretto ad una esclusione come quella sopra veduta. Va tuttavia osservato che Euclide, in una data occasione, ammette che una grandezza misura *sé stessa.*

Euclide considera alcune operazioni tra i numeri. Ma trascura pressoché sempre l'addizione e la sottrazione, limitandosi alla operazione di moltiplicazione (e, in senso inverso, alla divisione). In corrispondenza, Euclide non si occupa delle progressioni aritmetiche (o per differenza), ma studia soltanto quelle geometriche (o per quoziente).

Certamente Euclide ha avuto di mira la possibilità di conoscere l'intima struttura, per dir così, di ciascun numero: intima struttura che, come è noto, non viene messa in luce da una composizione per addizione, ma dalla composizione per moltiplicazione. È cioè la scomposizione in fattori (primi, in ultima analisi) l'operazione che conduce a conoscere come ciascun numero sia fatto.

Quindi la scomposizione in fattori primi è uno degli scopi essenziali dei libri aritmetici: in particolare del libro settimo. Nella prop. VII, 31 Euclide dimostra che qualunque numero composto ammette come divisore qualche numero primo: teorema, questo, sul quale la scomposizione in fattori primi si fonda. Non solo: ma nella prop. VII, 30, immediatamente precedente, si dà un teorema che permette di dedurre l'univocità della suddetta scomposizione.

Ma non si deve pensare che Euclide dia effettivamente il modo pratico per compiere l'operazione, o che fornisca comunque un esempio numerico. Ciò è completamente estraneo allo stile della sua trattazione: come invano si cercherebbe negli Elementi la benché minima regola pratica di misura (pure trovandovisi i relativi presupposti teorici), così invano si cercherebbe il minimo esempio pratico numerico di operazione. Anzi si giunge all'estremo che in taluna proposizione nella quale entrano esplicitamente i numeri 1 e 2, Euclide ricorre all'indicazione dell'unità con una lettera dell'alfabeto che non è quella « alfa » propria del numero 1 nella scrittura dei numeri greci e parla sempre di unità: similmente per il numero 2, che viene indicato come « diade ».

Nello stesso ordine di idee, si ha la determinazione del massimo comune divisore tra due o tre numeri all'inizio del libro settimo (VII, 2, 3) e quella del minimo comune multiplo alla fine del libro stesso (VII, 34, 36).

L'aritmetica di Euclide ha un valido fondamento nella teoria delle proporzioni. Ma non si ricorre alla definizione e alla teoria del libro quinto: si dà invece, per i numeri, un'apposita definizione (la ventesima del libro settimo) la quale dice, in sostanza, che perché tra quattro numeri si abbia la proporzione:

$$a : b = c : d$$

deve verificarsi uno dei due casi seguenti:

1) o il primo e il terzo numero sono equimultipli del secondo e del quarto:

$$ma : a = mb : b$$

2) o primo e terzo numero sono la stessa frazione del secondo e del quarto:

$$^m/_n\, a : a = {}^m/_n\, b : b$$

Come si vede, si tratta di un caso particolare della definizione di proporzione del libro quinto, e precisamente del caso particolare, relativo alle grandezze commensurabili, che viene trattato all'inizio dello stesso quinto libro.

Sicché quelle prime proposizioni (V, 1, 2, 3, 4, 5, 6) possono essere utilizzate anche per le proporzioni tra numeri del libro settimo (vedi nota apposita sulle cosiddette assunzioni *di detto libro, prima delle proposizioni).*

Ma a parte questo, non occorre risalire al libro quinto per altre proposizioni che risultano di per sé evidenti per le proporzioni tra numeri. È, questo, argomento di disaccordo tra Heiberg (che, ad esempio per la proprietà transitiva dell'uguaglianza di rapporti tra numeri, vorrebbe risalire alla V, 11) e Heath, di parere contrario (così come Enriques).

Euclide si serve, s'è detto, delle proporzioni nei libri aritmetici. Per mezzo di esse egli giunge, infatti, a considerare le potenze dei numeri. Vengono considerate le proporzioni continue: anzi di solito si tratta di più proporzioni continue legate tra loro per il fatto che i relativi rapporti son tutti uguali tra loro.

Ad esempio:

$$a : b = b : c = c : d = d : e = \ldots$$

Per brevità abbiamo chiamato proporzione continuata *l'insieme di queste proporzioni continue a rapporto costante. Si dice allora che i numeri* a, b, c, d, e... *sono in* proporzione continuata. *Naturalmente se i numeri sono soltanto tre, si ricade nella consueta* proporzione continua $a : b = b : c$.

Se si indica con q *il rapporto costante fra ciascun termine e il precedente, la proporzione continuata si presenta così:*

$$a : aq = aq : aq^2 = aq^2 : aq^3 \textit{ ecc.}$$

Si vede così che i termini di una proporzione continuata:

$$a \cdot aq \cdot aq^2 \cdot aq^3 \ldots$$

non son altro che i termini di una progressione geometrica avente per ragione $q = b/a$, *ossia tale che ciascun termine si ottiene dal precedente moltiplicandolo per il fattore costante* q.

Se poi la proporzione continuata, o progressione geometrica che sia, ha come primo termine l'unità, essa diviene:

$$1 : q = q : q^2 = q^2 : q^3 = q^3 : q^4 = \ldots$$

cioè i termini della progressione vengono ad essere, a partire dal terzo termine (*cioè a partire da* q^2, *che è terzo dopo* 1 *e* q), *le potenze successive del numero* q.

È questo il modo col quale Euclide introduce le potenze, e col quale dà pure alcune proprietà di esse.

Va aggiunto che nella penultima proposizione del libro nono (*IX*, 35) *Euclide dà anche una regola per trovare la somma dei termini di una progressione geometrica. Detta regola, che è esattamente corrispondente a quella che oggi adoperiamo, serve poi per giungere ad un'altra regola, che viene esposta nell'ultima proposizione del libro nono* (*IX*, 36), *e che, come abbiamo già detto, permette di trovare numeri perfetti.*

Terminiamo questa nota richiamando l'attenzione del lettore sulla IX, 20, che è una delle più note proposizioni di Euclide («La serie dei numeri primi è illimitata»), e sulle IX, 21-33, nelle quali, in contrasto col carattere delle altre proposizioni, si tratta anche di addizioni e di sottrazioni, nella teoria dei numeri pari e dispari, rievocazione di antichissima dottrina. Ma per questo si veda la nota relativa.

A. F.

DEFINIZIONI

I. Unità è ciò secondo cui ciascun ente è detto uno [1].

II. Numero è una pluralità composta da unità [2].

III. Un numero è « parte » di un [altro] numero, il minore di quello maggiore, quando esso misuri il maggiore (= lo divida) [3].

[1] Questa *definizione* di unità sembra alludere ad una sorta di *idea* platonica. Ogni singola cosa è detta « una » se è in relazione con l'« unità » (saremmo quasi tentati di dire: se *partecipa* dell'idea dell'unità).

[2] Da questa definizione si rileva che « numeri » sono per Euclide esclusivamente i numeri interi, allo studio dei quali si rivolgono appunto i libri aritmetici (settimo, ottavo e nono). Già nella nota introduttiva a questi libri abbiamo richiamato l'attenzione sul fatto che i numeri interi sono per Euclide particolari grandezze del libro quinto, tutte commensurabili tra loro. I *numeri*, infatti, soddisfano alle condizioni espresse dalle definizioni terza e quarta del libro quinto (sono cioè *omogenei*, e soddisfano al postulato di Archimede).

[3] Un primo numero è *parte* di un secondo se lo misura (divide), cioè se è un suo sottomultiplo: il secondo numero è quindi multiplo del primo.

Per esempio, 2 è *parte* di 6. Nella seguente definizione quarta si parla invece di *parti*, al plurale. Detta definizione è data in forma negativa: un primo numero è *parti* di un altro se *non lo divide*, cioè se non è sottomultiplo dell'altro. Si tratta di un'espressione abbreviata: *parti* sta per *somma di parti uguali*. Così, per esempio, mentre 2 (come s'è detto) è *parte* di 6, il numero 4, invece, è *parti* di 6, perché non divide 6. Ma si può porre 4 sotto la forma:

$$4 = 2 + 2$$

ossia 4 è somma di (due) parti uguali a 2. Se i due numeri sono primi tra loro, occorrerebbe considerare anche l'unità come *parte* di ciascun numero. Per esempio, 3 è *parti* di 7 cioè:

$$3 = 1 + 1 + 1$$

Ma effettivamente nella definizione VII, 2 si esclude che l'unità venga considerata come numero: quest'ultimo è infatti una pluralità (πλῆθος) composta da unità.

IV. È «parti» invece di un numero, quando non lo misuri (= non lo divida).

V. Un numero maggiore è multiplo di un numero minore, quando sia misurato (= sia diviso) dal minore.

VI. Numero pari è quello che è divisibile in due parti (= numeri) uguali.

VII. Numero dispari è quello che non è divisibile in due parti (= numeri) uguali, ossia quello che differisce di un'unità da un numero pari.

VIII. Numero parimente pari è quello che è misurato (= è diviso) da un numero pari secondo un numero pari[4].

IX. Numero parimente dispari è quello che è misurato (= è diviso) da un numero pari secondo un numero dispari.

X. Numero disparimente dispari è quello che è misurato (= è diviso) da un numero dispari secondo un numero dispari.

[4] Diamo qualche esempio riguardante le definizioni 8, 9, 10.

Il numero 4 è parimente pari, perché se viene diviso per il numero pari 2, dà il quoziente pari 2.

Il numero 10 è parimente dispari, perché se vien diviso per il numero pari 2 dà il quoziente dispari 5.

Ma un numero può essere al tempo stesso parimente pari e parimente dispari: così è ad esempio 12, che diviso per 2 dà il quoziente pari 6, mentre diviso per 4 dà il quoziente dispari 3.

Nelle proposizioni 32 e 33 del libro nono vengono specificati quali sono i numeri che appartengono *esclusivamente* all'una o all'altra categoria. Precisamente, viene ivi mostrato che le potenze di base 2, a partire da 4, sono soltanto *parimente pari*, mentre sono soltanto *parimente dispari* quei numeri che, divisi per 2, dànno un quoziente dispari. Nella seguente proposizione IX, 34, poi, si mostra che qualunque numero pari che non sia compreso in nessuna delle due categorie indicate nella IX, 32 e nella IX, 33 è al tempo stesso *parimente pari* e *parimente dispari*.

Finalmente la definizione VII, 10 introduce i numeri *disparimente dispari*: sono quelli che, divisi per un numero dispari, dànno un quoziente dispari: ad esempio 15, che, diviso per 3, dà il quoziente 5.

XI. Numero primo è quello che è misurato (= è diviso) soltanto dall'unità [a] [5].

XII. Numeri primi fra loro sono quelli che hanno soltanto l'unità come misura (= divisore) comune [b].

XIII. Numero composto è quello che è misurato da (= ha per divisore) un qualche numero [6].

XIV. Numeri composti fra loro sono quelli che hanno un qualche numero come misura comune (= hanno un numero per divisore comune).

XV. Si dice che un primo numero moltiplica un secondo numero, quando si ottenga un terzo numero componendolo con la somma di tante volte il secondo per quante sono le unità del primo.

XVI. Quando due numeri, moltiplicandosi fra loro, producano un terzo numero, il prodotto si chiama numero piano, ed i numeri che si moltiplicano fra loro si chiamano i suoi « lati ».

a. Letteralmente, come sempre d'ordinario: *da una unità*; usiamo, in traduzione, dall'unità, l'unità, ecc., qui ed in séguito, per nostra normale consuetudine.

b. Letteralmente: quelli che sono misurati soltanto da una unità come misura comune; ciò vale pure per la XIV[a].

[5] Numero primo è per Euclide quello che è misurato (= diviso) soltanto dall'unità. Cioè non viene considerato il numero primo come diviso anche da sé stesso.

Probabilmente si tratta di una definizione entrata nell'uso, e mantenuta forse per un motivo di indole storico-tradizionale negli *Elementi*, poiché effettivamente Euclide ammette che un numero misuri sé stesso (ad esempio nella proposizione VII, 2, dove di un numero si dice che μετρεῖ καὶ ἑαυτόν, cioè « misura anche sé stesso »).

[6] Anche qui, e nella seguente def. 14, viene nettamente separata *l'unità* dai *numeri*, come, del resto, nella def. 2. Viene, infatti, esclusa l'unità sia come divisore, sia come quoziente. Un numero si dice composto se è misurato da un qualche numero: numero che è quindi diverso dall'unità, e che è anche diverso dal numero stesso (si avrebbe allora l'unità come quoziente).

Soltanto nella precedente defin. 11 di numero primo, si considera la possibilità che un numero venga misurato dall'unità: il confronto tra le due def. 11 e 13 mostra però chiaramente che l'unità non è considerata come numero.

XVII. Quando tre numeri, moltiplicandosi fra loro, producano un quarto numero, il prodotto si chiama numero solido, ed i numeri che si moltiplicano fra loro si chiamano i suoi «lati»[7].

XVIII. Numero quadrato è quello che è prodotto di due numeri uguali, ossia è un numero piano che ha per lati due numeri uguali.

XIX. [Numero] cubo è quello che è prodotto di tre numeri uguali, ossia è un numero solido che ha per lati tre numeri uguali.

XX. [Quattro] numeri sono in proporzione quando, a seconda che il primo sia multiplo, sottomultiplo, o una frazione qualunque del secondo numero, corrispondentemente il terzo sia lo stesso multiplo, o lo stesso sottomultiplo, o la stessa frazione del quarto[8].

[7] È strana la dicitura iniziale delle due def. 16 e 17: sembra quasi che si metta in dubbio il fatto che se due, o tre, numeri si moltiplichino tra loro essi diano origine ad un nuovo numero loro *prodotto*.

È opportuno anche, con riferimento alla def. 15 di moltiplicazione: « Si dice che un primo numero moltiplica un secondo... » osservare che il *primo numero* funge da moltiplicatore, il secondo da moltiplicando.

Infatti, sempre nella def. 15, è detto che il *terzo numero* (il prodotto) si compone « con la somma di tante volte il secondo quante sono le unità del primo ».

Si osservi inoltre che un numero piano può essere espresso in modi diversi come prodotto dei suoi *due lati*; così:

$$12 = 3 \cdot 4 = 6 \cdot 2$$

Analogamente per i numeri *solidi*. Così: $24 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot = 6 \cdot 2 \cdot 2$. Di più, lo stesso numero può essere insieme considerato come piano e come solido: così il numero *solido* 24 può essere considerato anche come *piano*:

$$24 = 4 \cdot 6 = 8 \cdot 3 = 12 \cdot 2$$

Si tratta, a quanto sembra, di quella concezione dei *numeri figurati* di origine pitagorica: anello fondamentale dell'aritmo-geometria, che costituì forse la base della matematica pitagorica in un primo periodo. È evidente, infatti, il legame tra numeri piani e rettangoli, e tra numeri solidi e parallelepipedi. Analogamente per i casi particolari dei numeri quadrati e cubi (def. 18 e 19).

[8] È, questa la definizione di proporzione tra quattro numeri. Essa si divide in tre casi: 1) che il primo e il terzo numero siano equimultipli rispettivamente del secondo e del quarto; 2) che il secondo e il quarto numero sono equimultipli rispettivamente del primo e del terzo (caso essenzialmente identico al primo); 3) che il primo e il terzo numero siano

XXI. Numeri piani e solidi simili [fra loro] sono quelli che hanno i lati proporzionali[9].

la stessa frazione m/n rispettivamente del secondo e del quarto. Si tratta cioè di quei casi particolari della definizione quinta del libro quinto, che Euclide ha già trattato nelle proposizioni introduttive del libro quinto stesso, con riferimento al caso del rapporto intero e del rapporto razionale:

$$ma : a = mb : b$$

e:

$$ma : na = mb : nb$$

Si delinea così meglio il collegamento tra libro quinto e libro settimo: quest'ultimo considera quelle particolari grandezze (tutte commensurabili tra loro) che sono costituite dai numeri (interi).

Per applicare la definizione (VII, 20) di proporzione tra numeri, basta trovare una sola coppia di numeri m, n tali che si abbia insieme

$$a = n/m \ b \ ; \qquad c = n/m \ d$$

ossia: $ma = nb$ e insieme: $mc = nd$.

Ma c'è ancora rispondenza con la definizione quinta del libro quinto (di proporzione tra grandezze, commensurabili o incommensurabili che siano a due a due). Infatti nel caso commensurabile la def. 5 del libro V (cfr. nota ivi) è sovrabbondante; basta trovare *una* coppia di numeri m, n per i quali si verifichino contemporaneamente le due uguaglianze:

$$ma = nb \qquad mc = nd$$

perché si possa concludere che le quattro grandezze siano a due a due nello stesso rapporto, cioè siano in proporzione.

[9] Ad esempio, sono *simili* i due numeri *piani*

$$6 = 2 \cdot 3 \quad \text{e} \quad 24 = 4 \cdot 6$$

Infatti i *lati* 2 e 3 dell'uno e i lati 4 e 6 dell'altro sono in proporzione:

$$2 : 4 = 3 : 6$$

Così son *simili* i due numeri *solidi*:

$$24 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \quad \text{e} \quad 192 = 4 \cdot 6 \cdot 8$$

Infatti:

$$2 : 4 = 3 : 6 = 4 : 8$$

Caso particolare di numeri piani simili sono due numeri quadrati (cfr. libro X, lemma I alla prop. 29).

Infatti:

$$a^2 = a \cdot a \qquad b^2 = b \cdot b$$

e si ha:

$$a : b = a : b.$$

Analogamente per i numeri cubi.

XXII. Numero perfetto è quello che è uguale alla somma delle proprie parti (= dei suoi divisori)[10].

[10] Ad esempio, il numero 6 è perfetto. Infatti i suoi divisori sono 1, 2, 3, la cui somma è appunto uguale al numero:

$$1 + 2 + 3 = 6$$

Così pure 28 è perfetto ($1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$).

Come si vede, in questa definizione l'unità va compresa tra i divisori, mentre va escluso il numero dato.

NOTA SULLE ASSUNZIONI DEL LIBRO SETTIMO

Indichiamo qui col nome di *assunzioni* certe proprietà di carattere intuitivo che Euclide non enuncia esplicitamente, ma che assume come valide e delle quali quindi si serve nella sua trattazione del libro settimo: esse potrebbero anche indicarsi come *postulati inespressi*.

Nel libro settimo vi sono fondamentalmente tre di tali «assunzioni»:

1) Se un numero divide due altri, divide anche la loro somma.

2) Se un numero divide due altri, divide anche la loro differenza.

3) Se un primo numero divide un secondo, divide anche qualunque multiplo del secondo.

Per esempio, nella prop. VII, 1 vengono usate le assunzioni seconda e terza, mentre nella VII, 2 viene fatto uso dell'assunzione prima, ecc.

Osserviamo sùbito che analoghe *assunzioni* si trovano adoperate, con riferimento a grandezze qualunque, nel libro decimo. Abbiamo così in detto libro:

2) Se una grandezza misura due altre, misura anche la loro differenza (proprietà che viene applicata, ad esempio, in X, 2).

3) Se una prima grandezza misura una seconda, e la seconda grandezza ne misura una terza, anche la prima misura la terza (proprietà che viene applicata, ad esempio in X, 2 e in X, 3).

Ecco, dunque, un legame tra libro settimo e libro decimo, che ci mostra, sotto un aspetto importante, l'effettiva *unità* dell'opera euclidea.

I numeri considerati nel libro settimo costituiscono soltanto un caso particolare delle grandezze considerate all'inizio del libro decimo: le *assunzioni* del libro settimo sono appunto le stesse del libro decimo, ma con riferimento al caso particolare.

Ma non basta: le grandezze considerate all'inizio del libro decimo sono *le stesse grandezze* che vengon considerate nel libro quinto; soddisfano infatti al postulato detto di Archimede, espresso nella definizione quarta dello stesso libro quinto.

Sicché, sempre partendo dalla visione unitaria degli *Elementi*, ci si può chiedere se per caso le *assunzioni* del libro decimo (e quindi anche quelle del settimo, loro caso particolare) non trovino la loro origine (la loro giustificazione, se si vuole) nelle teorie del libro quinto.

Si tratterà, naturalmente, di proposizioni particolari, che si riferiscano alla *molteplicità*, ossia al caso del rapporto intero: infatti le tre *assunzioni* si rivolgono appunto al caso suddetto.

Ma nel libro quinto sono le prime proposizioni quelle che si riferiscono al caso del rapporto intero: è tra quelle prime proposizioni che dobbiamo quindi ricercare.

Nella prop. V, 2 si dimostra che se due grandezze mA, mB sono equimultiple di due grandezze A, B, e se consideriamo due altri equimultipli nA, nB delle stesse due grandezze A, B anche le somme $mA + nA$ e $mB + nB$ sono equimultiple rispettivamente di A, B, cioè:

$$mA + nA = (m + n)A \quad ; \quad mB + nB = (m + n)B$$

In questa sede non c'interessa la equimultiplicità: ci basta osservare che la somma $mA + nA$ è multipla di A (così come $mB + nB$ è multipla di B). Ciò significa che la grandezza A, la quale *misura* mA ed nA, misura anche la loro somma $mA + nA$; proprio il contenuto della prima assunzione.

Se poi consideriamo la V, 6 vediamo che essa è analoga alla V, 2 or ora veduta: si tratta soltanto della differenza, anziché della somma. Si ritrova così nella V, 6 (che naturalmente, come la V, 2, dice *di più*) il contenuto della cosiddetta seconda *assunzione*.

Finalmente ritroviamo il contenuto della *terza assunzione* nella V, 3 la quale può enunciarsi brevemente così: equimultipli di equimultipli sono equimultipli (vedi nota alla V, 3). Cioè, se si considerano due equimultipli mA, mB di due grandezze A, B e poi, di quegli equimultipli mA, mB si considerano ancora equimultipli $n(mA)$, $n(mB)$, questi ultimi sono anche equimultipli di A, B.

Ossia, in simboli:

$$n(mA) = (nm)A$$
$$n(mB) = (nm)B$$

Anche qui non è l'equimolteplicità che c'interessa, ma è soltanto il fatto che $n(mA)$, ossia un multiplo di un multiplo di A, è anche multiplo di A: una specie di proprietà transitiva della molteplicità. Ritroviamo dunque, come s'era detto, il contenuto della cosiddetta *assunzione* terza: se una prima grandezza A misura una seconda mA e la seconda ne misura una terza $n(mA)$, anche la prima A misura la terza: $n(mA) = (nm)A$.

A. F.

PROPOSIZIONI

Proposizione I.

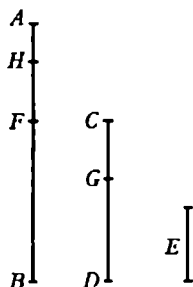
Se si prendono due numeri disuguali e si procede [a sottrazioni successive], togliendo di volta in volta il minore dal maggiore[a], *[la differenza dal minore e così via], se il numero che [ogni volta] rimane non divide mai quello che immediatamente lo precede, finché rimanga soltanto l'unità, i numeri dati all'inizio saranno primi fra loro.*

Infatti, dati i due numeri AB, CD e continuandosi a sottrarre di volta in volta il minore dal maggiore, la differenza dal minore e così via, il numero che ogni volta rimane non divida mai quello che immediatamente lo precede, finché rimanga soltanto l'unità; dico che AB, CD sono primi fra loro, vale a dire che soltanto l'unità misura AB, CD.

Se AB, CD difatti non fossero primi fra loro, un altro numero li dividerebbe. Li divida, e sia esso E; e CD d'altra parte, dividendo BF, lasci [il resto] FA minore di CD[b], mentre AF, dividendo DG, lasci [il resto] GC minore di AF, e GC, dividendo FH, lasci [come resto] l'unità HA. Poiché dunque E divide CD, e CD divide BF, anche E divide BF (assunzione 3); ma esso divide pure tutto quanto BA, per cui dividerà anche la differenza AF (assunzione 2). Ma AF divide DG; anche E quindi divide DG (assunzione 3); ed esso divide pure tutto quanto DC, per cui dividerà anche la differenza CG. Ma CG divide FH; anche E quindi divide FH (assunzione 3); ed esso divide pure tutto quanto FA, per cui dividerà anche la differenza, cioè l'unità AH (assun-

a. Più letteralmente: « Assuntisi due numeri disuguali, e venendo vicendevolmente (o: di volta in volta) ad essere sottratto (ἀνθυφαιρουμένου) sempre il minore dal maggiore... ».

b. Letteralmente: *minore di sé stesso*; per chiarezza maggiore useremo sempre le lettere.

zione 2), pur essendo un numero: il che è impossibile. Nessun altro numero può quindi dividere i numeri AB, CD; dunque AB, CD sono primi fra loro (VII, def. XII). - C.D.D.

È APPLICATA IN: VII, 2.

PROPOSIZIONE 2.

Dati due numeri che non siano primi fra loro, trovare il loro massimo comun divisore[a].

Siano AB, CD i due numeri dati che non sono primi fra loro. Si deve dunque trovare il massimo comun divisore di AB. CD.

Supponiamo dapprima che CD divida AB; ma esso, d'altra parte, divide anche sé medesimo per cui CD [in tal caso] è divisore comune di CD, AB. Ed è evidente che è anche il massimo; infatti nessun numero maggiore di CD può dividere CD.

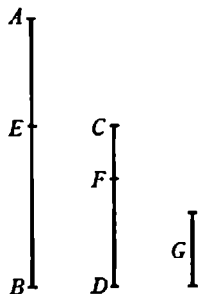
Se invece CD non divide AB, ed a partire da AB, CD si continua a sottrarre di volta in volta il numero minore dal maggiore, la differenza dal minore, e così via, rimarrà un numero che dividerà quello immediatamente precedente. Infatti non si avrà come ultimo resto[b] l'unità; in caso contrario, AB, CD sarebbero primi fra loro (VII, 1), il che non è per ipotesi. Si avrà quindi un numero, come ultimo resto, che dividerà quello immediatamente precedente. E CD allora, dividendo BE, lasci il resto EA minore di CD, mentre EA,

a. Nel testo: τὸ μέγιστον αὐτῶν μέτρον, la loro massima misura comune.

b. Letteralmente: infatti non verrà a rimanere.

dividendo DF, lasci il resto FC minore di EA, e si supponga che CF divida AE. Poiché dunque CF divide AE, ed AE divide DF, si ha che CF dividerà pure DF (assunzione 3); ma divide anche sé stesso, per cui dividerà anche tutta quanta la somma CD (assunzione 1)[a]. Ma CD divide BE; quindi anche CF divide BE (assunzione 3); ma divide pure EA, per cui dividerà anche tutta quanta la somma BA (assunzione 1); ma esso divide pure CD; quindi CF è divisore comune di AB, CD. Dico ora che è anche il massimo. Infatti, se CF non fosse il massimo comun divisore di AB, CD, un altro numero, che fosse maggiore di CF, dividerebbe i numeri AB, CD. Li divida, e sia esso G. E poiché G divide CD, ma CD divide BE, anche G divide BE (assunzione 3); ma esso divide pure tutta quanta la somma BA, per cui dividerà anche la differenza AE (assunzione 2). Ma AE divide DF; quindi anche G dividerà DF (assunzione 3); ma esso divide pure tutta quanta la somma CD, per cui dividerà anche la differenza CF (assunzione 2), cioè un numero maggiore dividerebbe un numero minore – il che è impossibile; non può quindi un altro numero, che sia maggiore di CF, dividere i numeri AB, CD; dunque CF è il massimo comun divisore di AB, CD.

APPLICA: VII, 1.

È APPLICATA IN: VII, 3, 4.

COROLLARIO.

È da ciò evidente che, se un numero divide [altri] due numeri, dividerà anche il loro massimo comun divisore[1]. – C.D.D.

È APPLICATO IN: VII, 3.

a. Letteralmente: tutto quanto CD.

[1] Queste prime proposizioni (1, 2, 3) del libro settimo si rivolgono alla ricerca del massimo comune divisore di due (prop. VII, 2) e di tre numeri

PROPOSIZIONE 3.

Dati tre numeri che non siano primi fra loro, trovare il loro massimo comun divisore.

Siano A, B, C i tre numeri dati che non sono primi fra loro; si deve dunque trovare il loro massimo comun divisore.

Infatti, si prenda il massimo comun divisore dei due numeri A, B (VII, 2), e sia esso D. Ora D o divide C o non lo divide. Lo divida, dapprima; ma esso divide anche A, B, per cui D divide A, B, C; è quindi divisore comune di A, B, C. Dico ora che è anche il massimo. Infatti, se D non fosse il massimo comun divisore di A, B, C, un altro numero, che fosse maggiore di D, dividerebbe i numeri A, B, C. Li divida, e sia esso E. Poiché dunque E divide A, B, C, dividerà pure A, B; dividerà quindi anche il massimo comun divisore di A, B (VII, 2, coroll.). Ma è D il massimo comun divisore di A, B, per cui E dividerebbe D, cioè un numero maggiore dividerebbe un numero minore: il che è impossibile. Non può quindi un altro numero, che sia maggiore di D, dividere i numeri A, B, C; dunque D è il massimo comun divisore di A, B, C.

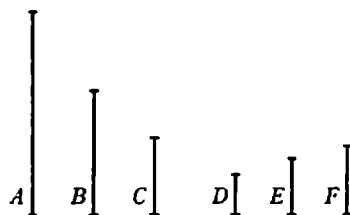
Ma sia adesso il caso in cui D[, cioè il massimo comun divisore di A, B,] non divida per ipotesi il [terzo] numero C; dico, in primo luogo, che C, D non sono numeri primi fra loro. Infatti, poiché A, B, C non sono primi fra loro, li dividerà un qualche numero. Il numero che divida A, B, C

(VII, 3). Nella prima proposizione viene trattato il caso particolare dei numeri primi tra loro. Lo stesso algoritmo (detto anche *algoritmo euclideo*) che viene usato per trovare il M.C.D. di due numeri viene adoperato anche (con le differenze del caso) per la ricerca della massima comune misura tra due grandezze (come si fa nella seconda proposizione del libro decimo). Naturalmente, nel caso dei numeri il procedimento ha sempre termine: male che vada ci troveremo nel caso della VII, 1 ossia dei numeri primi tra loro, cioè del M.C.D. = 1. Nel caso delle grandezze, invece, il procedimento ha termine soltanto se le grandezze sono commensurabili: non ha termine se le grandezze sono incommensurabili (inversa della X, 2, che si ricava in confronto con la X, 3).

Importante è il corollario di questa VII, 2: che se un numero *a* ne divide altri due *b*, *c* divide anche il loro M.C.D.

dividerà così anche A, B, e dividerà pure il massimo comun divisore di A, B, cioè D (VII, 2, coroll.); ma esso divide anche C, per cui si avrà che un numero divida entrambi i numeri D, C; non sono quindi D, C primi fra loro. Si prenda dunque il loro massimo comun divisore, e sia E (VII, 2). Poiché E divide D, e D divide A, B, anche E divide A, B (assunzione 3); ma esso divide pure C, per cui E divide A, B, C; è quindi E divisore comune di A, B, C. Dico ora che è anche il massimo. Infatti, se non fosse E il massimo comun divisore di A, B, C, un altro numero, che fosse maggiore di E, dividerebbe i numeri A, B, C. Li divida, e sia F [il divisore comune supposto maggiore di E]. Poiché F divide A, B, C, divide pure A, B; dividerà quindi anche il massimo comun divisore di A, B (VII, 2, coroll.). Ma è D il massimo comun divisore di A, B; perciò F divide [in tal caso] D; ma esso divide anche C, per cui F divide D, C; dividerà quindi anche il massimo comun divisore di D, C (VII, 2, coroll.). Ma è E il massimo comun divisore di D, C; perciò F divide E, cioè un numero maggiore dividerebbe un numero minore: il che è impossibile. Non può quindi un altro numero, che sia maggiore di E, dividere i numeri A, B, C; dunque E è il massimo comun divisore di A, B, C. - C.D.D.

Applica: VII, 2, VII, 2 coroll.

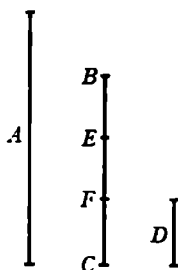
È applicata in: VII, 33.

Proposizione 4.

Di due numeri [disuguali] qualunque, il minore è «parte» o «parti» del maggiore[2].

Siano A, BC due numeri, e BC sia il minore; dico che BC è «parte» o è «parti» di A. Infatti, siano i numeri A,

[2] Questa proposizione sancisce la *commensurabilità* dei numeri tra loro, cioè introduce i numeri come caso particolare di grandezze commen-

BC primi fra loro, oppure non lo siano. Dapprima, *A*, *BC* siano primi fra loro. Se *BC* viene allora diviso nelle unità che sono in esso, ciascuna unità di *BC* sarà una « parte » di *A*; cosicché *BC* è « parti » di *A*.

Ma sia adesso il caso in cui *A*, *BC* non sono per ipotesi primi fra loro; *BC* allora o divide *A* o non lo divide. Se *BC* dunque divide *A*, si ha che *BC* è « parte » di *A*. Ma se non lo divide, si prenda il massimo comun divisore *D* di *A*, *BC* (VII, 2), e si divida *BC* nei numeri uguali a *D*, cioè *BE*, *EF*, *FC*. E poiché *D* divide *A*, si ha che *D* è « parte » di *A*; ma *D* è uguale a ciascuno dei numeri *BE*, *EF*, *FC*; anche ciascuno dei numeri *BE*, *EF*, *FC* è quindi « parte » di *A*; cosicché *BC* è « parti » di *A*.

Dunque, di due numeri... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: VII, 2.

È APPLICATA IN: VII, 20.

PROPOSIZIONE 5.

Se un primo numero è sottomultiplo[a] *di un secondo, ed un terzo numero è lo stesso sottomultiplo di un quarto, anche la somma del primo e del terzo, rispetto a quella del secondo*

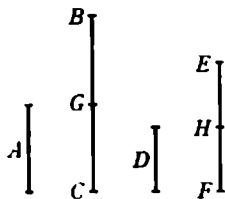
a. Adotteremo normalmente, d'ora innanzi, il termine *sottomultiplo* per « parte », e quello *frazione* per « parti », con le opportune eccezioni, oppure premettendo o posticipando le formule esplicative.

surabili: riannoda cioè il libro settimo al quinto, anche per ciò che riguarda le due definizioni di proporzione (la quinta del libro quinto e la ventesima del libro settimo). Se essendo $a < b$ il numero b è multiplo di a, allora a è *parte* di b: se ciò non si verifica si avrà $ma = nb$ ossia $a = \frac{n}{m} b$ cioè a è *parti* di b ossia somma di n termini tutti uguali alla *parte* $\frac{1}{m}$ b.

e del quarto, sarà lo stesso sottomultiplo che il primo numero è del secondo[3].

Infatti, sia il numero *A* sottomultiplo del numero *BC*, ed un terzo numero *D* sia di un quarto *EF* lo stesso sottomultiplo che *A* è di *BC*; dico che anche la somma di *A*, *D*, rispetto a quella di *BC*, *EF*, è lo stesso sottomultiplo che *A* è di *BC*.

Poiché difatti *A* è di *BC* lo stesso sottomultiplo che anche *D* è di *EF*, vi sono in *BC* tanti numeri uguali ad *A* quanti ne sono pure in *EF* uguali a *D*. Risultino divisi: *BC* nei numeri uguali ad *A*, cioè *BG*, *GC*, ed *EF* nei numeri uguali a *D*, cioè *EH*, *HF*; il numero di *BG*, *GC*[, cioè delle parti di *BC*,] sarà così uguale al numero di *EH*, *HF*[, cioè delle parti di *EF*]. Ora, poiché *BG* è uguale ad *A*, mentre *EH* è uguale a *D*, anche la somma di *BG*, *EH* è uguale alla somma di *A*, *D*. Per la stessa ragione, pure la somma di *GC*, *HF* è uguale alla somma di *A*, *D*. Vi sono quindi in *BC* tanti numeri[, cioè parti,] uguali ad *A*, quanti anche nella somma di *BC*, *EF* vi sono uguali alla somma di *A*, *D*. Perciò, di quante volte *BC* è multiplo di *A*, d'altrettante pure la somma di *BC*, *EF* è multipla della somma di *A*, *D*. Dunque lo stesso sottomultiplo che *A* è di *BC* lo è anche la somma di *A*, *D* della somma di *BC*, *EF*. – C.D.D.

B E G H A D C F

È APPLICATA IN: VII, 6, 7, 9, 10, 12.

[3] Ancora un legame tra libro settimo e libro quinto. Questa proposizione VII, 5 può enunciarsi anche così: « La somma degli equisottomultipli è uguale all'equisottomultiplo della somma ».

Cioè, se a, b sono due equisottomultipli dei due numeri ma, mb (il che val quanto dire che ma, mb sono equimultipli di a, b) anche la loro somma $a + b$ è un equisottomultiplo della somma $ma + mb$, ossia:

$$m(a + b) = ma + mb.$$

Si tratta dunque di quello stesso teorema V, 1 (v. nota ivi), che lì è riferito a grandezze in generale, qui a numeri: lì è espresso in funzione di *multipli*, qui di *sottomultipli*.

PROPOSIZIONE 6.

Se un primo numero è frazione (= parti) di un secondo, ed un terzo numero è la stessa frazione di un quarto, anche la somma del primo e del terzo, rispetto a quella del secondo e del quarto, sarà la stessa frazione che il primo numero è del secondo[4].

Infatti, sia il numero AB frazione del numero C, ed un terzo numero DE sia di un quarto F la stessa frazione che AB è di C; dico che anche la somma di AB, DE, rispetto a quella di C, F, è la stessa frazione che AB è di C.

Poiché difatti AB è la stessa frazione di C che anche DE è di F, vi sono in AB tante parti di C quante parti di F sono pure in DE. Risultino divisi: AB nelle parti di C, cioè AG, GB, e DE nelle parti di F, cioè DH, HE; il numero di AG, GB[, cioè delle parti in cui è diviso AB,] sarà così uguale al numero di DH, HE[, cioè delle parti in cui è diviso DE]. Ora, poiché AG è lo stesso sottomultiplo di C

[4] Mentre nella precedente prop. VII, 5 si considera un numero *a*, che è parte di un altro, *ma*, qui si considera un numero che è *parti* di un altro, cioè questa volta il primo numero non è un sottomultiplo del secondo, ma è somma di tanti (n) sottomultipli del secondo. Per esempio, $3a$ non è sottomultiplo di $5a$, ma è somma di sottomultipli; $3a = a + a + a$.

Per dare un esempio numerico di applicazione del teorema, consideriamo i numeri seguenti:

$$6 \text{ è } \textit{parti} \text{ di } 8 \text{ cioè } 6 = 2 + 2 + 2$$

(dove 2 è *parte* di 8: precisamente la quarta parte)

$$15 \text{ è } \textit{parti} \text{ di } 20 \text{ cioè } 15 = 5 + 5 + 5$$

(dove 5 è *parte* di 20: precisamente la quarta parte).

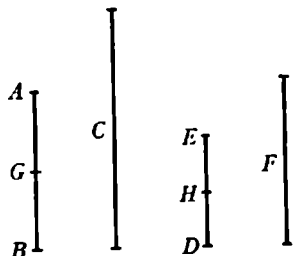
Possiamo dunque dire che 6 è di 8 la stessa frazione che 15 lo è di 20 (cioè 6 è 3/4 di 8, e così 15 è 3/4 di 20). Ebbene: nel teorema si mostra che se si sommano 6 e 15 si ottiene un numero (21) che è ancora la stessa frazione della somma 8 + 20 cioè di 28. Ossia: 21 è 3/4 di 28. Quindi il teorema ci dice che nell'esempio portato:

$$\frac{3}{4}(8 + 20) = \frac{3}{4} \cdot 8 + \frac{3}{4} \cdot 20$$

ossia ci dà la proprietà distributiva del prodotto misto di una frazione per una somma di interi. Nelle proposizioni seguenti (7 e 8) si tratta di proprietà rispettivamente corrispondenti a quelle delle prop. 5 e 6, ma per la differenza anziché per la somma.

che pure *DH* è di *F*, si ha che *AG* è lo stesso sottomultiplo di *C* che anche la somma di *AG*, *DH* è della somma di *C*, *F* (VII, 5). Per la stessa ragione, *GB* è pure lo stesso sottomultiplo di *C* che anche la somma di *GB*, *HE* è della somma di *C*, *F*.

Dunque *AB* è la stessa frazione (= le stesse parti) di *C* che anche la somma di *AB*, *DE* è della somma di *C*, *F*. – C.D.D.

A G B C E H D F

APPLICA: VII, 5.

È APPLICATA IN: VII, 9, 10, 12.

PROPOSIZIONE 7.

Se un primo numero è rispetto ad un secondo la stessa parte, cioè lo stesso sottomultiplo, che un terzo numero, minore del primo, è rispetto ad un quarto, minore del secondo, anche la differenza fra il primo ed il terzo è, rispetto alla differenza fra il secondo ed il quarto, la stessa parte, cioè lo stesso sottomultiplo, che il primo è del secondo [a].

Infatti, sia il numero *AB* lo stesso sottomultiplo, cioè quella parte, del numero *CD* che *AE*, minore del primo, è di *CF*, minore del secondo; dico che anche la differenza *EB* è rispetto alla differenza *FD* lo stesso sottomultiplo, cioè la stessa parte, che l'intero *AB* è dell'intero *CD*.

Sia difatti il numero *CG* tale che pure *EB* sia di *CG* la stessa parte che *AE* è di *CF* [b]. Ora, poiché *AE* è la stessa

a. Letteralmente: Se un numero è quella parte di un numero che un numero sottratto [dal primo] è rispetto ad un numero sottratto [dal secondo], anche il numero rimanente (il resto del primo) sarà del numero rimanente (il resto del secondo) la stessa parte che il numero tutto quanto è del numero tutto quanto.

b. Letteralmente: Sia difatti *AE* di *CF* la stessa parte che anche *EB* è di *CG*.

parte di *CF* che anche *EB* è di *CG*, si ha che *AE* è la stessa parte di *CF* che pure la somma *AB* è della somma *GF*[a] (VII, 5). Ma *AE* è la stessa parte di *CF* che, per ipotesi, anche *AB* è di *CD*; quindi *AB* è pure di *GF* la stessa parte che è anche di *CD*, per cui *GF* è uguale a *CD*. Si sottragga, in comune ai due numeri, *CF*; il resto *GC* è perciò uguale al resto *FD*. E poiché *AE* è la stessa parte di *CF* che anche *EB* è di *GC*, ma *GC* è uguale a *FD*, si ha che *AE* è la stessa parte di *CF* che pure *EB* è di *FD*.

Dunque anche il resto *EB* è la stessa parte del resto *FD* che l'intero *AB* è dell'intero *CD*. – C.D.D.

APPLICA: VII, 5.

È APPLICATA IN: VII, 8, 11.

PROPOSIZIONE 8.

Se un primo numero è rispetto ad un secondo la stessa frazione, cioè le stesse parti, che un terzo numero, minore del primo, è rispetto ad un quarto, minore del secondo, anche la differenza fra il primo ed il terzo è, rispetto alla differenza fra il secondo ed il quarto, la stessa frazione, cioè le stesse parti, che il primo è del secondo.

Infatti, sia il numero *AB* la stessa frazione, cioè quelle parti, del numero *CD* che *AE*, minore del primo, è di *CF*, minore del secondo; dico che anche la differenza *EB* è rispetto alla differenza *FD* la stessa frazione, cioè le stesse parti, che l'intero *AB* è dell'intero *CD*.

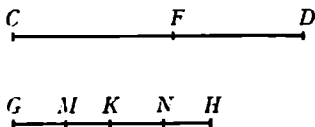
Si ponga difatti *GH* uguale ad *AB*. Quindi *GH* è la stessa frazione, cioè le stesse parti, di *CD* che anche *AE*

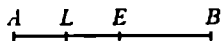
a. Letteralmente: che anche *AB* è di *GF*.

è di *CF*. Risultino divisi: *GH* nelle parti di *CD*, cioè *GK*, *KH*, ed *AE* nelle parti di *CF*, cioè *AL*, *LE*; il numero delle parti *GK*, *KH* sarà così uguale al numero delle parti *AL*, *LE*. E poiché *GK* è la stessa parte di *CD* che pure *AL* è di *CF*, ma *CD* è maggiore di *CF*, anche *GK* è maggiore di *AL*. Si ponga *GM* uguale ad *AL*. Quindi *GK* è la stessa parte di *CD* che anche *GM* è di *CF*, per cui pure il resto *MK* è del resto *FD* la stessa parte che tutto *GK* è di tutto *CD* (VII, 7). Di nuovo, poiché *KH* è la stessa parte di *CD* che pure *LE* è di *CF*, ma *CD* è maggiore di *CF*, anche *KH* è maggiore di *LE*. Si ponga *KN* uguale ad *LE*. Quindi *KH* è la stessa parte di *CD* che anche *KN* è di *CF*, per cui pure il resto *NH* è la stessa parte del resto *FD* che tutto *KH* è di tutto *CD* (VII, 7). Ma fu dimostrato che anche la differenza *MK* è, rispetto alla differenza *FD*, la stessa parte che tutto *GK* è di tutto *CD*; pure la somma di *MK*, *NH* è quindi la stessa frazione di *DF* che tutto *HG* è di tutto *CD*. Ma la somma di *MK*, *NH* è uguale ad *EB*, mentre *HG* è uguale a *BA*; dunque anche il resto *EB* è la stessa frazione, cioè la stesse parti, del resto *FD* che l'intero *AB* è dell'intero *CD*. – C.D.D.

C F D

G M K N H

A L E B

APPLICA: VII, 7.

È APPLICATA IN: VII, 11.

PROPOSIZIONE 9.

Se un primo numero è parte, cioè sottomultiplo, di un secondo, ed un terzo numero è la stessa parte, cioè lo stesso sottomultiplo, di un quarto, il primo numero, anche permutando, *è rispetto al terzo la stessa parte* [*cioè lo stesso sottomultiplo*] *o le stesse parti* [*cioè la stessa frazione*] *che il secondo sarà del quarto*[5].

[5] Questa prop. 9 si riferisce alla *parte*, mentre la prop. 10 si riferisce alle *parti*. Nel nostro linguaggio possiamo parlare in linea generale di *frazione*.

C'è, dunque, un primo numero *a* che è una certa frazione di un

Infatti, sia il numero A parte, cioè sottomultiplo, del numero BC, ed un altro numero D sia di un altro numero EF la stessa parte, cioè lo stesso sottomultiplo, che A è

secondo numero b. Per esempio: $a = p/q\ b$. C'è poi un terzo numero c che è la stessa frazione di un quarto numero d. Ossia: $c = p/q\ d$.

Il teorema afferma che il primo e il secondo numero sono la stessa frazione rispettivamente del terzo e del quarto, cioè che, dato che sia: $a = r/s\ c$ è anche: $b = r/s\ d$.

Euclide dice che la seconda coppia di relazioni si ottiene dalla prima *permutando* (ἐναλλάξ), preparando così anche nella nomenclatura il terreno alla VII, 13, nella quale si dimostra appunto la possibilità di *permutare* i medi in una proporzione tra numeri.

Per esempio:

$$6 = \frac{3}{4} \cdot 8 \qquad 9 = \frac{3}{4} \cdot 12$$

così 6 e 9 sono la stessa *frazione*, rispettivamente di 8 e di 12. Il teorema afferma che conseguentemente 6 e 8 sono anch'esse una stessa *frazione*, rispettivamente di 9 e di 12; infatti:

$$6 = \frac{2}{3} \cdot 9 \qquad 8 = \frac{2}{3} \cdot 12$$

Nella dimostrazione si tratta dapprima (nella prop. 9) il caso nel quale il primo numero a sia *parte* (= sottomultiplo) del secondo b (e quindi il terzo numero c sia ugual *parte* del quarto d). Sia dunque:

$$ma = b$$
$$mc = d$$

ossia:

$$a + a + \dots\dots\dots + a = b$$
$$c + c + \dots\dots\dots + c = d$$

dove le due somme comprendono m termini ciascuna.

Supposto ora che sia: $a = \frac{p}{q} c$ si ha:

$$\frac{p}{q} c + \frac{p}{q} c + \dots\dots\dots + \frac{p}{q} c = b$$
$$c + c + \dots\dots\dots + c = d$$

Ma per la VII, 6 la somma di m termini tutti uguali alla stessa frazione p/q di c è ancora la stessa frazione p/q della somma degli m termini, cioè:

$$b = \frac{p}{q} c + \frac{p}{q} c + \dots + \frac{p}{q} c = \frac{p}{q} (c + c + \dots + c) = \frac{p}{q} (mc)$$

Dunque:

$$b = \frac{p}{q} (mc) = \frac{p}{q} d$$

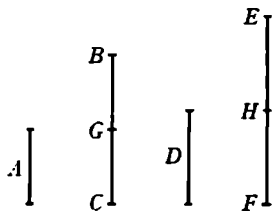
Quindi mentre a è la frazione p/q di c, b è la stessa frazione p/q di d. Il risultato viene poi esteso, come s'è detto, nella VII, 10.

di *BC*; dico che, anche *permutando*, *A* è la stessa parte, cioè lo stesso sottomultiplo, o le stesse parti, cioè la stessa frazione, che pure *BC* è di *EF*.

Poiché difatti *A* è la stessa parte di *BC* che anche *D* è di *EF*, vi sono in *BC* tanti numeri, cioè tante parti, uguali ad *A* quanti ve ne sono anche in *EF* uguali a *D*. Risultino divisi: *BC* nei numeri uguali ad *A*, cioè *BG*, *GC*, ed *EF* in quelli uguali a *D*, cioè *EH*, *HF*; il numero[a] di *BG*, *GC*, cioè delle parti di *BC*, sarà così uguale a quello di *EH*, *HF*, cioè delle parti di *EF*.

E poiché i numeri *BG*, *GC* sono uguali fra loro, ma pure i numeri *EH*, *HF* sono uguali fra loro, e tante sono le parti *BG*, *GC* quante le parti *EH*, *HF*, si ha che *BG* è la stessa parte, o le stesse parti, di *EH* che anche *GC* è di *HF*; cosicché si ha pure che *BG* è, rispetto ad *EH*, la stessa parte, o le stesse parti, che anche la somma *BC* è rispetto alla somma *EF* (VII, 5 e 6). Ma *BG* è uguale ad *A*, mentre *EH* è uguale a *D*; dunque *A*, rispetto a *D*, è la stessa parte, cioè lo stesso sottomultiplo, o la stessa frazione, che pure *BC* è rispetto ad *EF*. – C.D.D.

APPLICA: VII, 5, 6.

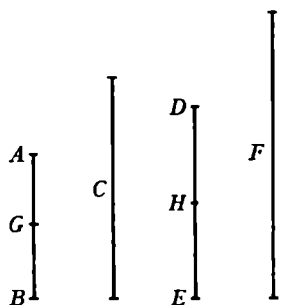
È APPLICATA IN: VII, 10.

PROPOSIZIONE 10.

Se un primo numero è frazione di un secondo, ed un terzo numero è la stessa frazione di un quarto, il primo numero, anche permutando, *è rispetto al terzo lo stesso sottomultiplo o la stessa frazione che pure il secondo sarà del quarto.*

Infatti, sia il numero *AB* una certa frazione del numero *C*, ed un altro numero *DE* sia la stessa frazione di un altro

a. Letteralmente πλῆθος, moltitudine, complesso di...: e traduciamo con *numero*, intendendo numero complessivo, quando ciò sia possibile, oppure con espressioni equivalenti.

numero F; dico che, anche *permutando*, AB è di DE la stessa frazione o lo stesso sottomultiplo, che pure C è di F.

Poiché difatti AB è la stessa frazione di C che anche DE è di F, vi sono in AB tante parti di C quante parti di F sono pure in DE. Risultino divisi: AB nelle parti AG, GB uguali alle parti di C, e DE nelle parti DH, HE uguali alle parti di F; il numero delle parti AG, GB sarà così uguale al numero delle parti DH, HE. E poiché AG è la stessa parte di C che anche DH è di F, pure *permutando* AG è di DH la stessa parte, o le stesse parti, che anche C è di F (VII, 9). Per la stessa ragione, pure GB è la stessa parte, o le stesse parti, di HE che è anche C di F; cosicché [a] anche la somma AB è la stessa frazione o lo stesso sottomultiplo di DE che pure C è di F (VII, 5 e 6). – C.D.D.

APPLICA: VII, 5, 6, 9.
È APPLICATA IN: VII, 13.

PROPOSIZIONE 11.

Se un primo numero sta ad un secondo come un terzo numero, minore del primo, sta ad un quarto, minore del secondo, anche la differenza fra il primo e il terzo starà alla differenza

a. Nel testo greco avremmo a questo punto un'aggiunta destinata a render più chiaro il riferimento a VII, 5, 6, vale a dire: « cosicché AG è di DH la stessa parte, o le stesse parti, che anche GB è di HE, per cui anche AG è di DH la stessa parte, o le stesse parti, che pure AB è di DE. Ma fu dimostrato che AG è di DH la stessa parte, o le stesse parti, che pure C è di F; cosicché anche la somma AB, ecc. »; Heiberg ritiene ciò un'interpolazione attribuibile a Teone, dato che il manoscritto P ha queste parole in margine, ed in una mano più tarda.

fra il secondo e il quarto come il primo numero sta al secondo [a].

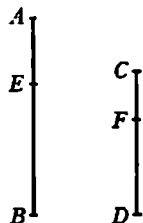
Stia il numero AB al numero CD come AE, minore del primo, sta a CF, minore del secondo; dico che anche la differenza EB sta alla differenza FD come AB sta a CD.

Poiché AB sta a CD come AE sta a CF, si ha che AB è lo stesso sottomultiplo, o la stessa frazione, di CD che pure AE è di CF (VII, def. XX). Anche la differenza EB è quindi della differenza FD lo stesso sottomultiplo, o la stessa frazione, che AB è di CD (VII, 7 e 8).

Dunque EB sta a FD come AB sta a CD (VII, def. XX). - C.D.D.

A E B C F D

APPLICA: VII, 7, 8.

È APPLICATA IN: IX, 35.

PROPOSIZIONE 12.

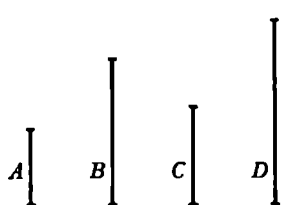
Se quanti si voglia numeri sono in proporzione, uno degli antecedenti starà ad uno dei conseguenti come la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti [6].

Siano A, B, C, D quanti si voglia numeri proporzionali, in modo che A stia a B come C sta a D; dico che A sta a B come la somma di A, C sta alla somma di B, D.

a. Letteralmente: Se intero (tutto quanto un numero) sta ad intero come un numero sottratto [dal primo] sta ad un numero sottratto [dal secondo], anche il resto [del primo] starà al resto [del secondo] come intero sta ad intero.

[6] Queste due proposizioni, VII, 11 e VII, 12, si corrispondono: ma l'una considera differenze, l'altra considera somme. Precisamente, la VII, 11 si può esprimere dicendo che in una proposizione la differenza degli antecedenti sta alla differenza dei conseguenti come un qualunque antecedente sta al suo conseguente. Cioè dalla proporzione:

$$a : b = c : d$$

Infatti, poiché A sta a B come C sta a D, si ha che A è lo stesso sottomultiplo, o la stessa frazione, di B che anche C è di D (VII, def. XX). Anche la somma di A, C è quindi rispetto alla somma di B, D lo stesso sottomultiplo, o la stessa frazione, che A è di B (VII, 5 e 6).

Dunque A sta a B come la somma di A, C sta alla somma di B, D (VII, def. XX). - C.D.D.

APPLICA: VII, 5, 6.
È APPLICATA IN: VII, 15, 20; IX, 35.

PROPOSIZIONE 13.

Se quattro numeri sono proporzionali, anche permutando *saranno proporzionali* [7].

Siano A, B, C, D quattro numeri proporzionali, in modo che A stia a B come C sta a D; dico che essi saranno pro-

si ricava l'altra:

$$(a - c) : (b - d) = a : b$$

La VII, 12 ci dice, invece, che dalla prima proporzione si può ricavare anche l'altra:

$$(a + c) : (b + d) = a : b$$

Queste due proposizioni sono state già dimostrate nel libro quinto per le grandezze in generale: nella V, 19 per la differenza, nella V, 12 per la somma.

[7] La possibilità di permutare i medi rappresenta un punto d'arrivo, che richiede una via piuttosto complicata nella teoria delle proporzioni tra grandezze del libro quinto: vari lemmi sono lì infatti necessari per giungere, nella V, 16, alla proprietà in questione. Nel caso delle proporzioni tra numeri del libro settimo, il teorema relativo è invece assai più semplice, e si serve, a guisa di lemma, soltanto delle prop. 9-10.

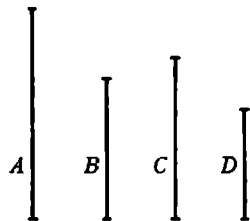
Ci si potrebbe chiedere, per questa e per altre proprietà delle proporzioni, perché Euclide abbia offerto qui nel libro settimo una vera e propria ripetizione, non necessaria. E forse, per dare una spiegazione, ci si può riannodare alle prime proposizioni del libro quinto, che, quasi Euclide esitasse a introdurre la complessa definizione eudossiana di proporzione, si limitano al caso delle grandezze commensurabili. Qui nel libro settimo si tratta di particolari grandezze commensurabili (i numeri) ed Euclide par quasi voglia evitare al lettore di dover tornare al libro quinto, se il

porzionali anche *permutando*, in modo che *A* stia a *C* come *B* sta a *D*.

Infatti, poiché *A* sta a *B* come *C* sta a *D*, si ha che *A* è lo stesso sottomultiplo, o la stessa frazione, di *B* che anche *C* è di *D* (VII, def. XX). Quindi, *permutando*, *A* è lo stesso sottomultiplo, o la stessa frazione, di *C* che pure *B* è di *D* (VII, 10). Dunque *A* sta a *C* come *B* sta a *D*. – C.D.D.

A B C D

APPLICA: VII, 10.

È APPLICATA IN: VII, 14, 17, 20; VIII, 4, 18, 19, 20; IX, 10, 17.

PROPOSIZIONE 14.

Se si dànno[a] *quanti si voglia numeri e se ne dànno altri in ugual numero, che a due a due stiano nello stesso rapporto, anche* ex aequo *staranno nello stesso rapporto* (*cioè, staranno nello stesso rapporto gli estremi*) [8].

Si diano quanti si voglia numeri *A*, *B*, *C* ed altri *D*, *E*, *F* in ugual numero, che a due a due stiano nello stesso

a. Letteralmente: se vi sono.

lettore stesso intende limitarsi allo studio aritmetico delle proporzioni tra numeri.

In linea generale, del resto, in tutti i tre libri aritmetici non c'è mai un richiamo esplicito a proposizioni del libro quinto.

È infatti inespresso il sostanziale richiamo, per le cosiddette *assunzioni*, a particolari proposizioni del libro quinto, come s'è visto nell'apposita nota.

D'altra parte, si tratta delle prime proposizioni del libro quinto, cioè di quelle che, riferendosi esclusivamente al caso delle grandezze commensurabili, stanno (per dir così) a mezza strada tra le proposizioni del libro quinto (tra grandezze in generale) e quelle del libro settimo (tra numeri).

[8] Si tratta della stessa proprietà della deduzione *ex aequo* di una proporzione da altre due, che per le grandezze in generale vien data nella prop. V, 22.

A *B* *C*
D *E* *F*

rapporto, in modo che A stia a B come D sta ad E, e B stia a C come E sta a F; dico che, anche *ex aequo*, A sta a C come D sta a F.

Infatti, poiché A sta a B come D sta ad E, si ha, *permutando*, che A sta a D come B sta ad E (VII, 13). Di nuovo, poiché B sta a C come E sta a F, *permutando* si ha che B sta ad E come C sta a F (VII, 13). Ma B sta ad E come A sta a D; quindi anche, A sta a D come C sta a F; *permutando* dunque, A sta a C come D sta a F. - C.D.D.

L'ipotesi è:

$$\begin{cases} A : B = D : E \\ B : C = E : F \end{cases}$$

La tesi è:

$$A : C = D : F$$

La dimostrazione si fonda sulla permutazione dei medi (VII, 13). Si ricava infatti dalla prima proporzione:

$$A : D = B : E$$

e dalla seconda:

$$B : E = C : F$$

Si ricava quindi:

$$A : D = C : F$$

e permutando di nuovo:

$$A : C = D : F$$

come si doveva dimostrare.

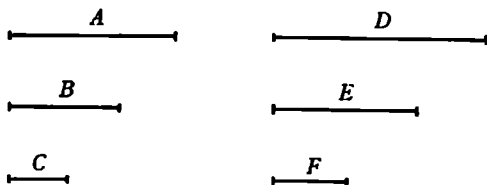
Come si vede, per la dimostrazione s'è dovuto ricorrere alla proprietà transitiva dell'uguaglianza tra rapporti. Lo stesso ricorso vien fatto anche altrove nel libro settimo: ad esempio nella prop. 19. Secondo l'editore-principe di Euclide, I. L. Heiberg, in questi casi c'è un tacito ricorso alla V, 11 (proprietà transitiva dell'uguaglianza di rapporti tra grandezze in generale).

Ma il commentatore T. L. Heath, il più grande commentatore inglese di Euclide, controbatte l'ipotesi di Heiberg: per lui è *assiomatico* l'uso della proprietà transitiva. Dice a questo proposito l'Enriques (*Gli Elementi d'Euclide*, ecc., vol. II, p. 202):

« Invero questa proprietà transitiva dell'eguaglianza di rapporti riesce evidente per i rapporti fra numeri, mentre non lo è affatto pel caso di rapporti per astrazione ».

Vorremmo a questo punto aggiungere che la def. 20 del libro settimo, di proporzioni tra numeri, mette ben in evidenza che il *rapporto* tra due numeri è un *ente aritmetico* ben individuabile: ai rapporti tra numeri può quindi ritenersi sia senz'altro applicabile la prima Nozione comune (v.): « *Cose uguali ad una stessa sono uguali tra loro* » dove il nostro sostantivo « cose » non viene espresso, nel testo greco, se non con l'articolo neutro plurale τά.

APPLICA: VII, 13.

È APPLICATA IN: VIII, 1, 5, 6, 8, 13, 21; IX, 19, 36.

PROPOSIZIONE 15.

Se l'unità è contenuta in un numero un certo numero di volte, ed un altro numero è contenuto in un altro lo stesso numero di volte, l'unità anche, permutando, *sarà contenuta nel terzo numero lo stesso numero di volte che il secondo è contenuto nel quarto* [9].

Infatti, l'unità A sia contenuta un certo numero di volte nel numero qualunque BC, ed un altro numero D sia contenuto lo stesso numero di volte in un altro numero EF; dico che, anche ***permutando***, l'unità A è contenuta nel numero D lo stesso numero di volte che BC è contenuto in EF.

Poiché difatti l'unità A è contenuta nel numero BC altrettante volte quante D è contenuto in EF, vi sono in BC tante unità, quanti numeri uguali a D sono anche in EF. Risultino divisi: BC nelle unità che sono in esso, cioè BG, GH, HC, ed EF nei numeri uguali a D, cioè EK, KL, LF. Il numero delle parti BG, GH, HC sarà così uguale a quello delle parti EK, KL, LF [a]. E poiché le unità BG, GH, HC sono uguali fra loro, ma anche i numeri EK, KL, LF sono uguali fra loro, ed il numero delle unità BG, GH, HC è

a. Letteralmente: Il numero, cioè il solito πλῆθος, di BG, GH, HC (cioè, delle unità BG, GH, HC) sarà così uguale a quello (sempre πλῆθος) di EK, KL, LF (cioè, dei numeri EK, KL, LF); e così avremo anche dopo.

[9] In sostanza, qui dalla proporzione:

$$1 : a = b : ab$$

si ricava l'altra:

$$1 : b = a : ab$$

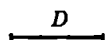
cioè si tratta di un caso particolare di permutazione dei medi. Ma occorre ricordare che per Euclide l'unità non è un numero.

uguale a quello delle parti EK, KL, LF, si avrà che l'unità BG sta al numero EK come l'unità GH sta al numero KL e come l'unità HC sta al numero LF. Quindi si avrà pure che uno dei termini antecedenti sta ad uno dei conseguenti come la somma degli antecedenti sta a quella dei conseguenti (VII, 12), per cui l'unità BG sta al numero EK come BC sta ad EF. Ma l'unità BG è uguale all'unità A, ed il numero EK è uguale al numero D. L'unità A sta perciò al numero D come il numero BC sta al numero EF.

Dunque l'unità A è contenuta nel numero D lo stesso numero di volte che BC è contenuto in EF. - C.D.D.

A B G H C

D

E K L F

APPLICA: VII, 12.

È APPLICATA IN: VII, 16, 21, 24, 33, 37, 38; IX, 11.

PROPOSIZIONE 16.

Se un primo numero moltiplica un secondo, ed il secondo moltiplica il primo, i due prodotti (*cioè, i due numeri prodotti*) *saranno uguali fra loro* [10].

Siano A, B due numeri, ed A moltiplicando B produca C, mentre B moltiplicando A produca D; dico che C è uguale a D.

[10] Si tratta della proprietà commutativa della moltiplicazione tra due numeri. Per seguir meglio la dimostrazione, è opportuno riandare alla definizione quindicesima del libro settimo, cioè alla definizione che Euclide dà di prodotto.

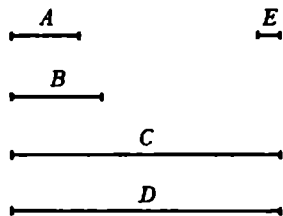
Va osservato che ivi Euclide chiama prodotto di un primo numero per un secondo, la somma di tanti termini uguali al secondo quante sono le unità del primo. Cioè il *primo numero* è il *moltiplicatore*, mentre il *secondo* è il *moltiplicando*. Il prodotto $3 \cdot 4$ è, dunque, per Euclide la somma: $4 + 4 + 4$. Con $3 \cdot 4$, di solito, noi intendiamo invece $3 + 3 + 3 + 3$.

La dimostrazione di Euclide procede partendo dalla proporzione:

$$1 : a = b : ab$$

Qui ab rappresenta la somma: $b + b \ldots + b$ (a termini) quindi la

Infatti, poiché A moltiplicando B ha prodotto C, si ha che B è contenuto in C altrettante volte quante sono le unità contenute in A. Ma anche l'unità E è contenuta nel numero A altrettante volte quante sono le unità in esso contenute; l'unità E è perciò contenuta nel numero A le stesse volte che B in C. Quindi, *permutando*, l'unità E è contenuta nel numero B altrettante volte quante A è contenuto in C (VII, 15). Di nuovo, poiché B moltiplicando A ha prodotto D, si ha anche A è contenuto in D altrettante volte quante sono le unità contenute in B. Ma anche l'unità E è contenuta in B altrettante volte quante sono le unità in esso contenute; l'unità E è perciò contenuta nel numero B le stesse volte che A in D. Ma l'unità E era contenuta in B lo stesso numero di volte che A è contenuto in C; quindi A è contenuto lo stesso numero di volte in ciascuno dei due numeri C, D. Dunque C è uguale a D. - C.D.D.

A E
B
C
D

APPLICA: VII, 15.

È APPLICATA IN: VII, 18, 34.

proposizione è valida, in quanto 1 è parte a esima di a, e pure b è parte a esima di ab.

Ma per il caso particolare di permutazione dei medi visto nella VII, 15, si può ricavarne la proporzione:

$$1 : b = a : ab$$

D'altra parte, per definizione di proporzione tra numeri, si può anche scrivere:

$$1 : b = a : ba$$

dove $ba = a + a + ... + a$ (b termini).

Infatti 1 è la b esima parte di b, e pure a è la b esima parte di ba. Dal confronto tra le due proporzioni si ricava:

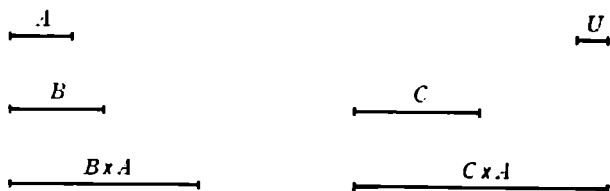
$$a : ab = a : ba$$

(per l'applicazione della proprietà transitiva per l'uguaglianza di rapporti numerici si veda la nota alla VII, 14). Dunque a deve essere la stessa frazione tanto di ab, quanto di ba: Euclide deduce che è $ab = ba$.

PROPOSIZIONE 17.

Se un numero ne moltiplica due altri[a], *i prodotti avranno [fra loro] lo stesso rapporto dei numeri moltiplicati*[11].

Infatti il numero A, moltiplicando i due numeri B, C, dia i prodotti $B \times A$, $C \times A$; dico che B sta a C come $B \times A$ sta a $C \times A$.

Poiché difatti A moltiplicando B ha prodotto $B \times A$, si ha che B è contenuto in $B \times A$ altrettante volte quante sono le unità contenute in A. Ma pure l'unità U è contenuta nel numero A altrettante volte quante sono le unità in esso

a. Al solito, in questo come nei casi similari: « Se un numero moltiplicando due numeri ne produce certi altri ».

[11] I teoremi n. 17 e 18 sono corrispondenti: il primo dice che:

$$ab : ac = b : c$$

mentre il secondo dice che:

$$ac : bc = a : b$$

Si tratta dunque della stessa proprietà, una volta ammessa la proprietà commutativa della moltiplicazione. Per dimostrare il primo teorema, si parte dalle proporzioni:

$$1 : a = b : ab$$
$$1 : a = c : ac$$

da cui:

$$b : ab = c : ac$$

e permutando i medi:

$$b : c = ab : ac$$

Per dimostrare la prop. 18 si parte dal risultato della 17:

$$a : b = ca : cb$$

e si applica la proprietà commutativa della moltiplicazione (VII, 16) ottenendo appunto:

$$a : b = ac : bc$$

contenute; l'unità U è perciò contenuta nel numero A le stesse volte che B è contenuto in $B \times A$. Quindi l'unità U sta al numero A come B sta a $B \times A$ (VII, def. XX). Per la stessa ragione, si ha pure che l'unità U sta al numero A come C sta a $C \times A$; quindi anche, B sta a $B \times A$ come C sta a $C \times A$. Dunque, ***permutando***, B sta a C come $B \times A$ sta a $C \times A$ (VII, 13). - C.D.D.

PROPOSIZIONE 18.

Se due numeri ne moltiplicano un terzo, i prodotti avranno fra loro lo stesso rapporto dei numeri che fanno da moltiplicatori[a].

Infatti i due numeri A, B, moltiplicando un numero C, diano i prodotti $C \times A$, $C \times B$; dico che A sta a B come $C \times A$ sta a $C \times B$.

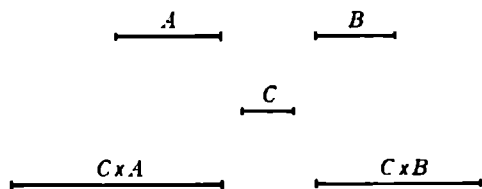
Poiché difatti A, moltiplicando C, dà il prodotto $C \times A$, anche C, moltiplicando A, dà il prodotto $C \times A$ (VII, 16). Per la stessa ragione, C moltiplicando B dà il prodotto $C \times B$. Sicché il numero C, moltiplicando i due numeri A, B, risulta dare i due prodotti $C \times A$, $C \times B$. Dunque A sta a B come $C \times A$ sta a $C \times B$ (VII, 17). - C.D.D.

LE VII, 17, 18: APPLICANO: VII, 13, 16.

SONO APPLICATE IN: VII, 18, 19, 22, 34; VIII, 2, 5, 10, 11, 12, 14, 15, 18, 19, 20, 21; IX, 1, 2, 4, 5.

A B

C

C x A C x B

PROPOSIZIONE 19.

Se quattro numeri sono proporzionali, il prodotto del primo per il quarto[b] *sarà uguale al prodotto del secondo per il terzo;*

a. Letteralmente: che moltiplicano.

b. Letteralmente: il numero prodottosi, od originatosi, dal primo e dal quarto.

e se il prodotto di un primo numero per un quarto è uguale a quello di un secondo per un terzo, i quattro numeri saranno proporzionali [12].

Siano A, B, C, D quattro numeri proporzionali, in modo che A stia a B come C sta a D: ora, A moltiplicando D

[12] Questo teorema fondamentale della teoria delle proporzioni trova riscontro nella VI, 16 relativa ai segmenti di retta.

La dimostrazione qui procede in sostanza così: essendo data la proporzione: $a : b = c : d$ si parte dalle due uguaglianze di rapporti:

$$a : b = ac : bc \qquad \text{(VII, 18)}$$

$$c : d = ac : ad \qquad \text{(VII, 17)}$$

da cui si ricava:

$$ac : bc = ac : ad$$

Di qui si deduce:

$$bc = ad$$

Come per altre proposizioni del libro settimo, qui Heiberg per quest'ultima deduzione ricorre ad una proposizione del libro quinto e precisamente alla prop. 9 (grandezze che hanno un medesimo rapporto con una stessa grandezza sono uguali tra loro, ecc.). Ma, con Heath ed Enriques, crediamo che il ricorso al libro quinto, qui e altrove, non sia necessario.

Per dimostrare il teorema inverso (anche esso compreso nella prop. VII, 19) si parte dall'uguaglianza:

$$ad = bc$$

e si ricava:

$$ac : ad = ac : bc$$

(Per questa deduzione, Heiberg ricorre alla V, 7: una stessa grandezza ha lo stesso rapporto con due grandezze uguali: Heath, Zeuthen ed Enriques, ai quali ci associamo, sono di parere contrario).

Ma:

$$ac : ad = c : d \qquad \text{(VII, 17)}$$

e:

$$ac : bc = a : b \qquad \text{(VII, 18)}$$

Segue:

$$a : b = c : d$$

con la consueta applicazione della proprietà transitiva dell'uguaglianza di rapporti (tra grandezze in generale per Heiberg, tra numeri per gli altri commentatori).

Noi pensiamo, dunque, che nel libro settimo non si faccia uso della vera e propria teoria delle proporzioni del libro quinto.

E tale opinione non è in contrasto con quanto è stato detto a proposito di quelle « assunzioni », le quali, a nostro avviso, trovano la loro giustificazione nelle proposizioni iniziali dello stesso libro quinto. Si tratta, infatti, solo di quelle proposizioni iniziali che riguardano il caso particolare delle grandezze commensurabili, e che non applicano la definizione eudossiana di proporzione, appartenendo dunque (per dir così) più al libro settimo che al quinto vero e proprio.

dia il prodotto $D \times A$, mentre B moltiplicando C dia il prodotto $C \times B$; dico che $D \times A$ è uguale a $C \times B$.

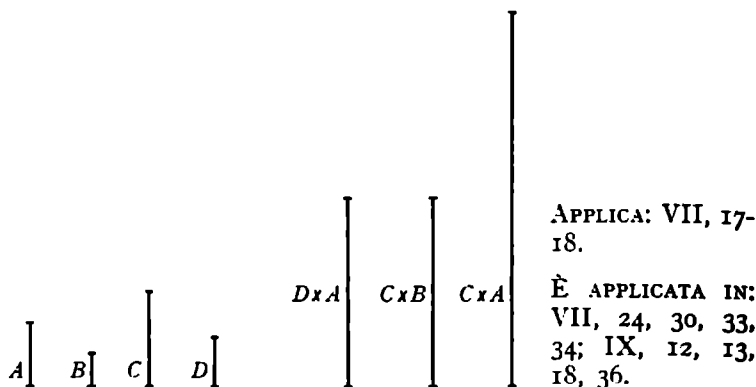
Infatti A, moltiplicando C, dia il prodotto $C \times A$. Poiché dunque A moltiplicando C ha prodotto $C \times A$, e moltiplicando D ha prodotto $D \times A$, il numero A, moltiplicando i due numeri C, D, risulta dare i prodotti $C \times A$, $D \times A$. Perciò C sta a D come $C \times A$ sta a $D \times A$ (VII, 17). Ma C sta a D come A sta a B; quindi anche, A sta a B come $C \times A$ sta a $D \times A$. Di nuovo, poiché A moltiplicando C ha prodotto $C \times A$, ma B anche, moltiplicando C, ha prodotto $C \times B$, i due numeri A, B allora, moltiplicando un numero C, risultano dare i prodotti $C \times A$, $C \times B$. Perciò A sta a B come $C \times A$ sta a $C \times B$ (VII, 18). Ma pure, tuttavia, A sta a B come $C \times A$ sta a $D \times A$; quindi anche, $C \times A$ sta a $C \times B$ come $C \times A$ sta a $D \times A$. Sicché $C \times A$ ha lo stesso rapporto con ciascuno dei due prodotti $C \times B$, $D \times A$; dunque $C \times B$ è uguale a $D \times A$.

Di nuovo, sia adesso il caso in cui il prodotto $D \times A$ è per ipotesi uguale al prodotto $C \times B$; dico che A sta a B come C sta a D.

Infatti, adoperando la medesima costruzione, poiché $D \times A$ è uguale a $C \times B$, si ha che $C \times A$ sta a $D \times A$ come $C \times A$ sta a $C \times B$ (V, 7). Ma $C \times A$ sta a $D \times A$ come C sta a D (VII, 17), e $C \times A$ sta a $C \times B$ come A sta a B (VII, 18). Dunque si ha pure che A sta a B come C sta a D. – C.D.D.[a].

a. Heiberg rimanda all'Appendice una proposizione che appare in certi Mss. a questo punto, riguardante il caso in cui, se si hanno *tre* numeri in proporzione fra loro, il prodotto degli estremi è uguale al quadrato del medio, ed inversamente. Piuttosto in sé sospetta (ad es. non appare nel codice P di prima mano – si trova in margine, ad opera di mano recente), è omessa anche da Campano (*op. cit.*, 59 *v.*); e va bene che Campano, come osserva lo stesso Heiberg, in questi libri aritmetici si discosta tanto dai termini greci che raramente può fare da documento, tuttavia egli nota che Euclide non dà l'equivalente proposizione per *tre* numeri proporzionali come fa invece in VI, 17 (per lui VI, 16) per le tre linee rette che siano in proporzione

APPLICA: VII, 17-18.

È APPLICATA IN: VII, 24, 30, 33, 34; IX, 12, 13, 18, 36.

PROPOSIZIONE 20.

I numeri più piccoli fra quanti abbiano tra loro [a due a due] lo stesso rapporto, sono equisottomultipli[a] *dei numeri che hanno tra loro a due a due lo stesso rapporto, [rispettivamente] il numero maggiore del maggiore e quello minore del minore*[13].

Infatti, siano CD, EF i numeri più piccoli fra quanti abbiano tra loro a due a due lo stesso rapporto di [altri due

fra loro, dato che il risultato per i numeri può essere facilmente provato mediante la 19 appena data (che a Campano risulta 20), senza cioè bisogno di una proposizione apposita: il che non si discosterebbe di fatto da certi usi euclidei.

a. Letteralmente: misurano altrettante volte, cioè lo stesso numero di volte.

[13] Questa proposizione considera coppie di numeri aventi tra loro lo stesso rapporto: adoperando il linguaggio delle frazioni diremmo che qui Euclide consideri un insieme di frazioni tutte uguali tra loro. Fra tutte queste frazioni uguali considera quella che ha termini più piccoli (questo concetto verrà poi meglio precisato nelle due proposizioni seguenti 21 e 22).

Ebbene: qualunque altra delle frazioni uguali ha i termini che sono equimultipli di quelli della frazione a termini minimi, ossia i termini di questa sono equisottomultipli dei termini di qualunque altra ad essa uguale.

Cioè: se $\frac{a}{b}$ è quella che noi chiamiamo frazione irriducibile (cioè già ridotta ai minimi termini), qualunque altra frazione $\frac{c}{d}$ che sia uguale ad $\frac{a}{b}$ ha termini del tipo $c = ma$, $d = mb$. Perciò, se partiamo da una

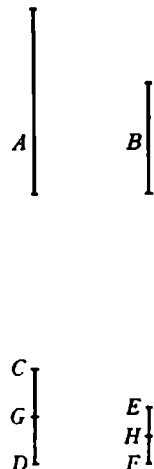
numeri] *A*, *B*; dico che *CD* divide *A* altrettante volte quante *EF* divide *B*.

Il numero *CD* non è difatti una frazione (« parti ») di *A*. Se infatti fosse possibile, lo sia; perciò *EF* sarebbe in tal caso la stessa frazione (« parti ») di *B* che *CD* è di *A* (VII, 13 e def. XX). Vi sarebbero quindi in *CD* tante parti di *A*, quante parti [omonime] di *B* sono anche in *EF*. Risultino divisi: *CD* nelle parti di *A*, cioè *CG*, *GD*, ed *EF* nelle parti di *B*, cioè *EH*, *HF*; il numero delle parti *CG*, *GD* sarà così uguale al numero delle parti *EH*, *HF*. Ora, poiché i numeri *CG*, *GD* sono uguali fra loro, ma pure i numeri *EH*, *HF* sono uguali fra loro, ed il numero di *CG*, *GD* è uguale a quello di *EH*, *HF*, si ha che *CG* sta ad *EH* come *GD* sta a *HF*. Quindi anche, uno degli antecedenti starà ad uno dei conseguenti come la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti (VII, 12). Perciò *CG* sta ad *EH* come tutto *CD* sta a tutto *EF*, per cui *CG*, *EH* stanno fra loro nello stesso rapporto di *CD*, *EF*, pur essendo minori di essi – il che è impossibile: infatti, per ipotesi, sono *CD*, *EF* i numeri più piccoli fra quanti abbiano tra loro a due a due quel medesimo rapporto. Quindi *CD* non è una frazione di *A*; è perciò un sottomultiplo (non è cioè « parti », ma « parte ») (VII, 4). Inoltre *EF* è lo stesso sottomultiplo di *B* che *CD* è di *A* (VII, 13 e def. XX); dunque *CD*, *EF* sono equisottomultipli di *A*, *B*. – C.D.D.

A B

C G D E H F

APPLICA: VII, 4, 12, 13.

È APPLICATA IN: VII, 21, 24, 30, 33, 34; VIII, 1, 4, 8, 20, 21; IX, 12, 16, 17, 19, 36.

frazione irriducibile, tutte le altre frazioni ad essa uguali si ottengono moltiplicandone ambedue i termini successivamente per 2, 3, 4, 5, e così via.

Nella prop. 21 si precisa che se i termini di una frazione sono primi tra loro, la frazione è, fra tutte le altre ad essa uguali, quella avente i termini minimi; e nella seguente prop. 22 si dimostra il teorema inverso.

Naturalmente Euclide non parla di termini di frazioni uguali tra loro, ma di coppie di numeri interi che hanno tra loro lo stesso rapporto.

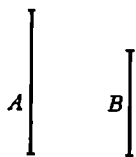
PROPOSIZIONE 21.

I numeri primi fra loro sono i più piccoli fra quanti abbiano tra loro a due a due lo stesso rapporto.

Siano primi fra loro i numeri *A*, *B*; dico che *A*, *B* sono i più piccoli fra quanti abbiano tra loro a due a due lo stesso rapporto.

Infatti, se non fosse in tal modo, vi sarebbero altri numeri minori di *A*, *B* ad avere fra loro lo stesso rapporto di *A*, *B*. Siano essi *C*, *D*.

Poiché dunque i numeri più piccoli fra quanti abbiano tra loro a due a due lo stesso rapporto sono equisottomultipli dei numeri che hanno tra loro a due a due lo stesso rapporto, rispettivamente il numero maggiore del maggiore e quello minore del minore (VII, 20), vale a dire poiché l'antecedente divide l'antecedente ed il conseguente il conseguente, si ha che *C*, *D* sarebbero in tal caso equisottomultipli di *A*, *B*. Per quante volte allora *C* è contenuto in *A*, altrettante unità siano in *E*. Perciò anche *D* divide *B* secondo le unità che sono in *E*. Ora, poiché *C* divide *A* secondo le unità che sono in *E*, pure *E*[, *permutando*,] divide *A* secondo le unità che sono in *C* (VII, 15). Per la stessa ragione, *E* divide anche *B* secondo le unità che sono in *D* (VII, 15). Quindi *E* divide *A*, *B* (VII, 16), che sono primi fra loro: il che è impossibile (VII, def. XII). Non possono perciò esservi altri numeri, minori di *A*, *B*, che stiano fra loro nello stesso rapporto di *A*, *B*. Dunque *A*, *B* sono i più piccoli fra i numeri che abbiano tra loro a due a due quello stesso rapporto. – C.D.D.

A B

C D E

APPLICA: VII, 15, 20.

È APPLICATA IN: VII, 24, 30, 33, 34; VIII, 1, 8, 21; IX, 12, 16, 17, 19, 36.

PROPOSIZIONE 22.

I numeri più piccoli, fra quanti abbiano tra loro a due a due lo stesso rapporto, sono primi fra loro.

Siano A, B i numeri più piccoli fra quanti abbiano tra loro a due a due lo stesso rapporto; dico che A, B sono primi fra loro.

Infatti, se non fossero primi fra loro, un altro numero li dividerebbe. Li divida, e sia esso C. Ora, per quante volte C è contenuto in A, altrettante unità siano in D, ed altrettante unità siano in E, per quante volte C è contenuto in B.

Poiché C divide A secondo le unità che sono in D, si ha che C, moltiplicando D, dà A come prodotto (VII, def. XV). Per la stessa ragione, C anche, moltiplicando E, dà come prodotto B. Sicché il numero C, moltiplicando i due numeri D, E, dà i prodotti A, B, per cui D sta ad E come A sta a B (VII, 17): perciò D, E stanno fra loro nello stesso rapporto di A, B[, cioè dei numeri minimi A, B], pur essendo minori di essi – il che è impossibile. Non può quindi un altro numero dividere i numeri A, B. Dunque A, B sono primi fra loro. – C.D.D.

APPLICA: VII, 17.

È APPLICATA IN: VIII, 2, 3; IX, 15.

PROPOSIZIONE 23.

Se due numeri sono primi fra loro, il numero che divida uno di essi sarà primo rispetto all'altro [14].

[14] Comincia con questa prop. VII, 23 una serie di lemmi che conduce nella VII, 27 ad un risultato importante: che se due numeri sono primi tra loro, sono primi tra loro anche i loro quadrati, i loro cubi...

La via per giungere alla VII, 27 è la seguente:

1) VII, 23. Se a, b sono primi tra loro, un numero c che sia divisore di uno di essi (ad esempio di a) è primo con l'altro (ad esempio con b).

Dimostrazione per assurdo: Se c non fosse primo con b avrebbe con

Siano A, B due numeri primi fra loro, ed un numero C divida A; dico che anche C, B sono primi fra loro.

Infatti, se C, B non fossero primi fra loro, un altro numero dividerebbe C, B. Li divida, e sia esso D. Poiché D

esso un divisore comune d. Ma allora d, essendo divisore di c che è divisore di a, sarebbe a sua volta divisore di a (la cosiddetta assunzione terza: vedi nota apposita sulle cosiddette «assunzioni» all'inizio del libro settimo). Ossia d sarebbe un divisore comune di a, b, contro l'ipotesi che a, b, siano primi tra loro.

2) VII, 24. Se a è primo con c, ed anche b è primo con c, pure il prodotto ab è primo con c.

Dimostrazione per assurdo. Se possibile, ab non sia primo con c: sia d un divisore comune ad ab, c.

Dunque d divide c; siccome a, c sono per ipotesi primi tra loro, d è primo con a (VII, 23).

Inoltre, s'è detto, d divide il prodotto ab; sia contenuto in esso m volte, cioè sia: $ab = md$. Se ne ricava la proporzione: $d : a = b : m$ (VII, 19). Ma siccome d, a sono (come s'è sopra veduto) primi tra loro, essi sono i minimi numeri fra tutti quelli aventi lo stesso rapporto (VII, 21) e quindi sono sottomultipli (anzi equisottomultipli) di b, m. Ma dunque d misura b, e siccome s'è supposto che misuri anche c, il numero d sarebbe un divisore comune di b, c, contro l'ipotesi che b sia primo con c.

3) VII, 25. Se due numeri a, c son primi tra loro, anche il quadrato di uno di essi (ad esempio a^2) è primo con l'altro (ad esempio con c).

Dimostrazione. Si considera il numero a due volte (Euclide fa intervenire un numero $b = a$). Si ha quindi:

a primo con c
a primo con c

Allora per il teorema precedente VII, 24, anche il prodotto $a \cdot a$, ossia il quadrato a^2, è primo con c (si tratta dunque di un caso particolare, per $b = a$, della proposizione precedente VII, 24).

4) VII, 26. Se a è primo con c, d, ed anche b è primo con c, d, il prodotto ab è primo col prodotto cd.

Dimostrazione. Per il teorema VII, 24, essendo:

a primo con c; b primo con c

risulta: ab primo con c.

Per lo stesso teorema VII, 24 essendo:

a primo con d; b primo con d,

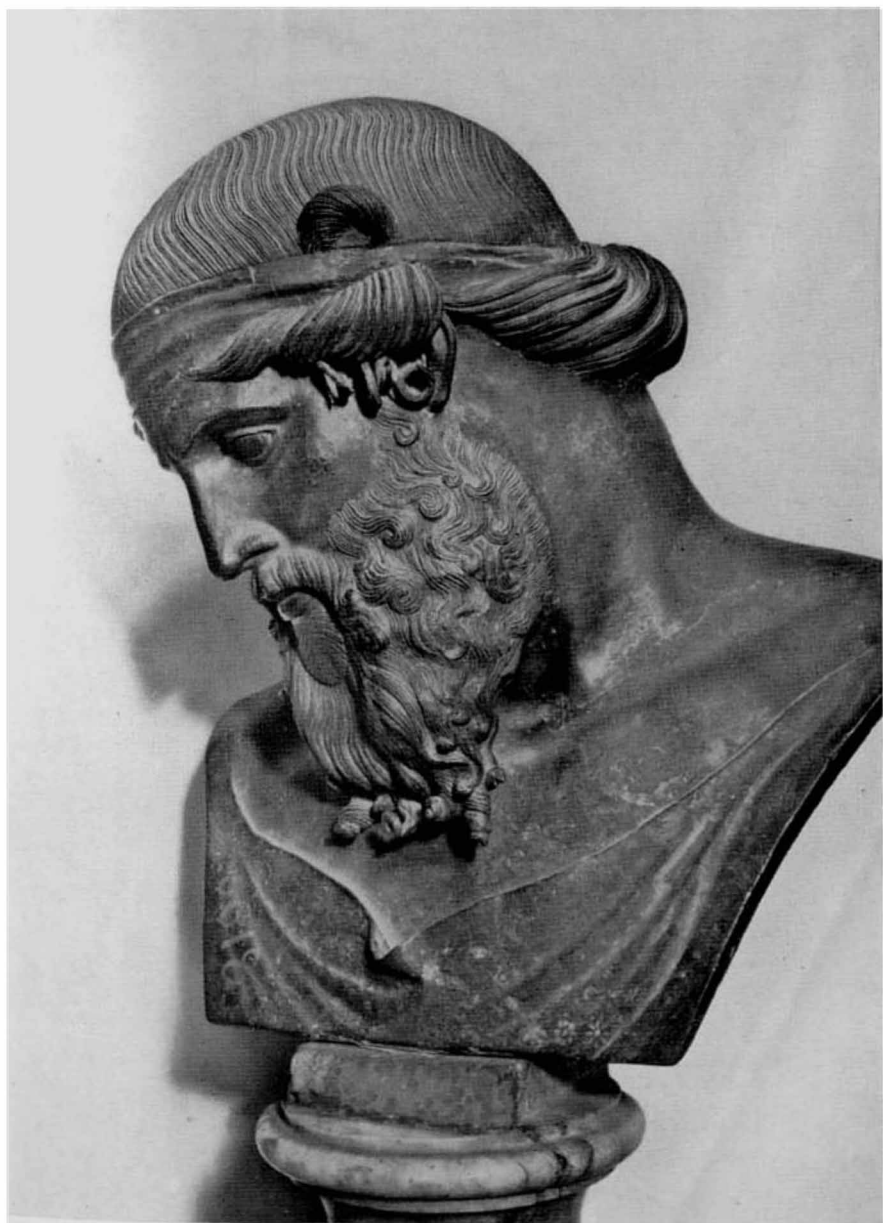
risulta:

ab primo con d

Dunque:

c primo con ab
d primo con ab

Sempre per lo stesso teorema VII, 24 si ricava dunque:

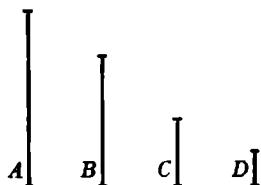
cd primo con ab

Bromofoto

Testa bronzea presunta di Pitagora,
proveniente dalla Villa dei Pisoni a Ercolano

(Napoli, Museo Nazionale).

dividerebbe C, e C divide A, anche D in tal caso divide A (assunzione 3). Ma esso misurerebbe anche B, per cui D dividerebbe A, B, che sono primi fra loro: il che è impossibile (VII, def. XII). Non può quindi un altro numero dividere i numeri C, B. Dunque C, B sono primi fra loro. – C.D.D.

È APPLICATA IN: VII, 24.

A B C D

PROPOSIZIONE 24.

Se due numeri sono primi rispetto ad un altro, anche il loro prodotto sarà primo rispetto a quello stesso.

Infatti, i due numeri A, B siano primi rispetto ad un altro numero C, ed A moltiplicando B dia il prodotto $B \times A$; dico che i numeri C e $B \times A$ sono primi fra loro.

Se difatti C e $B \times A$ non fossero primi fra loro, un altro numero li dividerebbe. Li divida, e sia esso E. Ora, poiché C, A sono primi fra loro, ed un altro numero E viene a dividere C, si ha che in tal caso E sarebbe primo con A (VII, 23). Per quante volte allora E è contenuto in $B \times A$, altrettante unità siano in un numero F, per cui anche F, *permutando*, divide $B \times A$ secondo le unità che sono in E (VII, 15). Quindi E moltiplicando F risulta dare il prodotto $B \times A$ (VII, def. XV). Ma pure A tuttavia, moltiplicando B, ha dato il prodotto $B \times A$, per cui il prodotto di E per F è uguale a quello di A per B. Ma se

5) Ed eccoci alla VII, 27: Se a è primo con b, anche a^2 è primo con b^2, ecc.

Dimostrazione. Siccome a, b, sono primi tra loro, anche a^2, b sono primi tra loro (VII, 25).

Ma applicando ancora la VII, 25 ai due numeri: a^2, b primi tra loro, si ha che il quadrato di uno di essi (ad esempio di b) è primo con l'altro (ad esempio con a^2); ossia:

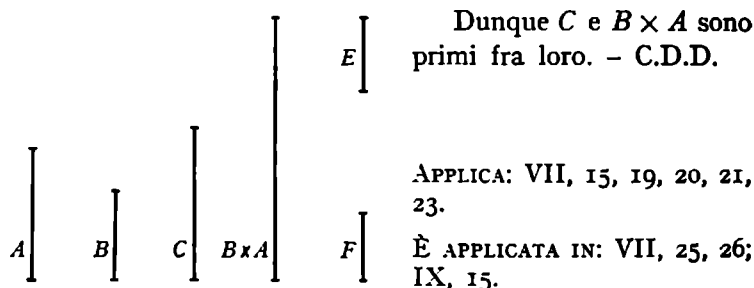
$$a^2 \text{ primo con } b^2$$

In modo analogo si procede per i cubi, ecc.

il prodotto degli estremi è uguale al prodotto dei medi, quattro numeri sono proporzionali (VII, 19); quindi E sta ad A come B sta a F. Ora, A, E sono primi fra loro, i numeri primi fra loro sono anche i più piccoli possibili fra tutti quelli aventi tra loro a due a due lo stesso rapporto (VII, 21), ed i numeri più piccoli, fra quanti abbiano tra loro a due a due lo stesso rapporto, sono equisottomultipli dei numeri che hanno tra loro a due a due lo stesso rapporto, rispettivamente il numero maggiore del maggiore e quello minore del minore (VII, 20), vale a dire l'antecedente divide l'antecedente ed il conseguente divide il conseguente; perciò E divide B. Ma esso divide anche C, per cui E divide B, C, che sono primi fra loro: il che è impossibile (VII, def. XII). Non può quindi un altro numero dividere i numeri C e $B \times A$.

Dunque C e $B \times A$ sono primi fra loro. - C.D.D.

APPLICA: VII, 15, 19, 20, 21, 23.

È APPLICATA IN: VII, 25, 26; IX, 15.

PROPOSIZIONE 25.

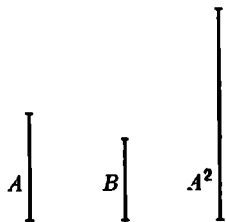
Se due numeri sono primi fra loro, il quadrato di uno di essi[a] *sarà primo rispetto all'altro numero.*

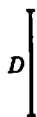
Siano A, B due numeri primi fra loro, ed A moltiplicando sé stesso generi il numero (quadrato) A^2[b]; dico che B ed A^2 sono primi fra loro.

Si ponga difatti D uguale ad A. Poiché A, B sono primi fra loro, ed A è uguale a D, anche D, B sono primi fra loro.

a. Letteralmente: *il numero originatosi, prodottosi da uno di essi*, nel senso del prodotto di uno di essi per sé stesso.

b. Euclide indica con la lettera Γ il prodotto di A per A: noi usiamo, per facilitare la lettura, il simbolo A^2.

Ciascuno dei due numeri D, A è quindi primo rispetto a B; perciò anche il prodotto di D per A sarà primo rispetto a B (VII, 24). Ma il numero A^2 è il prodotto di D per A (cioè di A per sé stesso). Dunque A^2, B sono primi fra loro. – C.D.D.

Applica: VII, 24.

È applicata in: VII, 27; IX, 15.

Proposizione 26.

Se due numeri sono primi rispetto ad altri due numeri, ciascuno dei primi due ad ognuno dei secondi, anche il prodotto dei primi due numeri e quello degli altri due saranno primi fra loro.

Infatti, i due numeri A, B siano primi rispetto a ciascuno dei due numeri C, D, ossia A rispetto a C, D, e B pure rispetto a C, D, ed A moltiplicando B dia il prodotto $A \times B$, mentre C moltiplicando D dia il prodotto $C \times D$; dico che $A \times B$ e $C \times D$ sono primi fra loro.

Poiché ciascuno dei due numeri A, B è difatti primo rispetto a C, anche il prodotto di A per B sarà primo rispetto a C (VII, 24). Quindi $A \times B$ e C sono primi fra loro. Per la stessa ragione, pure il prodotto $A \times B$ ed il numero D sono primi fra loro. Ciascuno dei due numeri C, D è perciò primo rispetto ad $A \times B$. Quindi anche il prodotto di C per D sarà primo rispetto ad $A \times B$ (VII, 24).

Dunque $A \times B$ e $C \times D$ sono primi fra loro. – C.D.D.

APPLICA: VII, 24.

È APPLICATA IN: VII, 27.

PROPOSIZIONE 27.

Se due numeri sono primi fra loro, anche i loro quadrati, e così i loro cubi, saranno primi fra loro.

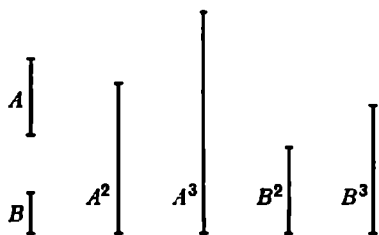
Siano A, B due numeri primi fra loro, ed A moltiplicando sé stesso produca A^2 e moltiplicando A^2 produca A^3, mentre B moltiplicando sé stesso produca B^2 e moltiplicando B^2 produca B^3 [a]; dico che sia A^2, B^2 che A^3, B^3 sono primi fra loro.

Infatti, poiché A, B sono primi fra loro, ed A moltiplicando sé stesso ha prodotto A^2, si ha che A^2, B sono primi fra loro (VII, 25). Poiché dunque A^2, B sono primi fra loro, e B moltiplicando sé stesso ha prodotto B^2, si ha che A^2, B^2 sono primi fra loro (id.). Di nuovo, poiché A, B sono primi fra loro, e B moltiplicando sé stesso risulta produrre B^2, si ha che A, B^2 sono primi fra loro (id.). Poiché i due numeri A, A^2 sono dunque primi rispetto ai due numeri B, B^2 essendo l'uno e l'altro primo rispetto a ciascuno dei due [secondi], anche il prodotto di A per A^2 è primo rispetto al prodotto di B per B^2 (VII, 26). Ora, A^3 è il pro-

a. È inutile ricordare che simboli come A^2 ed A^3 corrispondono in greco ad altre lettere che non A e B; difatti: « A moltiplicando se stesso produca C, e moliplicando C produca D, mentre B moltiplicando se stesso produca E, e moltiplicando E produca F ».

dotto di A per A^2, mentre quello di B per B^2 è B^3. Dunque A^3, B^3 sono primi fra loro. - C.D.D.

APPLICA: VII, 25, 26.

È APPLICATA IN: VIII, 2, 3.

PROPOSIZIONE 28.

Se due numeri sono primi fra loro, anche la loro somma sarà prima rispetto a ciascuno di essi; e se un numero che sia somma [di altri due] è primo rispetto ad uno degli addendi, anche gli addendi saranno primi fra loro.

Infatti, si sommino i due numeri AB, BC primi fra loro; dico che anche la loro somma AC è prima rispetto a ciascuno dei due numeri AB, BC.

Se AC, AB difatti non fossero primi fra loro, un altro numero dividerebbe AC, AB. Li divida, e sia esso D. Poiché dunque D divide in tal caso AC, AB, dividerà anche la loro differenza BC (assunzione 2). Ma D divide pure AB; perciò D dividerebbe AB, BC, che sono primi fra loro: il che è impossibile (VII, def. XII). Non può quindi un altro numero dividere i numeri AC, AB, per cui AC, AB sono primi fra loro. Per la stessa ragione, anche AC, BC sono primi fra loro. Dunque AC è primo rispetto a ciascuno dei due numeri AB, BC.

Di nuovo, sia adesso il caso in cui AC, AB[, cioè la somma AC ed uno degli addendi,] sono primi fra loro; dico che anche AB, BC[, cioè i due addendi,] sono primi fra loro.

Infatti, se AB, BC non fossero primi fra loro, un altro numero dividerebbe AB, BC. Li divida, e sia esso D. Ora, poiché D divide in tal caso ciascuno dei due numeri AB, BC, dividerà anche tutto quanto AC[, cioè la loro somma (assunzione 1)]. Ma D divide pure AB; perciò D dividerebbe AC, AB, che sono primi fra loro: il che è impossibile (VII, def. XII). Non può quindi un altro numero dividere

A B C

D

i numeri AB, BC. Dunque AB, BC sono primi fra loro. – C.D.D.

È APPLICATA IN: IX, 15.

PROPOSIZIONE 29.

Ogni numero primo è primo rispetto ad ogni altro numero che esso non divida.

Sia A un numero primo e non divida B; dico che B, A sono primi fra loro [15].

[15] Si ha ora un gruppo di quattro proposizioni (29, 30, 31, 32) che riguardano la scomposizione di un numero in fattori primi. La proposizione essenziale è la 31ª, che mostra come ogni numero composto ammetta per divisore un numero primo. Da questa proprietà si ricava il procedimento della scomposizione.

Questa proposizione 29 afferma che un numero primo è primo con qualunque altro numero, ad eccezione dei suoi multipli. La dimostrazione si fonda soltanto sulle definizioni di numero primo e di numeri primi tra loro, ed è assai elegante.

Sia p un numero primo, e sia a un qualunque altro numero che non sia multiplo di p, cioè che non venga diviso (esattamente) da p. Si vuol dimostrare che a, p sono primi tra loro.

Non lo siano, se possibile, e ammettano un divisore comune c (diverso dall'unità). Dunque a è un multiplo di c e siccome, per ipotesi, a non è multiplo di p, ciò significa che p non è uguale a c.

Ma c è stato supposto essere divisore comune di a, p: quindi è divisore di p pur non essendo uguale a p ed essendo diverso dall'unità: ciò è impossibile dato che p è primo.

Su questo teorema VII, 29 si fonda il seguente VII, 30, che ha grande importanza perché esso porta con sé l'univocità della scomposizione in fattori primi, come vedremo. La VII, 30 afferma che se un numero primo p divide un prodotto ab, esso deve dividere (almeno) uno dei fattori (a oppure b).

Nella dimostrazione si suppone che p non divida, ad esempio, il numero a: si fa vedere, allora, che p divide necessariamente l'altro fattore b del prodotto.

Infatti, se p non divide a, cioè se a non è multiplo di p, i due numeri a, p sono primi tra loro per la precedente VII, 29.

Siccome p, per ipotesi, divide il prodotto ab, sia: $ab = mp$.

Di qui, per la VII, 19 si ricava la proporzione:

$$p : a = b : m$$

Ma p, a sono (come s'è visto or ora) primi tra loro, dunque sono i

Infatti, se B, A non fossero primi fra loro, un altro numero li dividerebbe. Li divida C. Poiché C divide in tal

numeri minimi fra tutte le coppie di numeri aventi lo stesso rapporto (VII, 21) e quindi sono (equi)-sottomultipli rispettivamente di b, m (VII, 20).

In particolare risulta stabilito che p è sottomultiplo di b, ossia che divide b, come appunto si doveva dimostrare.

Si passa ora alla proposizione fondamentale VII, 31 la quale stabilisce che qualunque numero composto ammette per divisore un qualche numero primo.

La definizione VII, 13 stabilisce che *numero composto* è quello che è misurato da un numero, cioè ammette un numero come divisore (numero diverso da sé stesso, e naturalmente dall'unità, che non è considerata come numero).

Il numero composto a ammetta, dunque, un divisore b. Se b è primo, il teorema è dimostrato. Se b è composto, ammetterà un divisore c. Se c non è primo, si continui ancora nello stesso procedimento: ad un certo momento si giungerà ad un divisore primo, altrimenti, dice Euclide, «vi sarebbero infiniti (ἄπειροι) numeri che misurerebbero a, ciascuno sempre minore dell'altro, ciò che è impossibile (accada) nei numeri» (ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον ἐν ἀριθμοῖς).

Euclide esprime qui il fatto che tra un qualsiasi numero intero e l'unità esiste un numero finito di numeri (interi) intermedi: siamo nel campo del *discreto*, e non del *continuo*. Si osservi che analogamente nella VII, 1, Euclide ammette che, procedendo in una serie di *resti*, sempre l'uno minore dell'altro, si giunga necessariamente al resto 1.

La VII, 31 porta come conseguenza che qualunque numero composto può essere presentato come prodotto di fattori primi: basta infatti replicare l'applicazione della stessa VII, 31 e riferirsi ancora all'affermazione della *finitezza* del procedimento. E può ricavarsi (come s'è detto), dalla precedente VII, 30 l'univocità della scomposizione in fattori primi.

Infatti, se possibile, lo stesso numero a si possa scomporre in fattori primi, in due modi diversi; sia cioè:

$$a = pq \qquad a = rs$$

dove p, q, r, s sono numeri primi (per semplicità abbiamo supposto che la scomposizione abbia avuto luogo sempre in due soli fattori primi). Consideriamo ora il fattore primo r della seconda scomposizione. Esso è un divisore di a (che infatti è suo multiplo). Ma s'è supposto che a sia uguale anche al prodotto pq, sicché il numero primo r divide il prodotto pq. Ma se un numero primo divide un prodotto, esso divide (almeno) uno dei fattori (VII, 30), dunque r deve dividere p oppure q. Ma p, q sono numeri primi, dunque r è necessariamente uguale a p oppure a q, dal momento che p, q sono divisibili soltanto per sé stessi (e l'unità). Dunque nelle due scomposizioni, supposte distinte, $a = pq$, $a = rs$ s'è trovato che il fattore r è uguale ad uno dei due fattori p, q. Analogo ragionamento porta a concludere che sono uguali anche gli altri fattori residui (e nel caso generale tutti i fattori a due a due). Un numero composto si può dunque scomporre in fattori primi in un solo modo.

caso B, ma A non divide B, il numero C non sarebbe uguale ad A [a]. Ma poiché C divide B, A, esso anche dividerebbe A, che è primo, pur non essendo uguale ad esso: il che è impossibile. Non può quindi un altro numero dividere B, A. Dunque A, B sono primi fra loro. – C.D.D.

A

B

C

È APPLICATA IN: VII, 30; IX, 12, 36.

PROPOSIZIONE 30.

Se due numeri si moltiplicano fra loro [b], *ed un altro numero, che sia primo, divide il prodotto, esso dividerà anche uno dei fattori* [c].

Infatti, i due numeri A, B moltiplicandosi fra loro diano il prodotto $A \times B$, ed un altro numero D, che è primo, divida il prodotto $A \times B$; dico che D divide uno dei numeri A, B.

Supponiamo difatti che D non divida A; ora, D è primo, per cui A, D sono primi fra loro (VII, 29). E per quante volte D è contenuto in $A \times B$, altrettante unità siano in E. Poiché dunque D è contenuto in $A \times B$ altrettante volte quante sono le unità contenute in E, si ha che D, se moltiplica E, risulta dare il prodotto $A \times B$ (VII, def. XV). Ma tuttavia pure A, moltiplicando B, risulta dare il prodotto $A \times B$; perciò il prodotto di D per E è uguale a quello di A per B. Quindi D sta ad A come B sta ad E (VII, 19). Ma D, A sono primi fra loro, i numeri primi fra loro sono anche i più piccoli possibili tra tutti quelli aventi tra loro a due a due lo stesso rapporto (VII, 21), ed i numeri

a. Letteralmente: *il numero* C *non è lo stesso di* A; così come dopo avremo: *pur non essendo il medesimo*.

b. Letteralmente: Se due numeri moltiplicandosi fra loro producono un certo numero.

c. Letteralmente: anche uno dei numeri presi inizialmente.

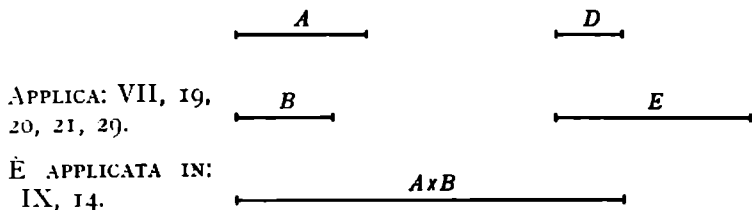
più piccoli possibili sono equisottomultipli di quanti abbiano fra loro a due a due lo stesso rapporto, rispettivamente il numero maggiore del maggiore e quello minore del minore (VII, 20), vale a dire l'antecedente divide l'antecedente ed il conseguente divide il conseguente; quindi D divide B[, cioè è un sottomultiplo di B]. Similmente potremo anche dimostrare che, qualora D non divida B, esso dividerà A. Dunque D divide [in ogni caso] uno dei numeri A, B. – C.D.D.

A D

APPLICA: VII, 19, 20, 21, 29.

B E

È APPLICATA IN: IX, 14.

A×B

PROPOSIZIONE 31.

Ogni numero composto ha per divisore un numero primo.

Sia A un numero composto; dico che A è diviso da un numero primo.

Infatti, poiché A è composto, un altro numero lo dividerà. Lo divida, e sia esso B. Se allora B è primo, si sarebbe già conseguito quanto proposto. Ma se è composto, lo dividerà un altro numero. Lo divida, e sia esso C. Ora, poiché C divide B, ma B divide A, anche C divide in tal caso A (assunzione 3). Se allora C è primo, si sarebbe già conseguito quanto proposto. Se invece è composto, lo dividerà un altro numero. Procedendo così in una tale ricerca, si finirà col trovare un numero primo che farà da divisore. Se infatti non lo si trovasse, infiniti numeri[a] dividerebbero il numero A, dei quali uno sarebbe sempre minore dell'altro: il che è impossibile nel caso di numeri[b]. Si finirà quindi

a. ἄπειροι ἀριθμοί.
b. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον ἐν ἀριθμοῖς.

col trovare un numero primo che divida il numero ad esso precedente, e che dividerà anche A.

A

B

C

Dunque, ogni numero composto... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

È APPLICATA IN: VII, 32; IX, 13, 20.

PROPOSIZIONE 32.

Ogni numero o è primo o ha per divisore un numero primo.

Sia A un numero; dico che A o è primo o ha per divisore un numero primo.

Se supponiamo dunque che A sia primo, si sarebbe già conseguito quanto proposto. Ma se è composto, lo dividerà un altro numero che sia primo (VII, 31).

Dunque, ogni numero... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

A

APPLICA: VII, 31.

PROPOSIZIONE 33.

Dati quanti si voglia numeri, trovare i numeri più piccoli fra tutti quelli che abbiano il loro stesso rapporto (= abbiano tra loro a due a due lo stesso rapporto che hanno tra loro i numeri dati) [16].

Siano A, B, C i quanti si voglia numeri dati; si devono dunque trovare i numeri più piccoli fra tutti quelli che

[16] S'è già veduto nelle proposizioni VII 20, 21, 22 che i più piccoli numeri, fra tutte le coppie di numeri aventi fra loro lo stesso rapporto, sono primi tra loro e sono equisottomultipli dei numeri di ciascuna altra coppia. Ora si amplia e si estende il risultato, considerando non più coppie, ma n.uple di numeri. E si propone il problema, dati quanti si voglia numeri, di trovare i numeri più piccoli che a due a due abbiano lo stesso rapporto delle coppie corrispondenti di numeri dati.

Siano, ad esempio, dati i numeri a, b, c. Se essi sono primi tra loro tutt'e tre essi sono già i numeri cercati: infatti per i teoremi sopra citati

abbiano tra loro a due a due lo stesso rapporto che hanno tra loro *A*, *B*, *C*.

sono i più piccoli tra i numeri che a due a due hanno lo stesso rapporto. Non siano, dunque, primi tra loro e sia d il loro massimo comune divisore.

Avremo:

$$a = md \qquad b = nd \qquad c = pd$$

da cui le proporzioni:

$$a : b = m : n$$
$$b : c = n : p$$

(infatti a, b sono equimultipli di m, n e così b, c sono equimultipli di n, p), ossia:

$$a : b : c = m : n : p$$

Dunque m, n, p, stanno tra loro a due a due nello stesso rapporto di a, b, c; essi soddisfano cioè ad una delle condizioni del problema. Ma soddisfano anche all'altra condizione, cioè di essere i minimi ad avere tra loro quei rapporti.

Infatti, non sia ciò vero, ossia si abbiano tre altri numeri x, y, z minori rispettivamente di m, n, p, per i quali si abbia:

$$x : y : z = a : b : c$$

e che siano i minimi richiesti.

Per la VII, 20 essendo x, y, z, per la supposizione fatta, i minimi numeri aventi quei dati rapporti, essi sono equisottomultipli (ad esempio secondo il numero r) dei tre numeri a, b, c. Ossia:

$$a = rx \qquad b = ry \qquad c = rz$$

Ma essendo d il M.C.D. di a, b, c, si è posto: $a = md$ sicché: $rx = md$ ossia (VII, 19):

$$m : x = r : d$$

Ma s'è supposto che m sia maggiore di x, dunque r deve essere maggiore di d; ossia un numero r, divisore comune dei tre numeri a, b, c, sarebbe maggiore del massimo comune divisore d dei tre stessi numeri, ciò che è assurdo.

Qui, come già in altri casi precedenti, Heiberg ritiene che (per concludere che se è m maggiore di x, r lo sia di d) si debba far ricorso a taluna proposizione del libro quinto (basterebbe invero la sola definizione quinta di detto libro).

Ma Heath ritiene che ciò non sia necessario ritenendo (a ragione, secondo la nostra opinione) che quella deduzione possa farsi in base alla definizione di proporzione del libro settimo (VII, def. 20). Dovendo infatti primo e terzo termine essere la stessa frazione rispettivamente del secondo e del quarto, non può il primo essere, ad esempio, frazione impropria del secondo, e il terzo non essere frazione impropria del quarto.

Il problema proposto viene dunque risolto dai quozienti dei tre numeri dati per il loro M. C. D.

La VII, 33 viene applicata nella VII, 34 per trovare il minimo multiplo comune a due numeri dati a, b. Euclide dimostra che se a, b sono

Infatti, i numeri A, B, C o sono primi fra loro o non lo sono. Se dunque supponiamo che A, B, C siano primi fra loro, essi sono i numeri più piccoli fra tutti quelli che abbiano tra loro a due a due lo stesso rapporto (VII, 21).

Ma se non sono primi, si prenda il massimo comun divisore di A, B, C, e sia esso D (VII, 3), e per quante volte D divide ciascuno dei numeri A, B, C, altrettante unità siano rispettivamente in ciascuno dei numeri E, F, G. Pure ciascuno dei numeri E, F, G divide quindi[, *permutando*,] ciascuno rispettivamente dei numeri A, B, C secondo le unità che sono in D (VII, 15). Perciò E, F, G sono equisottomultipli di A, B, C, per cui E sta a F e F sta a G come A sta a B e B sta a C (VII, def. XX). Dico ora che E, F, G sono anche i numeri più piccoli fra tutti quelli aventi tra loro a due a due lo stesso rapporto. Infatti, se E, F, G non fossero i numeri più piccoli fra quanti abbiano tra loro a due a due lo stesso rapporto che hanno tra loro A, B, C, vi sarebbero altri numeri, minori di E, F, G, aventi tra loro a due a due lo stesso rapporto di A, B, C. Siano

primi tra loro, il loro minimo comune multiplo è il loro prodotto ab. Se, invece, a, b non sono primi tra loro, siano m, n i più piccoli numeri aventi il loro stesso rapporto, cioè siano m, n, i quozienti di a, b, per il loro massimo comune divisore d:

$$m = a/d \qquad n = b/d$$

ossia:

$$a = md \qquad b = nd$$

Segue:

$$an = mnd \qquad bm = mnd$$

da cui:

$$an = bm$$

Ciascuno di questi due prodotti uguali, si dimostra, è il più piccolo multiplo tanto di a quanto di b, ossia è il loro minimo comune multiplo. Quest'ultimo si trova dunque così:

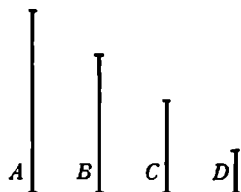
$$an = a \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{d}$$

ovvero così:

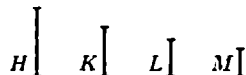
$$bm = b \cdot \frac{a}{d} = \frac{ab}{d}$$

cioè il m. c. m. di due numeri si trova dividendo il loro prodotto per il loro M. C. D.

essi *H*, *K*, *L*; perciò *H* è contenuto in *A* altrettante volte quante ciascuno dei due numeri *K*, *L* è rispettivamente contenuto in ciascuno dei due numeri *B*, *C* (= perciò tali numeri sono equisottomultipli di *A*, *B*, *C*) (VII, 20). Ma per quante volte *H* è contenuto in *A*, altrettante unità siano in un numero *M*; anche ciascuno dei due numeri *K*, *L* è quindi contenuto rispettivamente in ciascuno dei due numeri *B*, *C* altrettante volte quante sono le unità contenute in *M*. Ora, poiché *H* divide *A* secondo le unità che sono in *M*, anche *M*[, ***permutando***,] divide *A* secondo le unità che sono in *H* (VII, 15). Per la stessa ragione, *M* divide pure ciascuno dei due numeri *B*, *C* secondo le unità che sono rispettivamente in ciascuno dei due numeri *K*, *L*, per cui *M* divide *A*, *B*, *C*. Ma poiché *H* divide *A* secondo le unità che sono in *M*, si ha che *H* moltiplicando *M* dà come prodotto *A* (VII, def. XV). Per la stessa ragione, anche *E* moltiplicando *D* risulta dare come prodotto *A*. Quindi il prodotto di *E* per *D* è uguale al prodotto di *H* per *M*. Si ha perciò che *E* sta a *H* come *M* sta a *D* (VII, 19). Ma *E* è maggiore di *H*, per cui pure *M* è maggiore di *D*. Ma *M* divide *A*, *B*, *C* – il che è impossibile: infatti è *D*, per ipotesi, il massimo comun divisore di *A*, *B*, *C*. Non possono quindi esservi altri numeri, minori di *E*, *F*, *G*, che stiano fra loro a due a due nello stesso rapporto in cui stanno fra loro *A*, *B*, *C*. Dunque *E*, *F*, *G* sono i numeri più piccoli fra quanti abbiano tra loro a due a due lo stesso rapporto di *A*, *B*, *C*. – C.D.D.

E *F* *G*

APPLICA: VII, 3, 15, 19, 20, 21.

È APPLICATA IN: VII, 34; VIII, 3, 6, 8, 20.

H *K* *L* *M*

PROPOSIZIONE 34.

Dati due numeri, trovare il numero più piccolo che essi dividano (cioè: trovare il loro minimo comune multiplo).

Siano A, B i due numeri dati; si deve dunque trovare il numero più piccolo che essi dividano (= il loro minimo comune multiplo).

Infatti, i numeri A, B o sono primi fra loro o non lo sono. Dapprima, siano A, B primi fra loro, ed A moltiplicando B dia il prodotto C. Dico dunque che esso è anche il loro minimo comune multiplo. Se difatti non lo fosse, A, B dividerebbero un altro numero minore di C. Dividano essi D. Per quante volte allora A è contenuto in D, altrettante unità siano in E, ed altrettante unità siano in F per quante volte B è contenuto in D; quindi A moltiplicando E dà come prodotto D, e B moltiplicando F dà come prodotto D (VII, def. XV), per cui il prodotto di A per E è uguale al prodotto di B per F. Quindi A sta a B come F sta ad E (VII, 19). Ma A, B sono primi [fra loro], e i numeri primi tra loro sono anche i più piccoli fra tutti quelli aventi tra loro a due a due lo stesso rapporto, ed i numeri più piccoli possibili sono equisottomultipli fra quanti abbiano tra loro a due a due lo stesso rapporto, rispettivamente il numero maggiore del numero maggiore e quello minore del minore (VII, 21 e 20); quindi B divide E, come conseguente divide conseguente. E poiché A, moltiplicando B, E, ha prodotto C, D, si ha che B sta ad E come C sta a D (VII, 17). Ma B divide E, per cui anche C divide D, cioè un numero maggiore dividerebbe un numero minore: il che è impossibile. Non può quindi darsi che A, B dividano un numero che sia minore di C. Dunque C è il numero più piccolo che è diviso da A, B[, cioè è il loro minimo comune multiplo].

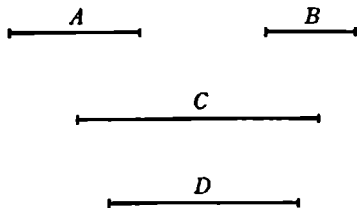
Ma sia adesso il caso in cui A, B non siano primi fra loro, e si prendano F, E quali numeri più piccoli possibili fra tutti quelli aventi fra loro a due a due lo stesso rapporto che tra loro hanno A, B (VII, 33), per cui il prodotto di A per E è uguale al prodotto di B per F (VII, 19). Ora A moltiplicando E dà il prodotto C; anche B quindi,

moltiplicando *F*, dà come prodotto *C*; perciò *A*, *B* dividono *C*. Dico dunque che *C* è anche il loro minimo comune multiplo. Infatti, se non lo fosse, *A*, *B* dividerebbero un altro numero minore di *C*. Dividano essi *D*. Per quante volte allora *A* divide *D*, altrettante unità siano in *G*, ed altrettante unità siano in *H* per quante volte *B* divide *D*. Quindi *A* moltiplicando *G* dà come prodotto *D*, e *B* moltiplicando *H* dà come prodotto *D* (VII, def. XV). Il prodotto di *A* per *G* è così uguale al prodotto di *B* per *H*, sicché *A* sta a *B* come *H* sta a *G* (VII, 19). Ma *A* sta a *B* come *F* sta ad *E*; perciò anche, *F* sta ad *E* come *H* sta a *G*. Ma *F*, *E* sono i numeri più piccoli fra tutti quelli aventi tra loro a due a due lo stesso rapporto, ed i numeri più piccoli possibili sono equisottomultipli di quanti abbiano fra loro a due a due lo stesso rapporto, rispettivamente il numero maggiore del numero maggiore e quello minore del minore (VII, 20); quindi *E* divide *G*. Ora, poiché *A*, moltiplicando *E*, *G*, dà come prodotti *C*, *D*, si ha che *E* sta a *G* come *C* sta a *D* (VII, 17). Ma *E* divide *G*; anche *C* divide perciò *D* (VII, def. XX), cioè un numero maggiore dividerebbe un numero minore: il che è impossibile. Perciò *A*, *B* non potranno dividere un numero che sia minore di *C*. Dunque *C* è diviso da *A*, *B* quale il numero più piccolo possibile [che sia da loro diviso, cioè è il loro minimo comune multiplo]. – C.D.D.

A B

C

D

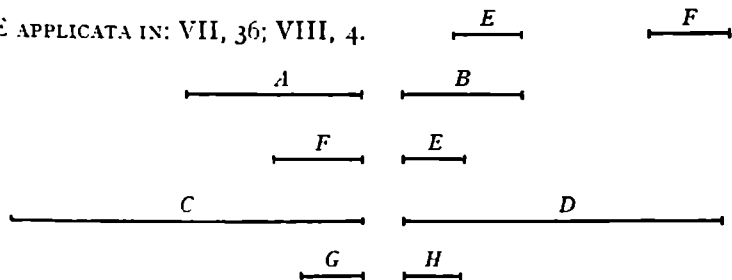
E F

APPLICA: VII, 16, 17, 19, 20, 21, 33.

È APPLICATA IN: VII, 36; VIII, 4.

A B

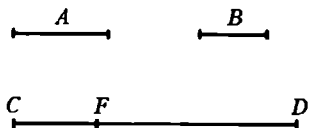
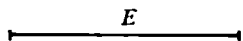
F E

C D

G H

PROPOSIZIONE 35.

Se due numeri dividono un altro numero, anche il loro minimo comune multiplo dividerà quello stesso numero.

Infatti, i due numeri A, B dividano un altro numero CD, e sia E il loro minimo comune multiplo; dico che anche E divide CD.

Se difatti E non dividesse CD, lasci [per resto], dividendo il numero FD, un numero CF minore di E. Ora, poiché A, B dividono E, ma E divide FD, anche A, B divideranno FD. Ma essi dividono pure tutto quanto CD; divideranno perciò anche la differenza $CD - FD = CF$, che è minore di E: il che è impossibile. Quindi non può darsi che E non divida CD, e dunque lo divide. - C.D.D.

È APPLICATA IN: VII, 36; VIII, 4.

PROPOSIZIONE 36.

Dati tre numeri, trovare il loro minimo comune multiplo.

Siano A, B, C i tre numeri dati; si deve dunque trovare il loro minimo comune multiplo.

Infatti, si prenda il minimo comune multiplo dei due numeri A, B, e sia esso D (VII, 34). Allora C o divide D o non lo divide. Dapprima, lo divida. Ma anche A, B dividono D, per cui A, B, C dividono D. Dico dunque che esso è pure il loro minimo comune multiplo. Se difatti non lo fosse, A, B, C dividerebbero un altro numero minore di D. Dividano essi E. Poiché A, B, C dividono E, pure A, B dividono E. Anche il minimo comune multiplo di A, B dividerà quindi E (VII, 35). Ma D è il minimo comune multiplo di A, B; perciò D dividerà E, cioè un numero maggiore dividerebbe un numero minore: il che è impossibile. Non potranno quindi A, B, C dividere un altro numero che

sia minore di D, e dunque A, B, C hanno D quale loro minimo comune multiplo.

Di nuovo, sia adesso il caso in cui C non divida D; si prenda il minimo comune multiplo di C, D, e sia esso E (VII, 34). Poiché A, B dividono D, ma D divide E, anche A, B dividono E. Ma pure C divide E, per cui anche A, B, C dividono E. Dico dunque che esso è pure il minimo comune multiplo di A, B, C. Infatti, se non lo fosse, A, B, C dividerebbero un altro numero minore di E. Dividano essi F. Poiché A, B, C dividono F, pure A, B dividono F, per cui anche il minimo comune multiplo di A, B dividerà F (VII, 35). Ma D è il minimo comune multiplo di A, B; il numero D divide perciò F. Ed anche C divide F; quindi D, C dividono F, cosicché anche il minimo comune multiplo di D, C dividerà F (id.). Ma E è il minimo comune multiplo di C, D, per cui E dividerebbe in tal caso F, cioè un numero maggiore dividerebbe un numero minore: il che è impossibile. Non potranno quindi A, B, C dividere un altro numero che sia minore di E; dunque E è il minimo comune multiplo di A, B, C. - C.D.D.

A B C

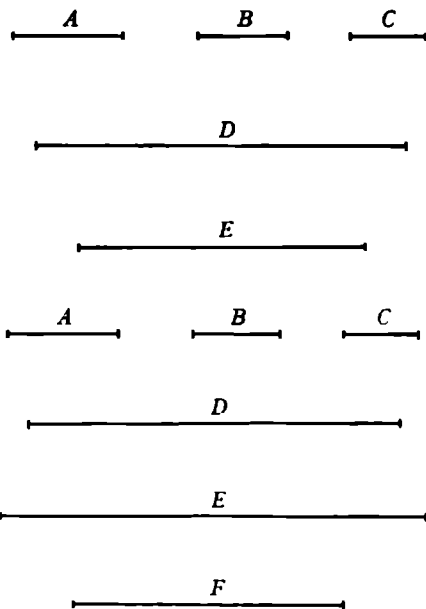
D

E

A B C

D

E

F

APPLICA: VII, 34, 35.

È APPLICATA IN: VII, 39.

PROPOSIZIONE 37.

Se un numero [A] *è misurato* [*esattamente*] *da un numero* [B], *esso avrà una parte* [*intera*] *con denominatore*[a] *il numero stesso che misura*[, *cioè* B].

Infatti, il numero A contenga esattamente [un certo numero di volte] il numero B; dico che A ha una parte [che è un numero intero e] che ha B per denominatore.

Il numero A contenga difatti C volte il numero B. Ma il numero C contiene C volte l'unità U. Quindi, permutando (VII, 15), l'unità U è contenuta in B altrettante volte quante C è contenuto in A. Ma l'unità U è contenuta B volte nel numero B, quindi anche C è contenuto B volte in A, ossia C è la B.esima parte di A. Dunque A ha una parte C [numero intero] che ha B per denominatore, ossia: $C = \frac{1}{B} A$.

A

B

C

APPLICA: VII, 15.

È APPLICATA IN: VII, 39.

PROPOSIZIONE 38.

Se un numero ha una parte (= *un sottomultiplo*) *qualsiasi, esso sarà* [*esattamente*] *misurato dal numero omonimo alla parte*[17].

a. Letteralmente: avrà parte omonima al numero misurante. Diamo di questa proposizione una traduzione solo sostanzialmente fedele, per cercar di raggiungere maggiore chiarezza.

[17] Nella prop. precedente (la 37ª) si suppone che un numero a sia (esattamente) divisibile per un numero b. Sia c il quoziente, cioè sia:

$$a = bc$$

La proposizione afferma che a possiede un numero intero c come *parte* avente per denominatore b, ossia che è:

$$c = \frac{1}{b} a .$$

In questa prop. 38ª si parte dall'ipotesi dell'esistenza di una tal parte

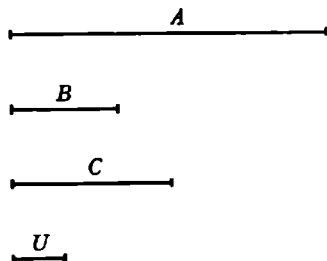
Infatti, il numero A abbia una parte B qualsiasi, e sia $A : B = C$; dico che C misura[, ossia divide esattamente,] A.

Poiché difatti A ha una parte B la quale è contenuta C volte in A, ma pure l'unità U è una parte di C contenuta C volte in C, l'unità U è di conseguenza la stessa parte del numero C che anche B è di A; perciò l'unità U divide il numero C lo stesso numero di volte che B divide A. Quindi, *permutando*, l'unità U divide il numero B lo stesso numero di volte che C divide A (VII, 15). Dunque C misura A. - C.D.D.

A

B

C

U

APPLICA: VII, 15.

È APPLICATA IN: VII, 39.

PROPOSIZIONE 39.

Trovare un numero che sia il più piccolo ad avere certe parti date[18].

Siano A, B, C le parti date; si deve dunque trovare un numero che sia il più piccolo ad avere le parti A, B, C.

di a, e si afferma che a è divisibile per b (denominatore della parte), ossia che è:

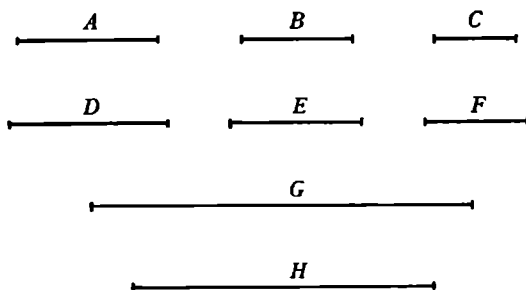
$$a = bc$$

I due teoremi son dunque l'uno inverso dell'altro.

[18] Questa proposizione non è del tutto chiara. Una possibile interpretazione è la seguente. Con A, B, C s'intende indicare ciascuna *parte* di un certo numero X, ma non già nel senso che si tratti di numeri dati: si vuol intendere soltanto che sono numeri interi le parti $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{p}$ di un certo numero X.

Inoltre non si vuol trovare un qualunque numero X tale che $\frac{1}{m}X$, $\frac{1}{n}X$, $\frac{1}{p}X$ siano numeri interi; si cerca invece il più piccolo possibile soddisfacente a dette condizioni.

Si considerano allora i denominatori dati m, n, p delle tre parti (Euclide li indica coi simboli D, E, F).

Infatti, siano i numeri *D*, *E*, *F* indicati con gli stessi nomi delle parti *A*, *B*, *C*, e si prenda il numero *G*, che sia il più piccolo ad essere diviso da *D*, *E*, *F* (VII, 36). Quindi *G* ha parti indicate con gli stessi nomi di *D*, *E*, *F*. Ma *A*, *B*, *C* sono parti [appunto] indicate con gli stessi nomi di *D*, *E*, *F* (VII, 37), per cui *G* ha le parti *A*, *B*, *C*. Dico dunque che esso è anche il numero più piccolo possibile [ad avere tali parti]. Se difatti non lo fosse, vi sarebbe un altro numero minore di *G*, il quale avrebbe le parti *A*, *B*, *C*. Sia esso *H*. Poiché *H* ha le parti *A*, *B*, *C*, si ha che *H* sarà diviso da numeri indicati con gli stessi nomi delle parti *A*, *B*, *C* (VII, 38). Ma *D*, *E*, *F* sono numeri indicati con gli stessi nomi delle parti *A*, *B*, *C*; perciò *H* sarebbe diviso da *D*, *E*, *F*. Ed esso è[, insieme,] minore di *G*: il che è impossibile. Dunque non potrà darsi un altro numero, minore di *G*, che abbia le parti *A*, *B*, *C*. – C.D.D.

Si trova il minimo comune multiplo di m, n, p: sia esso *G*. Dico che *G* è il numero che risolve il problema.

Infatti *G*, essendo divisibile per m, n, p, ha (intera) la parte m.esima, la parte n.esima, la parte p.esima (VII, 37).

Di più, esso è il minimo numero soddisfacente a tali condizioni.

Infatti, non sia *G* il minimo, ma lo sia $H < G$. Poiché *H* ha quelle parti (cioè poiché sono intere la sua parte m.esima, la sua parte n.esima la sua parte p.esima), esso risulta divisibile per m, n, p (VII, 38).

Ma ciò è impossibile, perché *H* è minore di *G*, e il numero *G* è il minimo comune multiplo di m, n, p, ossia è il minimo numero divisibile per m, n, p.

LIBRO OTTAVO

PROPOSIZIONI

PROPOSIZIONE I.

Se si dànno quanti si voglia numeri [A, B, C, D...] *in proporzione continuata,* [*vale a dire se è:* A : B = B : C = = C : D...,] *ed i loro estremi sono primi fra loro,* A, B, C, D... *sono i numeri più piccoli fra quanti abbiano tra loro a due a due lo stesso rapporto* A : B[1].

Siano *A*, *B*, *C*, *D* quanti si voglia numeri in proporzione continuata, ed i loro estremi *A*, *D* siano primi fra loro; dico

[1] Qui per la prima volta si presenta quella particolare catena di rapporti uguali, che indichiamo col nome di « proporzione continuata ». La particolarità consiste nel fatto che il conseguente di ciascun rapporto è uguale all'antecedente del rapporto che immediatamente segue. È cioè una *proporzione continuata* la catena di rapporti uguali:

$$a : b = b : c = c : d = d : e = \dots$$

Nel caso particolare che i rapporti siano soltanto due, si ricade nella *proporzione continua*:

$$a : b = b : c$$

Anzi possiamo dire che una proporzione continuata è un insieme di proporzioni continue, nelle quali i rapporti sono tutti uguali.

Nel nostro linguaggio, diremo che *proporzione continuata* non è altro che una *progressione geometrica*, come qui di seguito viene spiegato.

Abbiamo due specie di progressioni: quelle aritmetiche (o progressioni *per differenza*) e quelle geometriche (o progressioni *per quoziente*).

Nelle progressioni aritmetiche ciascun termine si ottiene dal precedente aggiungendo un numero costante, che si chiama *ragione* della progressione.

Così la serie numerica: 1, 2, 3, 4, 5.....
quella dei numeri pari: 2, 4, 6, 8, 10.....
quella dei numeri dispari: 1, 3, 5, 7, 9.....

che i numeri A, B, C, D sono i più piccoli fra tutti quelli che[, pure in proporzione continuata,] abbiano tra loro a due a due lo stesso rapporto $A : B$.

Infatti, se non lo fossero, [cioè se non fossero i minimi,] siano i numeri E, F, G, H minori di A, B, C, D che stiano

sono progressioni aritmetiche: la prima ha la ragione 1, mentre la seconda e la terza hanno la ragione 2.

Ma Euclide non si occupa delle progressioni aritmetiche, bensì soltanto di quelle geometriche.

In una progressione geometrica ciascun termine si ottiene del precedente *moltiplicandolo* per un numero costante, che si dice *ragione* della progressione. Per esempio, è una progressione geometrica quella:

$$1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 \cdot \ldots$$

nella quale la ragione è 2.

Altro esempio di progressione geometrica:

$$2 \cdot 6 \cdot 18 \cdot 54 \ldots$$

nella quale la ragione è 3.

Tra un termine e il seguente, in una progressione geometrica, è costante il rapporto, cioè il quoziente.

Anzi se consideriamo, in senso inverso, il rapporto fra un termine e quello immediatamente precedente, questo rapporto costante è proprio uguale alla ragione.

Per esempio, nella progressione sopra veduta:

$$2 \cdot 6 \cdot 18 \cdot 54 \ldots$$

di ragione 3, è uguale a 3 il rapporto tra ciascun termine e il precedente:

$$6 : 2 = 3 \qquad 18 : 3 = 6 \qquad 54 : 3 = 18 \ldots$$

In linea generale, una progressione geometrica di ragione q, avente a per primo termine, è:

$$a \cdot aq \cdot aq^2 \cdot aq^3 \ldots$$

Ebbene: coi termini di questa progressione geometrica possiamo formare la *proporzione continuata*:

$$a : aq = aq : aq^2 = aq^2 : aq^3 = \ldots$$

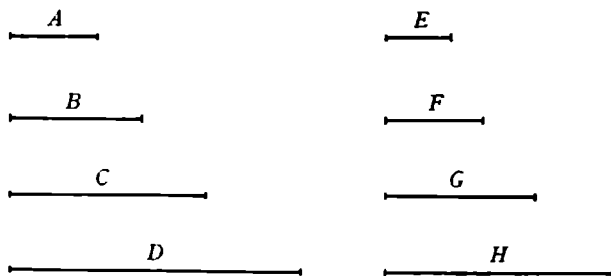
Euclide si serve delle progressioni geometriche, ossia delle cosiddette *proporzioni continuate*, lungo tutto l'arco del libro ottavo e del libro nono.

Questa prop. VIII, 1 dice che se più numeri sono in proporzione continuata e gli estremi sono primi tra loro, i numeri dati sono i minimi (interi, naturalmente, come sempre in Euclide) ad avere a due a due quel dato rapporto.

Nella dimostrazione vengono applicate le due proposizioni 20, 21 del libro settimo, che si riferiscono a coppie di numeri (se due numeri sono primi tra loro essi sono i minimi fra tutti quelli aventi fra loro lo stesso rapporto, e questi altri sono rispettivamente equimultipli di quelli primi tra loro). Anzi si può dire che la VIII, 1 rappresenti in certo senso una estensione della VII, 21.

in proporzione continuata, avendo fra loro a due a due lo stesso rapporto $A : B$[; si abbia cioè: $E : F = F : G = G : H$, essendo $E : F = A : B$, ecc. Possiamo dunque dire che si ha:

$$A : B = E : F$$
$$B : C = F : G$$
$$C : D = G : H].$$

E poiché A, B, C, D stanno fra loro a due a due nello stesso rapporto di E, F, G, H, ed A, B, C, D sono tanti quanti sono E, F, G, H, si ha che, *ex aequo*, $A : D = E : H$ (VII, 14). Ma A, D sono primi fra loro, e i numeri primi fra loro sono anche i più piccoli fra tutti quelli aventi tra loro lo stesso rapporto (VII, 21), ed i numeri più piccoli possibili sono equisottomultipli di quanti abbiano tra loro a due a due lo stesso rapporto, rispettivamente il numero maggiore del maggiore e quello minore del minore (VII, 20), vale a dire l'antecedente [A] divide l'antecedente [E] ed il conseguente [D] divide il conseguente [H]. Quindi A dividerebbe in tal caso E, cioè un numero maggiore dividerebbe un numero [che si è supposto] minore: il che è impossibile. Perciò E, F, G, H, che sono minori di A, B, C, D, non stanno fra loro a due a due nello stesso rapporto di A, B, C, D. Dunque A, B, C, D sono i numeri più piccoli fra quanti abbiano tra loro a due a due lo stesso rapporto che hanno tra loro A, B, C, D. - C.D.D.

APPLICA: VII, 14, 20, 21.

È APPLICATA IN: VIII, 2, 9.

PROPOSIZIONE 2.

Trovare numeri (per quanti se ne voglia proporre) in proporzione continuata, che siano i più piccoli possibile a stare fra loro in un rapporto dato [2].

Sia il rapporto dato, [espresso] nei numeri più piccoli possibili, quello di A con B; si devono dunque trovare numeri in proporzione continuata che siano, per quanti se ne voglia proporre, i più piccoli possibile a stare fra loro a due a due nel rapporto di A con B.

Si fissi per ora di trovarne quattro, ed A moltiplicando sé stesso dia il prodotto A^2 e moltiplicando B dia il prodotto AB; inoltre B, moltiplicando sé stesso, dia il prodotto

[2] Questa proposizione, insieme al corollario che ne deriva, trova importanti applicazioni nel séguito della trattazione.

Si tratta di un problema: è dato un rapporto $a : b$ e si vuole costruire una proporzione continuata nella quale il rapporto costante sia proprio quello dato $a : b$. Viene inoltre fissato il numero dei termini della proporzione, e si vuole infine che i termini stessi siano i numeri minimi che a due a due stanno nello stesso rapporto.

Ad esempio, si voglia costruire una proporzione continuata di tre termini.

Si osserva che:

$$a^2 : ab = a : b$$

e che:

$$a : b = ab : b^2 \quad \text{(VII, 17-18)}$$

Se ne deduce:

$$a^2 : ab = ab : b^2$$

Questa è appunto una proporzione continuata (continua, nel presente caso) di tre termini, con rapporto costante $a : b$. E si tratta dei numeri minimi, perché, presi a, b primi tra loro, tali sono anche i loro quadrati a^2, b^2 (VII, 27): ci troviamo quindi nel caso considerato nella precedente proposizione VIII, 1. Se i termini della proporzione continuata dovessero esser quattro il problema sarebbe risolto da:

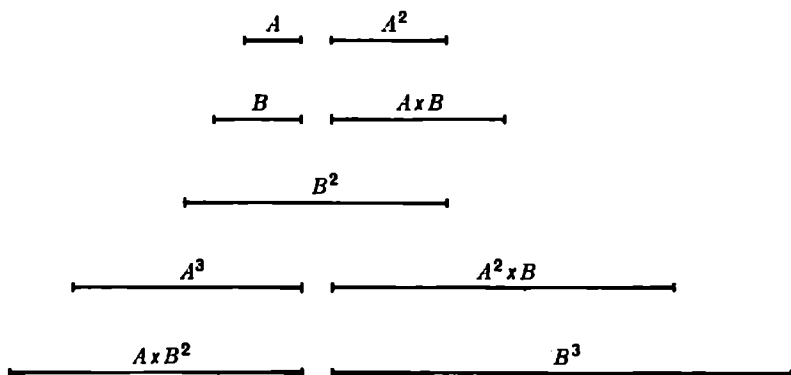
$$a^3 : a^2 b = a^2 b : ab^2 = ab^2 : b^3$$

come facilmente Euclide dimostra. E così di séguito. Siccome questi numeri sono i *minimi*, la soluzione del problema *è soltanto questa*. Quindi Euclide afferma nel corollario che: se tre numeri in proporzione continuata sono i minimi ad avere a due a due lo stesso rapporto, gli estremi sono numeri quadrati (come a^2, b^2), e che similmente, se i termini sono quattro, gli estremi sono numeri cubi (come a^3, b^3).

B^2, ed infine A, moltiplicando A^2, AB, B^2, dia i prodotti A^3, A^2B, AB^2, mentre B moltiplicando B^2 dia il prodotto B^3.

Ora, poiché A moltiplicando sé stesso ha prodotto A^2, e moltiplicando B ha prodotto AB, si ha che $A : B = A^2 : AB$ (VII, 17). Di nuovo, poiché A moltiplicando B ha prodotto AB, e B moltiplicando sé stesso ha prodotto B^2, si ha che A, B, ciascuno moltiplicando B, dànno come prodotti[a] rispettivamente AB, B^2. Perciò $A : B = AB : B^2$ (VII, 18). Ma[, come si è veduto,] $A : B = A^2 : AB$; quindi anche, $A^2 : AB = AB : B^2$. Ora, poiché A, moltiplicando A^2, AB, ha prodotto A^3, A^2B, si ha: $A^2 : AB = A^3 : A^2B$ (VII, 17). Ma[, come si è veduto,] $A^2 : AB = A : B$; quindi anche, $A : B = A^3 : A^2B$. Di nuovo, poiché A, moltiplicando AB, B^2, ha prodotto A^2B, AB^2, si ha che $AB : B^2 = A^2B : AB^2$ (VII, 17). Ma $AB : B^2 = A : B$. Perciò anche, $A : B = A^2B : AB^2$. Inoltre, poiché A, B, moltiplicando B^2, dànno come prodotti AB^2, B^3, si ha che $A : B = AB^2 : B^3$ (VII, 18). Ma [si era sopra veduto che] $A : B = A^3 : A^2B$, e [che:] $A : B =$ $= A^2B : AB^2$. Quindi $A^3 : A^2B = A^2B : AB^2 = AB^2 : B^3$; dunque i numeri A^2, AB, B^2 ed i numeri A^3, A^2B, AB^2, B^3 sono in proporzione [continuata e stanno a due a due] nel rapporto di A con B. Dico ora che sono anche i più piccoli possibile [ad avere tale rapporto]. Infatti, poiché A, B sono [per ipotesi] i numeri più piccoli fra quanti abbiano tra loro lo stesso rapporto di A con B, ed i numeri più piccoli fra tutti quelli aventi tra loro lo stesso rapporto, sono primi fra loro (VII, 22), si ha che A, B sono primi fra loro. Ora A, B, ciascuno moltiplicando sé stesso, dànno come prodotti rispettivamente A^2, B^2, e moltiplicando rispettivamente A^2, B^2 dànno rispettivamente come prodotti A^3, B^3, per cui A^2, B^2 ed A^3, B^3 sono [pure] primi fra loro (VII, 27). Ma se si dànno quanti si voglia numeri in proporzione continuata, ed i loro estremi sono primi fra loro, essi sono i numeri più piccoli fra quanti abbiano tra loro lo stesso

a. D'ora in avanti, forniremo sempre con le espressioni « dà come prodotto », o « dànno rispettivamente come prodotti » gli equivalenti del « risulta produrre » o del « risultano produrre » greci.

rapporto (VIII, 1). Dunque A^2, AB, B^2 ed A^3, A^2B, AB^2, B^3 sono i numeri più piccoli fra quanti[, essendo in proporzione continuata,] abbiano tra loro a due a due lo stesso rapporto di A con B. – C.D.D.

APPLICA: VII, 17-18, 22, 27; VIII, 1.

È APPLICATA, INSIEME AL COROLLARIO, IN: VIII, 3, 9, 21, 26, 27.

COROLLARIO

È da ciò evidente che, se tre numeri fra loro in proporzione continuata sono i più piccoli fra quanti abbiano tra loro lo stesso rapporto, i loro estremi sono numeri quadrati, e che, se sono quattro [i numeri nella suddetta proporzione], i loro estremi sono numeri cubi.

È APPLICATO IN: IX, 15.

PROPOSIZIONE 3.

Se quanti si voglia numeri sono in proporzione continuata, e sono i più piccoli tra quanti, pure in proporzione continuata, abbiano tra loro a due a due lo stesso rapporto comune, i numeri estremi sono primi tra loro [3].

[3] Questa proposizione è l'inversa della VIII, 1. Abbiamo qui uno dei rarissimi casi (un altro se ne ha, ad esempio, per la seguente VIII, 4)

Siano dati quanti si voglia numeri A, B, C, D in proporzione continuata: $A : B = B : C = C : D$ e tali che siano i minimi tra quanti, pure in proporzione continuata, stiano tra loro a due a due nello stesso rapporto comune $A : B$. Dico che i numeri estremi A, D sono primi tra loro.

Si prendano due numeri E, F tali che essendo: $A : B = E : F$ essi E, F siano i minimi ad aver tra loro lo stesso rapporto $A : B$ (VII, 33). Dunque E, F sono primi tra loro (VII, 22).

Sappiamo allora (VIII, 2 corollario) che i più piccoli numeri che siano in proporzione continuata, che siano tanti quanti A, B, C, D e che abbiano tra loro a due a due lo stesso rapporto di E a F (o, ciò che fa lo stesso, di A a B) sono i numeri E^3, E^2F, EF^2, F^3 che dan luogo alla proporzione continuata:

$$E^3 : E^2F = E^2F : EF^2 = EF^2 : F^3$$

E siccome E, F sono primi tra loro, tali sono anche i loro cubi E^3, F^3 (VII, 27).

Ma per ipotesi anche A, B, C, D sono i minimi numeri in proporzione continuata:

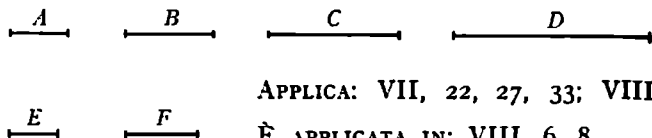
$$A : B = B : C = C : D$$

aventi tra loro a due a due il valore comune del rapporto $A : B$. Dunque le due proporzioni continuate hanno a due a due uguali i loro termini, in particolare gli estremi: $A = E^3$, $D = F^3$.

Ma, come s'è veduto, E^3 ed F^3 sono primi tra loro, dunque tali sono anche A e D. - C.D.D.

nei quali abbiamo abbreviato un testo sovrabbondante, dandone un riassunto che, per quanto libero dal punto di vista formale, è tuttavia essenzialmente fedele. Abbiamo creduto di far ciò, soltanto in tali pochissimi casi che potremmo chiamare in verità casi-limite, per permettere al lettore di prender contatto col testo euclideo in modo non eccessivamente faticoso.

A B C D

E F

APPLICA: VII, 22, 27, 33; VIII, 2.
È APPLICATA IN: VIII, 6, 8.

PROPOSIZIONE 4.

Dati quanti si voglia rapporti che siano espressi nei numeri più piccoli possibile, trovare altri numeri che siano i più piccoli a stare a due a due nei rapporti dati, e tali che il conseguente del primo rapporto sia l'antecedente del secondo, il conseguente del secondo sia l'antecedente del terzo, e così di séguito[4].

I rapporti dati, espressi nei numeri più piccoli possibile, siano quelli $A : B$, $C : D$, $E : F$. Si devono dunque trovare

[4] Anche in questo caso, come s'è detto nella nota alla precedente VIII, 3, sostituiamo il testo, prolisso e intricatissimo, con una sorta di riassunto esplicativo.

In questa proposizione VIII, 4 (che è un problema) si tratta di rapporti che non sono uguali tra loro: sono però irriducibili (cioè i termini di ciascun rapporto sono primi tra loro).

Il problema consiste nell'esprimere gli stessi rapporti con altri numeri, in modo che il conseguente di ciascun rapporto sia uguale all'antecedente del rapporto che segue immediatamente.

Si tratta cioè, dati ad esempio i rapporti:

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$$

di trasformarli in:

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y} \qquad \frac{c}{d} = \frac{y}{z} \qquad \frac{e}{f} = \frac{z}{t}$$

Va aggiunto che il problema richiede che x, y, z, t siano i minimi numeri per i quali si verificano le uguaglianze scritte.

Questa proposizione VIII, 4 si ricollega alla VI, 23 per quel che riguarda i rapporti composti (cfr. nota alla VI, 23). Il rapporto composto $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ viene infatti, in base a questa VIII, 4, espresso sotto la forma:

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} = \frac{x}{z} .$$

Di più, questa VIII, 4 estende il concetto di rapporto composto anche al rapporto che *si compone* di più di due rapporti semplici.

altri numeri X, Y, Z, T che siano i più piccoli per i quali valgano le proporzioni:

$$X : Y = A : B \ ; \ Y : Z = C : D \ ; \ Z : T = E : F$$

Cominciamo a risolvere il problema ricercando tre soli numeri minimi X, Y, Z per i quali debba aversi:

$$X : Y = A : B$$
$$Y : Z = C : D$$

Poiché i rapporti $A : B$, $C : D$ sono, per ipotesi, espressi coi numeri minimi, A e B sono primi tra loro, e così pure C e D (VII, 22). Quindi X, Y risultano equimultipli rispettivamente di A, B, mentre Y, Z risultano equimultipli rispettivamente di C, D. Poniamo che sia:

$$X = mA \qquad Y = mB$$
$$Y = nC \qquad Z = nD$$

Ma deve aversi $mB = nC$ essendo Y uguale ad ambedue i prodotti. Occorre dunque trovare un multiplo comune a B e a C. Volendo prendere i numeri più piccoli che sia possibile, prenderemo come multiplo comune il minimo comune multiplo di B, C. Sia esso H.

Dunque H conterrà un certo numero m di volte B e un certo numero n di volte C. Saranno proprio questi m, n i valori che cercavamo. Ossia i valori di X, Y, Z son quelli che sopra si sono posti, sotto le condizioni che m indichi quante volte il m.c.m. di B, C contiene B, e che n indichi quante volte il m.c.m. di B, C contiene C.

Vogliamo ora estendere il risultato ad un altro rapporto $E : F$ e passare quindi alla ricerca di un quarto numero (minimo) T per il quale si abbia: $Z : T = E : F$.

Prima, dovendo avere:

$$X : Y = A : B$$
$$Y : Z = C : D$$

abbiamo trovato il minimo comune multiplo H di B, C, ossia del secondo e del terzo numero dato. Supposto che

sia: $H = mB$, $H = nC$, abbiamo posto $X = mA$; $Y = mB = nC$; $Z = nD$ ottenendo:

$$mA : mB = A : B$$
$$nC : nD = C : D$$

Questa volta i rapporti che dobbiamo considerare sono quello $nC : nD$ e quello aggiunto $E : F$.

Troveremo anche questa volta il minimo comune multiplo del secondo e del terzo numero, cioè di nD e di E: sia esso K. E si abbia: $K = pnD = qE$.

Trasformeremo allora la seconda proporzione ($nC : nD = C : D$) nell'altra:

$$pnC : pnD = C : D$$

e scriveremo la terza proporzione:

$$qE : qF = E : F$$

ossia:

$$pnD : qF = E : F$$

Abbiamo così le due proporzioni:

$$pnC : pnD = C : D$$
$$pnD : qF = E : F$$

che soddisfano alle condizioni del problema: cioè abbiamo trovato tre numeri pnC, pnD, qF che sono i minimi i quali, avendo tra loro a due a due rapporti uguali rispettivamente a $C : D$ ed $E : F$, hanno il conseguente del primo rapporto (pnD) uguale all'antecedente del secondo.

Ma dobbiamo ora, per completare la soluzione, tornare alla prima proporzione:

$$mA : mB = A : B$$

Per far sì che il conseguente (mB) del primo rapporto sia uguale all'antecedente (pnC) del secondo, dobbiamo moltiplicare per p i due termini del primo rapporto. Quest'ultimo diventa allora:

$$pmA : pmB$$

Ma, come s'è rilevato in occasione della ricerca del m.c.m. di B, C si ha: $mB = nC$.

Dunque il rapporto in questione è uguale a quello $pmA : pnC$.

Ecco dunque risolto completamente il problema.

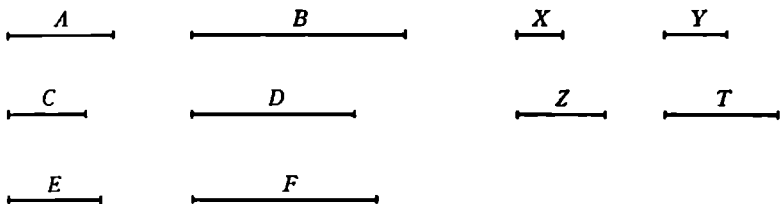
I quattro numeri: pmA, $pmB = pnC$, $pnD = qE$, qF sono i minimi che dànno le proporzioni:

$$pmA : pmB = A : B$$
$$pmB : pnD = C : D$$
$$pnD : qF = E : F$$

dove, ricordiamo, m, n sono gli *ordini di molteplicità* del m.c.m. H di B, C rispetto a B, C (ossia $H = mB = nC$), mentre p, q sono gli *ordini di molteplicità* del m.c.m. K di nD, E rispetto ad nD, E (ossia: $K = pnD = qE$).

A B X Y

C D Z T

E F

APPLICA: VII, 13, 20, 34, 35.

È APPLICATA IN: VIII, 5; X, 12.

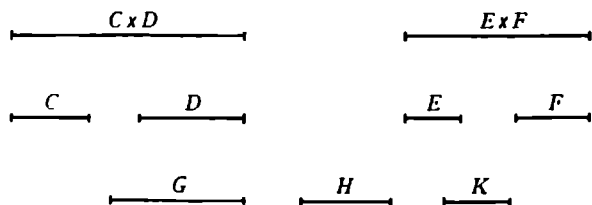
PROPOSIZIONE 5.

Numeri piani hanno fra loro rapporto composto dei rapporti dei lati[a].

Siano $C \times D$, $E \times F$ [due] numeri piani, i numeri C, D siano i lati del numero $C \times D$, ed E, F siano i lati del numero $E \times F$; dico che $C \times D$ ha con $E \times F$ rapporto composto dei rapporti dei lati.

a. Letteralmente l'espressione greca, non troppo esatta, dice: « composto dei loro lati », cioè dei lati dei numeri $C \times D$ ed $E \times F$ in questo caso, invece che « composto *dei rapporti* dei lati »; ed il caso in Euclide si ripete, già sappiamo.

Infatti, dati [alla nostra considerazione] i rapporti che hanno C con E e D con F [$C:E$ e $D:F$], si prendano numeri che siano i più piccoli a stare fra loro a due a due nei rapporti $C:E$, $D:F$, e siano essi G, H, K, in modo che sia: $G:H = C:E$, e $H:K = D:F$[, ossia in modo che il rapporto $G:K$ sia quello composto dei rapporti dei lati $C:E$ e $D:F$] (VIII, 4).

Inoltre D, moltiplicando E, dia il prodotto $D \times E$. Ora, poiché D moltiplicando C dà come prodotto $D \times C$, mentre moltiplicando E ha prodotto $D \times E$, si ha che C sta ad E come $D \times C$ sta a $D \times E$ (VII, 18)]. Ma $G:H = C:E$; quindi anche, $G:H = D \times C : D \times E$. Di nuovo, poiché E moltiplicando D ha prodotto $E \times D$, e tuttavia, moltiplicando F, dà pure $E \times F$ come prodotto, si ha: $D:F = E \times D : E \times F$ (VII, 18). Ma $H:K = D:F$; perciò anche, $H:K = E \times D : E \times F$. Ma fu pure dimostrato che $G:H = D \times C : D \times E$, [ed essendo $D \times E = E \times D$, $C \times D = D \times C$ (VII, 16), abbiamo così le proporzioni: $G:H = C \times D : D \times E$; $H:K = D \times E : E \times F$,] da cui, *ex aequo*, si ha la proporzione: $G:K = C \times D : E \times F$. Ma [si era visto che] G ha con K rapporto composto dei rapporti dei lati[, cioè di $C:E$ e $D:F$]. Dunque anche $C \times D$, rispetto ad $E \times F$, ha rapporto composto dei rapporti dei lati[, ossia i due numeri piani $C \times D$ ed $E \times F$ stanno anch'essi nel rapporto composto dei lati]. – C.D.D.

APPLICA: VII, 14, 17-18; VIII, 4.

PROPOSIZIONE 6.

Se si dànno quanti si voglia numeri in proporzione continuata, ed il primo non divide il secondo, nessun numero [fra quelli dati] ne dividerà un qualunque altro [5].

Siano A, B, C, D, E quanti si voglia numeri in proporzione continuata fra loro[, si abbia cioè: $A : B = B : C = C : D = D : E$,] ed A non divida B; dico che nessun numero fra quelli dati può dividerne un qualunque altro.

Che, ora, A, B, C, D, E non siano successivamente sottomultipli l'un dell'altro, è evidente: neppure A, difatti, è sottomultiplo di B. Dico adesso che nessun numero fra quelli dati può dividerne un qualunque altro[, cioè anche non ad esso successivo]. Infatti, se possibile, A divida C. si prendano altrettanti numeri quanti sono A, B, C, e siano essi F, G, H, che siano i più piccoli fra quanti abbiano tra loro a due a due lo stesso rapporto che tra loro hanno A, B, C (VII, 33). Ora, poiché F, G, H stanno fra loro a due a due nello stesso rapporto in cui stanno tra loro A, B, C, e sono in ugual numero (A, B, C e F, G, H), si ha che, *ex*

[5] Avendosi una proporzione continuata:

$$A : B = B : C = C : D = \dots..$$

se A divide B, ciò vuol dire che il rapporto inverso $B : A$ (costante, come quello diretto, $A : B$, nella proporzione continuata) è un numero intero (infatti: nell'ipotesi che A divida B, si ha che B è multiplo di A).

Se, invece, A non divide B, ciò vuol dire che il rapporto $B : A$ non è intero, e quindi lo stesso si ha per $C : B$ e per $D : C$, ossia B non divide C e C non divide D.

Il risultato si estende anche a termini *lontani*, come B, D e A, C mediante una deduzione *ex aequo* (VII, 14).

Il risultato della VIII, 6 trova immediata applicazione nella seguente VIII, 7, che è in certo senso la *contronominale* (inversa della contraria, o contraria dell'inversa) della VIII, 6. La VIII, 7 afferma che se in una proporzione continuata il primo termine divide l'ultimo esso divide anche il secondo. La dimostrazione si fa per assurdo, col consueto metodo dimostrativo delle proposizioni contronominali: infatti se il primo termine non dividesse il secondo, esso non dividerebbe neppure l'ultimo, come si ricava dalla proposizione diretta VII, 6.

Avvertiamo che per questa proposizione, e per alcune altre, tralasciamo di disegnare la *figura*, la quale altro non è (in tali casi) che un elenco di *numeri* rappresentati da *segmenti*.

aequo, $A : C = F : H$ (VII, 14). E poiché $A : B = F : G$, ma A non divide B, neppure F divide G (VII, def. XX); non è quindi F un'unità - infatti l'unità divide ogni numero. Ma F, H sono primi fra loro (VIII, 3)[, e quindi F non divide H [a]]. Inoltre F sta a H come A sta a C; perciò non può darsi neppure che A divida C (VII, def. XX). Similmente potremo dimostrare che nessun numero fra quelli dati può dividerne un qualunque altro. - C.D.D.

APPLICA: VII, 14, 33; VIII, 3.
È APPLICATA IN: VIII, 7.

PROPOSIZIONE 7.

Se si dànno quanti si voglia numeri in proporzione continuata, ed il primo divide l'ultimo, esso dividerà anche il secondo.

Siano A, B, C, D quanti si voglia numeri in proporzione continuata fra loro, ed A divida D; dico che A divide anche B.

Infatti, se A non dividesse B, nessun numero fra quelli dati potrebbe dividerne un qualunque altro (VIII, 6). Ma A divide D: dunque A divide anche B [a]. - C.D.D.

APPLICA: VIII, 6.
È APPLICATA IN: VIII, 14, 15.

PROPOSIZIONE 8.

Se fra due numeri vengono ad interporsene altri in proporzione continuata, altrettanti anche se ne potranno interporre in proporzione continuata fra [due] altri numeri che abbiano tra loro lo stesso rapporto [di quei primi due][6].

a. Ad essere precisi, questo si ritrova nel testo, ma è omesso da P.

[6] Si ha ora un gruppo di tre proposizioni che permettono, data una proporzione continuata, di ricavarne altre.

Nella prima (VIII, 8) si dimostra che da una qualunque proporzione continuata:

$$a : b = b : c = c : d$$

Infatti, fra i due numeri A, B vengano ad interporsi in proporzione continuata i numeri C, D, [si abbia cioè: $A : C = C : D = D : B$] e si faccia in modo che un numero E

se ne può dedurre un'altra di uguale numero di termini avente lo stesso rapporto costante:

$$h : k = k : l = l : m$$

(con $h : k = a : b$). Diremmo, nel nostro linguaggio, che se tra due numeri a, d possiamo inserire un certo numero di medi geometrici b, c..., altrettanti medi geometrici k, l... possiamo inserire tra altri due numeri h, m aventi tra loro lo stesso rapporto: $h : k = a : b$.

E i numeri h, k, l, m sono equimultipli dei corrispondenti numeri minimi che stiano tra loro a due a due nello stesso rapporto.

Nelle seguenti VIII, 9 e VIII, 10 si introducono proporzioni continuate che abbiano l'unità come primo termine.

Come si è veduto, Euclide non porta mai esempi numerici particolari, ed indica i numeri con lettere (maiuscole) dell'alfabeto, come noi facciamo in aritmetica razionale. Neppure per l'unità (che, oltre tutto, egli non considera come un numero) Euclide usa il segno numerico particolare, che sarebbe stato la lettera *alfa* nel modo greco di scrittura dei numeri. Egli indica, invece, l'unità col simbolo letterale maiuscolo che ha in quel momento a disposizione, che è la lettera E (*épsilon* maiuscola dell'alfabeto greco). Abbiamo preferito usare la lettera U, iniziale della parola italiana *unità*.

Così nella IX, 32, nella quale Euclide deve necessariamente riferirsi al numero 2, egli indica questo numero col simbolo A (*alfa* maiuscola) e la chiama con il nome di *diade* (δυάς). Scrupolo, invero, eccessivo che confina col puntiglio, dal momento che in nessun modo verrebbe lesa la generalità delle prop. VIII 9 - 10 e IX, 32 dall'impiego esplicito dei simboli dei numeri 1 e 2, dato che dette proposizioni si rivolgono esplicitamente a quei numeri particolari.

La VIII, 9 e la VIII, 10, come s'è detto, introducono proporzioni continuate il primo termine delle quali sia l'unità. In questo caso, i termini sono le successive potenze del secondo termine. Infatti, data la proporzione continuata (a partire dall'unità):

$$1 : a = a : b = b : c = \ldots\ldots$$

si ricava:

$$b = a^2 \; ; \quad c = a^3 \text{ ecc.}$$

Dunque le proporzioni continuate che partono dall'unità offrono ai matematici greci il mezzo per considerare le potenze successive dei numeri.

La VIII, 9 dice che da una proporzione continuata (con gli estremi a, b primi tra loro) è possibile dedurne altre due partenti dall'unità aventi ciascuna ugual numero di termini e aventi ciascuna come ultimo termine l'estremo a oppure l'estremo b.

Diamo un esempio numerico. Dalla proporzione continuata di 4 termini (8, 12, 18, 27):

$$8 : 12 = 12 : 18 = 18 : 27$$

stia con un altro F nello stesso rapporto di A con B[, ossia: $E : F = A : B$]; dico che altrettanti numeri [quanti sono C, D] si potranno interporre in proporzione continuata fra E, F.

Si prendano altrettanti numeri, difatti, quanti sono A, B, C, D, e siano essi G, H, K, L, che siano i più piccoli numeri fra quanti abbiano tra loro a due a due lo stesso rapporto che hanno tra loro A, C, D, B (VII, 33); perciò i loro estremi G, L sono primi fra loro (VIII, 3). Ora, poiché A, C, D, B stanno fra loro a due a due nello stesso rapporto in cui fra loro stanno G, H, K, L, ed A, C, D, B sono tanti quanti sono G, H, K, L, si ha che, *ex aequo*, A sta a B come G sta a L (VII, 14). Ma A sta a B come E sta a F; quindi anche, G sta a L come E sta a F. Ma G, L sono primi fra loro, e i numeri primi fra loro sono anche i più piccoli fra tutti quelli aventi tra loro a due a due lo stesso rapporto (VII, 21), ed i numeri più piccoli possibile sono equisottomultipli di quanti abbiano tra loro a due a due lo stesso rapporto, rispettivamente il numero maggiore del maggiore e quello minore del minore (VII, 20), vale a dire l'antecedente divide l'antecedente ed il conseguente divide il conseguente. Perciò G è contenuto in E altrettante volte quante L è contenuto in F. Per quante volte allora G divide E, altrettante volte H, K dividano rispettivamente M, N[, cioè sia: $E = mG$, $F = mL$, e si prendano M, N tali che sia: $M = mH$, $N = mK$]; quindi G, H, K, L sono equisottomultipli rispettivamente di E, M, N, F. Di conseguenza,

nella quale i termini estremi (8, 27) sono primi tra loro, possono dedursi due altre proporzioni continuate, pure di 4 termini ciascuna, partenti dall'unità e aventi rispettivamente 8 e 27 come estremi *di destra*, cioè:

$$1 : 2 = 2 : 4 = 4 : 8$$

e

$$1 : 3 = 3 : 9 = 9 : 27$$

La VIII, 10 è l'inversa della VIII, 9. Se si hanno due proporzioni continuate di egual numero di termini e partenti dall'unità come quelle numeriche sopra scritte, si può dedurre una proporzione continuata (come quella numerica $8 : 12 = 12 : 18 = 18 : 27$) avente lo stesso numero di termini ed avente per estremi (di sinistra e di destra) gli estremi destri delle due proporzioni partenti dall'unità.

G, *H*, *K*, *L* stanno fra loro a due a due nello stesso rapporto in cui fra loro stanno *E*, *M*, *N*, *F* (VII, def. XX). Ma *G*, *H*, *K*, *L* stanno fra loro a due a due nello stesso rapporto di *A*, *C*, *D*, *B*, per cui anche *A*, *C*, *D*, *B* stanno fra loro a due a due nello stesso rapporto di *E*, *M*, *N*, *F*. Ma *A*, *C*, *D*, *B* sono numeri che stanno fra loro in proporzione continuata; pure *E*, *M*, *N*, *F* sono perciò in proporzione continuata. Dunque, per quanti numeri risultano interporsi fra *A*, *B* in proporzione continuata, altrettanti anche se ne sono interposti in proporzione continuata fra *E*, *F*. – C.D.D.

APPLICA: VII, 3, 14, 20, 21, 33.

È APPLICATA IN: VIII, 24; IX, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

PROPOSIZIONE 9.

Se due numeri sono primi fra loro, e fra essi se ne interpongono altri in proporzione continuata, altrettanti anche se ne potranno interporre fra ciascuno dei due presi inizialmente e l'unità.

Siano *A*, *B* due numeri primi fra loro, fra essi vengano ad interporsi *C*, *D* in proporzione continuata, [in modo, cioè, che si abbia: $A : C = C : D = D : B$,] e si prenda l'unità *U*; dico che, per quanti sono i numeri che in proporzione continuata risultino interporsi fra *A*, *B*, altrettanti anche se ne potranno interporre in proporzione continuata fra ciascuno dei due *A*, *B* e l'unità.

Infatti, si prendano due numeri che siano i più piccoli possibile a stare fra loro nel rapporto in cui stanno fra loro a due a due *A*, *C*, *D*, *B*, e siano essi *E*, *F*; se ne prendano poi tre, e siano *H*, *K*, *L*, così sempre procedendo di séguito con aumento di una unità fino a che il loro numero finisca con l'essere uguale a quello di *A*, *B*, *C*, *D* (VIII, 2). Risultino presi, e siano *M*, *N*, *P*, *R*[, si abbia cioè: $E : F = A : C$; $H : K = K : L = A : C$; $M : N = N : P = P : R = A : C$, essendo *E*, *F*, *H*, *K*, *L*, *M*, *N*, *P*, *R* i numeri minimi]. È allora evidente che *E*, moltiplicando sé stesso, dà come

prodotto E^2, mentre moltiplicando E^2 dà come prodotto E^3, e che F, moltiplicando sé stesso, dà come prodotto F^2, mentre moltiplicando F^2 dà come prodotto F^3[, e che si ha allora: $H = E^2$; $M = E^3$; $L = F^2$; $R = F^3$] (VIII, 2, coroll.). Ora, poiché M, N, P, R sono i numeri più piccoli fra quanti abbiano tra loro a due a due lo stesso rapporto che tra loro hanno E, F, ma pure A, C, D, B sono i più piccoli fra quanti abbiano tra loro a due a due lo stesso rapporto di E, F (VIII, 1), e poiché M, N, P, R sono tanti quanti sono A, C, D, B, si ha che ciascuno dei numeri M, N, P, R è uguale rispettivamente a ciascuno dei numeri A, C, D, B, per cui M è uguale ad A, e R è uguale a B. Poiché d'altra parte E moltiplicando sé stesso ha prodotto E^2, si ha che E divide E^2 secondo le unità che sono in E. Ma pure l'unità divide E secondo le unità che sono in esso; perciò l'unità U è contenuta nel numero E altrettante volte quante E è contenuto in E^2. Si ha quindi che l'unità U sta al numero E come E sta ad E^2 [$U : E = E : E^2$] (VII, def. XX). Di nuovo, poiché E moltiplicando E^2 ha prodotto E^3, si ha che E^2 è contenuto in E^3 altrettante volte quante sono le unità contenute in E. Ma pure l'unità U è contenuta nel numero E secondo le unità che sono in esso; perciò l'unità U è contenuta nel numero E altrettante volte quante E^2 è contenuto in E^3. Quindi: $U : E = E^2 : E^3$ (VII, def. XX). Ma fu pure dimostrato che $U : E = E : E^2$; perciò anche, $U : E = E : E^2 = E^2 : E^3$. Per la stessa ragione, si ha pure che $U : F = F : F^2 = F^2 : F^3$. Dunque, per quanti sono i numeri che risultano interporsi fra A, B in proporzione continuata, altrettanti anche se ne sono interposti in proporzione continuata fra ciascuno dei due numeri A, B e l'unità U. - C.D.D.

APPLICA: VIII, 1, 2.

PROPOSIZIONE 10.

Se fra ciascuno di due numeri e l'unità si interpongono altri numeri in proporzione continuata, altrettanti anche se ne

potranno interporre in proporzione continuata fra essi[, *cioè fra i due primi*].

Infatti, fra i due numeri A, B e l'unità U vengano ad interporsi in proporzione continuata rispettivamente i numeri D, E e F, G[; ossia: $U : D = D : E = E : A$, ed anche si abbia: $U : F = F : G = G : B$]; dico che, per quanti sono i numeri che in proporzione continuata risultino interporsi fra ciascuno dei due A, B e l'unità U, altrettanti anche se ne potranno interporre in proporzione continuata fra A, B.

Il numero D, moltiplicando F, dia difatti il prodotto DF, mentre D, F, ciascuno moltiplicando DF, diano rispettivamente i prodotti D^2F, DF^2.

Ora, poiché l'unità U sta al numero D come D sta ad E, l'unità U è contenuta nel numero D altrettante volte quante D è contenuto in E (VII, def. XX). Ma l'unità U è contenuta nel numero D altrettante volte quante sono le unità contenute in D; perciò anche il numero D è contenuto nel numero E altrettante volte quante sono le unità contenute in D, e quindi D, moltiplicando sé stesso, dà come prodotto E[, ossia $D^2 = E$]. Di nuovo, poiché l'unità U sta al numero D come E sta ad A, l'unità U è contenuta nel numero D altrettante volte quante E è contenuto in A. Ma l'unità U è contenuta nel numero D altrettante volte quante sono le unità contenute in D, per cui anche E è contenuto in A altrettante volte quante sono le unità contenute in D, e quindi D, moltiplicando E, dà come prodotto D^3[, ossia $D^3 = A$]. Per la stessa ragione, pure F moltiplicando sé stesso dà come prodotto $G = F^2$, mentre, moltiplicando F^2, dà come prodotto $B = F^3$. Ma poiché D moltiplicando sé stesso ha prodotto $E = D^2$, e moltiplicando F ha prodotto DF, si ha che D sta a F come D^2 sta a DF (VII, 17-18). Per la stessa ragione, si ha pure: $D : F = DF : F^2$ (VII, 17-18). Quindi anche, $D^2 : DF = DF : F^2$. Di nuovo, poiché D ha prodotto, moltiplicando ognuno dei due numeri D^2, DF, rispettivamente $D^3 = A$, D^2F, si ha che $D^2 : DF = A : D^2F$ (VII, 17). Ma D^2 sta a DF come D sta a F; perciò anche, D sta a F come A sta a D^2F. Di nuovo,

poiché D, F, ciascuno moltiplicando DF, hanno prodotto rispettivamente D^2F, DF^2, si ha che $D : F = D^2F : DF^2$ (VII, 17-18). Ma, come si è or ora veduto, $D : F = A : D^2F$; perciò anche, $A : D^2F = D^2F : DF^2$. Poiché inoltre F, moltiplicando ognuno dei due numeri DF, F^2, ha prodotto rispettivamente DF^2, F^3, si ha che $DF : F^2 = DF^2 : F^3$. Ora, fu dimostrato pure che $D : F = D^3 : D^2F = D^2F : DF^2$; quindi anche, $D^3 : D^2F = D^2F : DF^2 = DF^2 : F^3$[, ossia: $A : D^2F = D^2F : DF^2 = DF^2 : B$]. Perciò A, D^2F, DF^2, B stanno fra loro in proporzione continuata [a]. Dunque, per quanti sono i numeri che in proporzione continuata si interpongono fra ciascuno dei due numeri A, B e l'unità U, altrettanti anche se ne interporranno in proporzione continuata fra A, B. - C.D.D.

Applica: VII, 17-18.

Proposizione 11.

Fra due numeri quadrati esiste un numero medio proporzionale, ed un numero quadrato ha con l'altro numero quadrato rapporto duplicato rispetto a quello che il lato [dell'uno] ha col lato [dell'altro].

Siano A^2, B^2 numeri quadrati, A sia il lato di A^2 e B sia il lato di B^2; dico che fra A^2, B^2 esiste un numero medio proporzionale, e che A^2 ha con B^2 rapporto duplicato rispetto a quello che A ha con B.

Infatti, A moltiplicando B dia il prodotto AB. Ora, poiché il numero A^2 è un quadrato ed A è il suo lato, A, moltiplicando sé stesso, dà come prodotto A^2. Per la stessa ragione, anche B, moltiplicando sé stesso, dà come prodotto B^2. Poiché dunque A, moltiplicando ognuno dei due numeri A, B, ha prodotto rispettivamente A^2, AB, si ha: $A : B = A^2 : AB$ (VII, 17-18). Per la stessa ragione, si ha

a. Letteralmente: sono secondo continuità successivamente proporzionali.

pure: $A : B = AB : B^2$ (VII, 17-18). Quindi anche, $A^2 : AB = AB : B^2$. Dunque fra A^2, B^2 esiste un numero AB medio proporzionale.

Dico adesso che A^2 ha inoltre con B^2 rapporto duplicato rispetto a quello che A ha con B. Infatti, poiché A^2, AB, B^2 sono tre numeri fra loro proporzionali[, $A^2 : AB = AB : B^2$], A^2 ha con B^2 rapporto duplicato rispetto a quello che A^2 ha con AB (V, def. IX). Ma[, come si è veduto,] $A^2 : AB = A : B$. Dunque A^2 ha con B^2 rapporto duplicato rispetto a quello che il lato A ha col lato B. – C.D.D.

APPLICA: VII, 17-18.

È APPLICATA IN: VIII, 13, 14; X, 9.

PROPOSIZIONE 12.

Fra due numeri cubi esistono due numeri medi proporzionali, ed un numero cubo ha con l'altro numero cubo rapporto triplicato rispetto a quello che il lato dell'uno ha col lato dell'altro [7].

Siano A^3, B^3 numeri cubi, A sia il lato di A^3 e B sia il lato di B^3; dico che fra A^3, B^3 esistono due numeri medi proporzionali, e che A^3 ha con B^3 rapporto triplicato rispetto a quello che A ha con B.

Infatti, A moltiplicando sé stesso dia il prodotto A^2, e moltiplicando B dia il prodotto AB, mentre B moltiplicando sé stesso dia il prodotto B^2, e ciascuno dei numeri A, B, moltiplicando AB, dia rispettivamente i prodotti A^2B, AB^2.

[7] Tra due numeri quadrati a^2, b^2 può inserirsi una media proporzionale:

$$a^2 : ab = ab : b^2$$

e tra due numeri cubi a^3, b^3 si possono inserire due medie proporzionali:

$$a^3 : a^2b = a^2b : ab^2 = ab^2 : b^3$$

Questo è un risultato classico della matematica greca, e risale assai probabilmente alla scuola pitagorica per i quadrati e ad Ippocrate di Chio per i cubi. O per lo meno Ippocrate utilizza il risultato per la *riduzione* del classico problema della duplicazione del cubo.

Ora, poiché A^3 è un numero cubo, mentre A è il suo lato, ed A moltiplicando sé stesso ha prodotto A^2, risulta che A, moltiplicando sé stesso, dà il prodotto A^2, e moltiplicando A^2 dà il prodotto A^3. Per la stessa ragione, anche B moltiplicando sé stesso dà come prodotto B^2 e moltiplicando B^2 dà come prodotto B^3. Ma poiché A, moltiplicando ognuno dei due numeri A, B, ha prodotto rispettivamente A^2, AB, si ha che $A : B = A^2 : AB$ (VII, 17-18). Per la stessa ragione, si ha pure che $A : B = AB : B^2$. Di nuovo, poiché A, moltiplicando ognuno dei due numeri A^2, AB, ha prodotto rispettivamente A^3, A^2B, si ha che $A^2 : AB = A^3 : A^2B$ (VII, 17-18). Ma [si è visto che] $A^2 : AB = A : B$; quindi anche, $A : B = A^3 : A^2B$. Di nuovo, poiché A, B, ciascuno moltiplicando AB, hanno prodotto rispettivamente A^2B, AB^2, si ha: $A : B = A^2B : AB^2$ (VII, 17-18). Ancora, poiché B, moltiplicando ognuno dei due numeri AB, B^2, ha prodotto rispettivamente $A B^2$, B^3, si ha che $AB : B^2 = AB^2 : B^3$. Ma [si è visto che] $AB : B^2 = A : B$; quindi anche, $A : B = A^3 :$ $: A^2B = A^2B : AB^2 = AB^2 : B^3$. Dunque A^2B, AB^2 sono due medi proporzionali fra A^3, B^3.

Dico adesso che A^3 ha inoltre con B^3 rapporto triplicato rispetto a quello che A ha con B. Infatti, poiché A^3, A^2B, $A B^2$, B^3 sono quattro numeri continuamente proporzionali, A^3 ha con B^3 rapporto triplicato rispetto a quello che A^3 ha con A^2B (V, def. X). Ma A^3 sta ad A^2B come A sta a B; dunque, si ha pure che A^3 ha con B^3 rapporto triplicato rispetto a quello che A ha con B. - C.D.D.

Applica: VII, 17-18.

È applicata in: VIII, 13.

Proposizione 13.

Se si dànno quanti si voglia numeri in proporzione continuata, e ciascuno di essi viene moltiplicato per sé stesso, i loro quadrati saranno proporzionali; e se si moltiplicano i

quadrati ottenuti per i numeri presi inizialmente, anche i cubi così ottenuti saranno in proporzione continuata [a].

Siano A, B, C quanti si voglia numeri in proporzione continuata, in modo che A stia a B come B sta a C $[A : B = B : C]$, ed A, B, C moltiplicando sé stessi diano i prodotti A^2, B^2, C^2, mentre poi, moltiplicando A^2, B^2, C^2, diano i prodotti A^3, B^3, C^3; dico che sia A^2, B^2, C^2 che A^3, B^3, C^3 stanno fra loro a due a due in proporzione continuata.

Infatti, A moltiplicando B dia il prodotto AB, ed A, B, ciascuno moltiplicando AB, diano rispettivamente i prodotti A^2B, AB^2. Di nuovo, B moltiplicando C dia il prodotto BC, e B, C, ciascuno moltiplicando BC, diano rispettivamente i prodotti B^2C, BC^2.

Similmente allora a quanto [ottenemmo] sopra (VIII, 12), potremo dimostrare che A^2, AB, B^2 e che A^3, A^2B, AB^2, B^3 stanno fra loro a due a due in proporzione continuata nel rapporto di A con B, ed inoltre che [pure] B^2, BC, C^2; e B^3, B^2C, BC^2, C^3; stanno fra loro in proporzione continuata nel rapporto di B con C. Ma [per ipotesi] $A : B = B : C$; pure A^2, AB, B^2 stanno quindi fra loro a due a due nello stesso rapporto in cui stanno fra loro a due a due B^2, BC, C^2, ed inoltre A^3, A^2B, AB^2, B^3 stanno fra loro a due a due nello stesso rapporto di B^3, B^2C, BC^2, C^3. Ma A^2, AB, B^2 sono tanti quanti sono B^2, BC, C^2, mentre [anche] A^3, A^2B, AB^2, B^3 sono tanti quanti B^3, B^2C, BC^2, C^3; dunque, *ex aequo*,

a. Letteralmente: « Se vi sono quanti si voglia numeri di séguito proporzionali, e ciascuno di essi, moltiplicando sé stesso, produce un certo numero, quelli da essi prodottisi saranno proporzionali; e se i numeri presi inizialmente, moltiplicando quelli prodottisi, producono certi altri numeri, anche questi saranno proporzionali ». Vi sono a questo punto altre parole, che Heiberg espunge: « e ciò sempre avviene riguardo agli estremi », le quali parole, rispetto al testo greco, risultano aggiunte all'enunciato, sono le stesse della proposizione VII, 27, e per le stesse ragioni sono più che sospette.

A^2 sta a B^2 come B^2 sta a C^2, ed A^3 sta a B^3 come B^3 sta a C^3 (VII, 14). – C.D.D.

APPLICA: VII, 14; VIII, 11, 12.

PROPOSIZIONE 14.

Se un numero quadrato ne divide un altro, anche il lato del primo dividerà il lato del secondo; e se il lato di un numero quadrato divide il lato di un altro numero quadrato, anche il primo quadrato dividerà il secondo quadrato [a].

Siano A^2, B^2 numeri quadrati, A, B siano i loro lati, ed A^2 divida B^2; dico che anche A divide B.

Infatti, A moltiplicando B dia il prodotto AB, per cui si ha che A^2, AB, B^2 stanno fra loro a due a due in proporzione continuata nel rapporto di A con B (VIII, 11). Ora, poiché A^2, AB, B^2 stanno fra loro in proporzione continuata, ed A^2[, cioè il primo,] divide B^2, [cioè l'ultimo,] si ha che A^2 divide pure AB[, cioè il secondo] (VIII, 7). Ma $A^2 : AB = A : B$; dunque anche A divide B (VII, def. XX).

Di nuovo, sia adesso il caso in cui A per ipotesi divida B; dico che anche A^2 divide B^2.

Infatti, procedendo nel medesimo modo [b], potremo similmente dimostrare che A^2, AB, B^2 stanno fra loro in proporzione continuata nel rapporto di A con B. Ora, poiché A sta a B come A^2 sta ad AB, ma A divide B, pure A^2 divide AB (VII, def. XX). Ma A^2, AB, B^2 stanno fra loro in proporzione continuata; quindi anche A^2 divide B^2[: infatti si ha che $A^2 : AB = AB : B^2$, ed A^2 divide AB ed AB divide B^2].

a. Letteralmente: Se un quadrato (cioè, un numero quadrato) misura un quadrato, anche il lato misurerà il lato; e se il lato misura il lato, anche il quadrato misurerà il quadrato.

b. Letteralmente: eseguita la medesima costruzione.

Dunque, se un numero quadrato ne divide un altro... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: VII, 17-18; VIII, 1, 7.

È APPLICATA IN: VIII, 16.

PROPOSIZIONE 15.

Se un numero cubo ne divide un altro, anche il lato del primo dividerà il lato del secondo; e se il lato di un numero cubo divide il lato di un altro numero cubo, anche il primo numero cubo dividerà il secondo numero cubo.

Infatti, il numero cubo A^3 divida il numero cubo B^3, e siano A il lato di A^3 e B il lato di B^3; dico che A divide B.

Moltiplicando sé stesso, difatti, A dia il prodotto A^2, mentre B moltiplicando sé stesso dia il prodotto B^2, ed inoltre A, moltiplicando B, dia il prodotto AB, mentre A, B, ciascuno moltiplicando AB, diano rispettivamente i prodotti A^2B, AB^2. È allora evidente che A^2, AB, B^2 e che A^3, A^2B, AB^2, B^3 stanno fra loro in proporzione continuata nel rapporto di A con B (VIII, 11, 12). Ora, poiché A^3, A^2B, AB^2, B^3 stanno fra loro in proporzione continuata, ed A^3[, il primo,] divide B^3, [l'ultimo,] esso divide anche A^2B[, il secondo] (VIII, 7). Ma $A^3 : A^2B = A : B$; dunque [avremo che] pure A divide B.

Ma sia adesso il caso in cui A per ipotesi divida B; dico che anche A^3 dividerà B^3.

Infatti, procedendo nel medesimo modo, potremo similmente dimostrare che A^3, A^2B, AB^2, B^3 stanno fra loro in proporzione continuata nel rapporto di A con B. Ora, poiché A divide B, ma $A : B = A^3 : A^2B$, avremo che pure A^3 divide A^2B; cosicché A^3 divide anche B^3[: infatti, $A^3 : A^2B = A^2B : AB^2 = AB^2 : B^3$, ed A^3 divide A^2B; quindi A^2B divide AB^2 ed AB^2 divide B^3]. – C.D.D.

APPLICA: VII, 17-18; VIII, 7, 12.

È APPLICATA IN: VIII, 17.

PROPOSIZIONE 16.

Se un numero quadrato non ne divide un altro, neppure il lato del primo dividerà il lato del secondo; e se il lato di un numero quadrato non divide il lato di un altro numero quadrato, neppure il primo numero quadrato dividerà il secondo numero quadrato.

Siano A^2, B^2 numeri quadrati, A, B siano i loro lati, ed A^2 non divida B^2; dico che neppure A divide B.

Infatti, se A dividesse B, anche A^2 dividerebbe B^2 (VIII, 14). Ma A^2 non divide B^2; dunque neppure A dividerà B.

Ma sia adesso il caso in cui A per ipotesi non divida B; dico che neppure A^2 dividerà B^2.

Infatti, se A^2 dividesse B^2, anche A dividerebbe B (VIII, 14). Ma A non divide B; dunque neppure A^2 dividerà B^2. - C.D.D.

APPLICA: VIII, 14.

PROPOSIZIONE 17.

Se un numero cubo non ne divide un altro, neppure il lato del primo dividerà il lato del secondo; e se il lato di un numero cubo non divide il lato di un altro numero cubo, neppure il primo numero cubo dividerà il secondo numero cubo.

Infatti, il numero cubo A^3 non divida il numero cubo B^3, e siano A il lato di A^3, e B il lato di B^3; dico che A non dividerà B.

Se A difatti dividesse B, anche A^3 dividerebbe B^3 (VIII, 15). Ma A^3 non divide B^3; dunque neppure A divide B.

Ma sia adesso il caso in cui A per ipotesi non divida B; dico che neppure A^3 dividerà B^3.

Infatti, se A^3 dividesse B^3, anche A dividerebbe B (VIII, 15). Ma A non divide B; dunque neppure A^3 dividerà B^3. - C.D.D.

APPLICA: VIII, 15.

PROPOSIZIONE 18.

Fra due numeri piani simili esiste un numero medio proporzionale; ed un numero piano ha con l'altro numero piano rapporto duplicato rispetto a quello che hanno fra loro i lati omologhi [8].

Siano $C \times D$, $E \times F$ [a] due numeri piani simili: i numeri C, D siano i lati di $C \times D$, ed E, F siano i lati di $E \times F$. Ora, poiché sono numeri piani simili quelli che hanno i lati proporzionali (VII, def. XXI), si ha: $C : D = E : F$. Dico dunque che fra $C \times D$, $E \times F$ esiste un numero medio proporzionale, e che $C \times D$ ha con $E \times F$ rapporto duplicato rispetto a quello che C ha con E ed a quello che D ha con F, vale a dire rispetto a quello che hanno fra loro i lati omologhi.

Poiché $C : D = E : F$, si ha, *permutando*: $C : E = D : F$ (VII, 13). E poiché $C \times D$ è un numero piano, e C, D sono i suoi lati, si ha che D, moltiplicando C, dà come prodotto $D \times C$. Per la stessa ragione, pure E moltiplicando F dà come prodotto $E \times F$. Il numero D allora, moltiplicando E, dia il prodotto $D \times E$. Ora, poiché D moltiplicando C ha così prodotto il numero [piano] $D \times C$, mentre moltiplicando E ha prodotto il numero [piano] $D \times E$, si ha che $C : E = D \times C : D \times E$ (VII, 17-18). Ma $C : E = D : F$; quindi anche, $D : F = D \times C : D \times E$. Di nuovo, poiché E moltiplicando D ha prodotto il numero [piano] $D \times E$, e molti-

a. Euclide naturalmente usa la lettera A per ciò che indichiamo con $C \times D$, la lettera B per $E \times F$, e poi G per $D \times E$; noi seguiamo il solito procedimento, per facilitare la lettura.

[8] La VIII, 18 e la VIII, 19 estendono ai numeri simili (rispettivamente piani e solidi) l'importantissima proprietà veduta nella VIII, 11 e nella VIII, 12 per i numeri quadrati e cubi.

Va ricordato che i numeri quadrati e i numeri cubi rappresentano casi particolari di numeri (rispettivamente piani e solidi) simili, come si può vedere dalla definizione ventunesima del libro settimo; e come Euclide esplicitamente afferma.

Le proposizioni 20 e 21 sono le inverse, rispettivamente, delle proposizioni 18 e 19.

plicando F ha prodotto il numero [piano] $E \times F$, si ha che $D : F = D \times E : E \times F$. Ma fu pure dimostrato che $D : F = D \times C : D \times E$; quindi anche, $D \times C : D \times E =$ $= D \times E : E \times F$. Perciò $D \times C$, $D \times E$, $E \times F$ stanno fra loro in proporzione continua. Dunque, fra $C \times D$, $E \times F$ esiste un numero medio proporzionale.

Dico adesso, inoltre, che $C \times D$ ha con $E \times F$ rapporto duplicato rispetto a quello che hanno fra loro i lati omologhi, vale a dire a quello che C ha con E ed a quello che D ha con F. Infatti, poiché $D \times C$, $D \times E$, $E \times F$ stanno fra loro in proporzione continua, $D \times C$ ha con $E \times F$ rapporto duplicato rispetto a quello che $D \times C$ ha con $D \times E$ (V, def. IX). Ma $D \times C : D \times E = C : E = D : F$. Dunque, si ha pure che $D \times C$ ha con $E \times F$ rapporto duplicato rispetto a quello che C ha con E, o che D ha con F. – C.D.D.

APPLICA: VII, 13, 17-18.

È APPLICATA IN: VIII, 19, 25, 26; IX, 1, 2.

PROPOSIZIONE 19.

Fra due numeri solidi simili si interpongono due numeri medi proporzionali; ed uno dei numeri solidi ha con l'altro numero solido simile rapporto triplicato rispetto a quello che hanno fra loro i lati omologhi.

Siano [indicati con] CDE, FGH due numeri solidi simili [a]: C, D, E siano i lati di CDE, e F, G, H i lati di FGH. Ora, poiché numeri solidi simili sono quelli che hanno i lati proporzionali (VII, def. XXI), si ha che C sta a D come F sta a G, e che D sta ad E come G sta a H [$C : D = F : G$; $D : E = G : H$]. Dico che fra CDE, FGH si interpongono due numeri medi proporzionali, e che CDE ha con FGH

a. Qui con CDE intendiamo il numero risultante della moltiplicazione $C \times D \times E$; con CD il numero che si ottiene moltiplicando C per D, e così via.

rapporto triplicato rispetto a quello che C ha con F, a quello che D ha con G, ed infine a quello che E ha con H.

Infatti, C moltiplicando D dia il prodotto CD, e F moltiplicando G dia il prodotto FG. Poiché C, D stanno fra loro nello stesso rapporto di F con G [$C : D = F : G$], e CD è il prodotto del numero C per D, mentre FG è il prodotto del numero F per G, si ha che CD, FG sono numeri piani simili (VII, def. XXI); fra CD, FG esiste perciò un numero medio proporzionale (VIII, 18). Esso sia DF, cioè il prodotto di D per F, come fu dimostrato nel teorema a questo precedente[; si ha cioè: $CD : DF = DF : FG$] (VIII, 18). Ora, poiché D moltiplicando C ha prodotto CD, e moltiplicando F ha prodotto DF, si ha che $C : F = CD : DF$ (VII, 17-18). Ma $CD : DF = DF : FG$. Perciò CD, DF, FG stanno fra loro in proporzione continua nel rapporto di C con F. Ma poiché $C : D = F : G$, si ha, *permutando*, che $C : F = D : G$ (VII, 13). Per la stessa ragione, si ha anche: $D : G = E : H$. Quindi CD, DF, FG stanno fra loro in proporzione continua nel rapporto di C con F, [ossia] in quello di D con G, [ossia,] infine, in quello di E con H. Adesso E, H, ciascuno moltiplicando DF, diano rispettivamente i prodotti EDF, HDF. Poiché CDE è un numero solido, e C, D, E sono i suoi lati, si ha che E, moltiplicando il prodotto dei numeri C per D, dà come prodotto CDE. Ma CD è il prodotto di C per D, per cui E moltiplicando CD ha prodotto CDE. Per la stessa ragione, pure H moltiplicando FG dà come prodotto FGH. Ora, poiché E moltiplicando CD ha prodotto CDE, ma, moltiplicando pure DF, ha prodotto EDF, si ha che CD sta a DF come CDE sta ad EDF (VII, 17-18). Di nuovo, poiché E, H, ciascuno moltiplicando DF, hanno prodotto rispettivamente EDF, HDF, si ha che E sta a H come EDF sta a HDF [$E : H = EDF : HDF$ (id.)]. Ma $E : H = C : F = D : G$; perciò si ha anche: $C : F = D : G = E : H = CDE : EDF = EDF : HDF$. Di nuovo, poiché H moltiplicando DF ha prodotto HDF, ma moltiplicando pure FG, ha prodotto HFG, si ha che $DF : FG = HDF : HFG$ (VII, 17-18). Ma $DF : FG = C : F = D : G = E : H$. Quindi si ha pure che C sta a F, che D sta a G,

e che E sta a H, non soltanto come HDF sta a HFG, ma anche come CDE sta ad EDF e come EDF sta a HDF. Dunque CDE, EDF, HDF, FGH stanno fra loro in proporzione continuata negli indicati rapporti dei lati.

Dico inoltre che CDE ha con FGH rapporto triplicato rispetto a quello che hanno fra loro i lati omologhi, vale a dire a quello che il numero C ha col numero F, o che D ha con G, ed infine che E ha con H. Infatti, poiché CDE, EDF, HDF, FGH sono quattro numeri in proporzione continuata fra loro, CDE ha con FGH rapporto triplicato rispetto a quello che CDE ha con EDF (V, def. X). Ma CDE sta ad EDF come (fu dimostrato) C sta a F, come D sta a G, ed infine come E sta a H.

Dunque si ha pure che CDE ha con FGH rapporto triplicato rispetto a quello che hanno fra loro i lati omologhi, vale a dire a quello che il numero C ha col numero F, che D ha con G, ed infine che E ha con H. – C.D.D.

APPLICA: VII, 13, 17-18; VIII, 18.

È APPLICATA IN: VIII, 25, 27; IX, 4, 5, 6.

PROPOSIZIONE 20.

Se fra due numeri si può interporre un numero medio proporzionale, quelli presi inizialmente saranno numeri piani simili.

Infatti, fra i due numeri A, B si interponga il numero medio proporzionale C[, sicché sia: $A : C = C : B$]; dico che A, B sono numeri piani simili.

Si prendano i due numeri più piccoli fra quanti abbiano tra loro a due a due lo stesso rapporto di A con C, e siano essi D, E (VII, 33); quindi D è contenuto in A altrettante volte quante E è contenuto in C (VII, 20). [Supponiamo che sia: $A = FD$; $C = FE$.] Per quante volte allora D è contenuto in A, altrettante unità siano nel numero F; perciò F, moltiplicando D, dà come prodotto A (VII, def. XV). Cosicché A è un numero piano, e D, F sono i suoi lati. Di

nuovo, poiché D, E sono i numeri più piccoli fra quanti abbiano tra loro a due a due lo stesso rapporto di C con B, si ha che D è contenuto in C altrettante volte quante E è contenuto in B (VII, 20). [Supponiamo che sia: $C = GD$; $B = GE$.] Per quante volte allora E è contenuto in B, altrettante unità siano nel numero G. Quindi E divide B secondo le unità che sono in G, e G, moltiplicando E, dà come prodotto B (VII, def. XV). Perciò B è un numero piano, ed E, G sono i suoi lati. Dunque A, B sono numeri piani [$A = FD$; $B = GE$]. Dico adesso che sono anche simili. Infatti, poiché F moltiplicando D dà come prodotto A, e moltiplicando E dà come prodotto C, si ha che D sta ad E come A sta a C, vale a dire come C sta a B[; ossia: $FD = A$; $FE = C$, ed inoltre: $GD = C$; $GE = B$, da cui $D : E = A : C = C : B$ (VII, 17-18)]. Di nuovo[a], poiché E, moltiplicando ognuno dei due numeri F, G, dà rispettivamente come prodotti C, B [$FE = C$; $GE = B$], si ha che $F : G = C : B$ (VII, 17-18). Ma $C : B = D : E$[, come si è sopra veduto]; quindi anche, $D : E = F : G$. Si ha allora, *permutando*, che $D : F = E : G$ (VII, 13). Dunque $A = DF$, $B = EG$ sono numeri piani simili: infatti i loro lati sono proporzionali. - C.D.D.

APPLICA: VII, 13, 17-18, 20, 33.

È APPLICATA IN: VIII, 21, 22; IX, 2.

a. Il testo, da *poiché F* a *Di nuovo*, si presenta chiaramente corrotto: non è necessario *inferire* che D sta ad E come A sta a C, poiché questo fa parte dell'ipotesi (« Si prendano i numeri D, E, i più piccoli possibile... », ecc.), e non si dà spiegazione di ciò che si afferma, che cioè F, moltiplicando E, dà come prodotto C. Heath ad es. (*op. cit.*, vol. II, p. 376) proporrebbe una sostituzione del tipo: « Infatti, poiché E è contenuto in C altrettante volte quante D è contenuto in A, cioè secondo le unità che sono in F, si ha che F moltiplicando E dà come prodotto C. Ma poiché E, moltiplicando F, G,... ecc. », riprendendo il testo.

PROPOSIZIONE 21.

Se fra due numeri si possono interporre due numeri medi proporzionali, quelli presi inizialmente saranno numeri solidi simili.

Infatti, fra due numeri A, B si interpongano i due numeri medi proporzionali C, D[, cioè si abbia: $A : C = C : D = D : B$]; dico che A, B sono numeri solidi simili.

Si prendano difatti i tre numeri più piccoli fra quanti abbiano tra loro a due a due lo stesso rapporto che tra loro hanno A, C, D, e siano essi E, F, G (VII, 33, o VIII, 2), per cui i loro estremi E, G sono primi fra loro (VIII, 3). Ora, poiché fra E, G risulta interporsi un numero medio proporzionale F, i numeri E, G sono piani simili (VIII, 20). Siano dunque H, K i lati di E, e L, M i lati di G [$E = HK$; $G = LM$). È perciò evidente dal teorema che precede che E, F, G stanno fra loro a due a due in proporzione continuata nel rapporto di H con L ed in quello di K con M. Ma poiché E, F, G sono i numeri più piccoli fra quanti abbiano tra loro a due a due lo stesso rapporto che tra loro hanno A, C, D, ed E, F, G sono tanti quanti sono A, C, D, si ha, *ex aequo*, che E sta a G come A sta a D (VII, 14). Ma E, G sono numeri primi fra loro, e i numeri primi fra loro sono anche i più piccoli fra tutti quelli aventi tra loro a due a due lo stesso rapporto (VII, 21), ed i numeri più piccoli possibile sono equisottomultipli di quanti abbiano tra loro a due a due lo stesso rapporto, rispettivamente il numero maggiore del maggiore e quello minore del minore (VII, 20), vale a dire l'antecedente divide l'antecedente ed il conseguente divide il conseguente; quindi E è contenuto in A altrettante volte quante G è contenuto in D. Per quante volte allora E è contenuto in A, altrettante unità siano in un numero N. Perciò N moltiplicando E dà come prodotto A[; si ha così: $A = NE$, come si ha: $D = NG$] (VII, def. XV). Ma E è il prodotto di H per K, per cui N dà come prodotto A moltiplicando il prodotto di H per K. Dunque A è un numero solido, e H, K, N sono i suoi lati[,

ossia $A = HKN$]. Di nuovo, poiché E, F, G sono i numeri più piccoli fra quanti abbiano tra loro a due a due lo stesso rapporto che tra loro hanno C, D, B, si ha che E è contenuto in C altrettante volte quante G è contenuto in B (VII, 20). Ora, per quante volte E è contenuto in C, altrettante unità siano in un numero P. Quindi G divide B secondo le unità che sono in P, per cui P, moltiplicando G, dà come prodotto B[; si ha appunto: $PE = C$, come si ha: $PG = B$]. Ma G è il prodotto di L per M; quindi P dà come prodotto B moltiplicando il prodotto di L per M. Perciò B è un numero solido, e L, M, P sono i suoi lati[, ossia $B = LMP$]: dunque A, B sono numeri solidi.

Dico che sono anche simili. Infatti, poiché N, P, [come si è visto,] moltiplicando E dànno rispettivamente come prodotti A, C [$NE = A$; $PE = C$], si ha che $N : P = A : C$ (VII, 17-18), vale a dire $N : P = E : F$. Ma $E : F = H : L = K : M$; quindi anche, $H : L = K : M = N : P$. Ora, H, K, N sono i lati di A, mentre P, L, M sono i lati di B. Dunque A, B sono numeri solidi simili. – C.D.D.

APPLICA: VII, 14, 17-18, 20, 21; VIII, 2, 3, 20.

È APPLICATA IN: VIII, 23.

PROPOSIZIONE 22.

Se tre numeri stanno fra loro in proporzione continua, ed il primo di essi è un quadrato, anche il terzo sarà un quadrato.

Siano A, B, C tre numeri in proporzione continua fra loro[, cioè si abbia: $A : B = B : C$], ed il primo di essi, A, sia un quadrato; dico che anche il terzo, C, è un quadrato.

Infatti, poiché fra A, C esiste un numero medio proporzionale, cioè B, si ha che A, C sono numeri piani simili (VIII, 20). Ma A è un quadrato; dunque anche C è un quadrato. – C.D.D.

APPLICA: VIII, 20.

È APPLICATA IN: VIII, 24; IX, 1, 8, 9.

PROPORZIONE 23.

Se quattro numeri stanno fra loro in proporzione continuata. ed il primo di essi è un cubo, anche il quarto sarà un cubo.

Siano A, B, C, D quattro numeri in proporzione continuata fra loro, ed A sia un cubo; dico che anche D è un cubo.

Infatti, poiché fra A, D esistono due numeri medi proporzionali, cioè B, C, si ha che A, D sono numeri solidi simili (VIII, 21). Ma A è un cubo; dunque anche D è un cubo. – C.D.D.

APPLICA: VIII, 21.

È APPLICATA IN: VIII, 25; IX, 3, 4, 5, 6, 8, 9.

PROPOSIZIONE 24.

Se due numeri hanno fra loro il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato, ed il primo di essi è un quadrato, anche il secondo sarà un quadrato.

Infatti, i due numeri A, B abbiano fra loro il rapporto che il numero quadrato C ha col numero quadrato D, ed A sia un quadrato; dico che anche B è un quadrato.

Poiché difatti C, D sono quadrati, si ha che C, D sono numeri piani simili. Fra C, D si interpone quindi un numero medio proporzionale (VIII, 18). Ma C sta a D come A sta a B, per cui pure fra A, B si interpone un numero medio proporzionale (VIII, 8). Ora, A è un quadrato; dunque anche B è un quadrato (VIII, 22). – C.D.D.

APPLICA: VIII, 8, 18, 22.

PROPOSIZIONE 25.

Se due numeri hanno fra loro il rapporto che un numero cubo ha con un numero cubo, ed il primo di essi è un cubo, anche il secondo sarà un cubo.

Infatti, i due numeri A, B abbiano fra loro il rapporto che il numero cubo C ha col numero cubo D, ed A sia un cubo; dico che anche B è un cubo.

Poiché difatti *C*, *D* sono cubi, si ha che *C*, *D* sono numeri solidi simili; quindi fra *C*, *D* si interpongono due numeri medi proporzionali (VIII, 19). E per quanti siano i numeri che si interpongono fra *C*, *D* in proporzione continuata fra loro, altrettanti se ne interpongono pure fra quanti abbiano tra loro lo stesso rapporto di *C* con *D* (VIII, 8), cosicché anche fra *A*, *B* si interpongono due numeri medi proporzionali. Si interpongano *E*, *F*. Dunque, poiché i quattro numeri *A*, *E*, *F*, *B* stanno fra loro in proporzione continuata, ed *A* è un cubo, anche *B* è un cubo (VIII, 23). – C.D.D.

APPLICA: VIII, 18, 19, 23.

È APPLICATA IN: IX, 10.

PROPOSIZIONE 26.

Numeri piani simili hanno fra loro il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato[9].

Siano *A*, *B* numeri piani simili; dico che *A* ha con *B* il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato.

Infatti, poiché *A*, *B* sono numeri piani simili, fra *A*, *B* si interpone un numero medio proporzionale (VIII, 18). Si interponga e sia esso *C*, e si prendano i numeri *D*, *E*, *F* che siano i più piccoli fra quanti abbiano tra loro a due a due lo stesso rapporto che tra loro hanno *A*, *C*, *B* (VII, 33, o VIII, 2); quindi i loro estremi *D*, *F* sono numeri quadrati (VIII, 2, coroll.). Dunque, poiché *D* sta a *F* come *A* sta a *B*, e *D*, *F* sono numeri quadrati, *A* ha con *B* il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato. – C.D.D.

APPLICA: VIII, 2, 18.

[9] In queste due proposizioni VIII, 26, e VIII, 27 si tratta ancora di numeri simili (piani e solidi): essi stanno tra loro rispettivamente come un numero quadrato ad un numero quadrato o come un numero cubo sta ad un numero cubo.

PROPOSIZIONE 27.

Numeri solidi simili hanno fra loro il rapporto che un numero cubo ha con un numero cubo.

Siano A, B numeri solidi simili; dico che A ha con B il rapporto che un numero cubo ha con un numero cubo.

Infatti, poiché A, B sono numeri solidi simili, fra A, B si interpongono due numeri medi proporzionali (VIII, 19). Si interpongano C, D, e si prendano i numeri E, F, G, H che siano i più piccoli fra quanti abbiano tra loro a due a due lo stesso rapporto che tra loro hanno A, C, D, B, e che siano tanti quanti sono questi ultimi (VII, 33, o VIII, 2); quindi i loro estremi E, H sono numeri cubi (VIII, 2, coroll.). Ma E sta a H come A sta a B; dunque, si ha pure che A ha con B il rapporto che un numero cubo ha con un numero cubo. – C.D.D.

APPLICA: VIII, 2, 19.

LIBRO NONO

PROPOSIZIONI

PROPOSIZIONE I.

Se due numeri piani simili si moltiplicano fra loro, il prodotto sarà un quadrato[1].

Siano A, B due numeri piani simili, ed A moltiplicando B dia il prodotto AB; dico che AB è un quadrato.

Infatti, A moltiplicando sé stesso dia il prodotto $A \times A$[a]. Quindi esso è un quadrato. Poiché dunque A moltiplicando sé stesso ha prodotto il numero quadrato A^2, e moltiplicando B ha prodotto AB, si ha che $A : B = A^2 : AB$ (VII, 17-18). E poiché A, B sono numeri piani simili, si può interporre fra A, B un numero medio proporzionale (VIII, 18). Ma se fra due numeri se ne interpongono altri che stiano in proporzione continuata [fra loro e coi primi due], per quanti sono i numeri che fra quelli si interpongano, altrettanti anche se ne interporranno fra quanti abbiano tra loro lo stesso rapporto dei primi due (VIII, 8); cosicché pure

a. Naturalmente, nel testo abbiamo: *produca D*, così come prima abbiamo avuto: A *moltiplicando* B *produca* C. Useremo, dato questo, formule opportune, indicando con AB il prodotto di A per B, e così via.

[1] Il libro nono si riattacca senza interruzione alcuna al libro ottavo: questa prima proposizione tratta infatti ancora di numeri piani simili (per stabilire che il loro prodotto è un numero quadrato): di numeri simili (piani e solidi) Euclide si era appunto occupato alla fine del libro precedente.

La prop. IX, 2 è l'inversa della IX, 1.

fra A^2, AB si interpone un numero medio proporzionale. Ma A^2 è un quadrato; dunque anche AB è un quadrato (VIII, 22). – C.D.D.

APPLICA: VII, 17-18; VIII, 8, 18, 22.

È APPLICATA IN: X, lemma a X, 29.

PROPOSIZIONE 2.

Se due numeri moltiplicandosi fra loro dànno per prodotto un quadrato, sono numeri piani simili.

Siano A, B due numeri, ed A moltiplicando B dia per prodotto il numero quadrato AB; dico che A, B sono numeri piani simili.

Infatti, A moltiplicando sé stesso dia il prodotto A^2, che è un numero quadrato. Ora, poiché A moltiplicando sé stesso ha prodotto A^2, e moltiplicando B ha prodotto AB, si ha che $A : B = A^2 : AB$ (VII, 17-18). E poiché A^2 è un quadrato, ma lo è anche AB, si ha che A^2, AB sono numeri piani simili. Perciò fra A^2, AB si interpone un numero medio proporzionale (VIII, 18). Ma A^2 sta ad AB come A sta a B; quindi anche fra A, B si interpone un medio proporzionale (VIII, 8). Ma se fra due numeri si interpone un numero medio proporzionale, essi sono piani simili (VIII, 20); dunque A, B sono numeri piani simili. – C.D.D.

APPLICA: VII, 17-18; VIII, 8, 18, 20.

PROPOSIZIONE 3.

Se un numero cubo moltiplica sé stesso, il prodotto sarà un cubo.

Infatti, il numero cubo A^3 moltiplicando sé stesso dia il prodotto B; dico che B è [anch'esso] un numero cubo [2].

[2] Il gruppo di proposizioni IX 3, 4, 5, 6 riguarda i numeri cubi.
La IX, 3 dice che il prodotto $a^3 \cdot a^3$ è un numero cubo, la IX 4 che il prodotto $a^3 \cdot b^3$ è pure un cubo, mentre la IX, 5 è l'inversa della IX, 4

Si prenda difatti A, lato di A^3, ed A moltiplicando sé stesso dia il prodotto A^2. È allora evidente che A, moltiplicando A^2, dà come prodotto A^3. Ora, poiché A moltiplicando sé stesso ha prodotto A^2, si ha che A è contenuto in A^2 altrettante volte quante sono le unità contenute in A (VII, def. XV). Ma pure l'unità [U], tuttavia, è contenuta in A altrettante volte quante sono le unità contenute in A, per cui l'unità U sta ad A come A sta ad A^2 [$U : A = A : A^2$] (VII, def. XX). Di nuovo, poiché A moltiplicando A^2 ha prodotto A^3, si ha che A^2 è contenuto in A^3 altrettante volte quante sono le unità contenute in A. Ma pure l'unità U è contenuta in A altrettante volte quante sono le unità in A contenute, per cui l'unità sta ad A come A^2 sta ad A^3 [$U : A = A^2 : A^3$] (VII, def. XX). Ma $U : A = A : A^2$; quindi anche, $U : A = A : A^2 = A^2 : A^3$. Perciò fra l'unità ed il numero A^3 si interpongono in proporzione continuata i due numeri medi proporzionali A, A^2. Di nuovo, poiché A^3 moltiplicando sé stesso ha prodotto B, si ha che A^3 è contenuto in B altrettante volte quante sono le unità contenute in B. Ma anche l'unità U è contenuta in A^3 altrettante volte quante sono le unità contenute in A^3; quindi $U : A^3 = A^3 : B$ (VII, def. XX). Ma fra l'unità ed A^3 si interpongono due numeri medi proporzionali; perciò anche fra A^3, B si interporranno due numeri medi proporzionali (VIII, 8). Ma se fra due numeri si interpongono due medi proporzionali, ed il primo è un cubo, pure il secondo sarà un cubo (VIII, 23). Ora, A^3 è un cubo; dunque anche B è un cubo (id.). – C.D.D.

APPLICA: VIII, 8, 23.

È APPLICATA IN: IX, 4, 5, 9.

(cioè dice che se il prodotto $a^3 \cdot c$ è un numero cubo, anche c è un cubo). Finalmente la IX, 6 è l'inversa della IX, 3: essa dice infatti che se il prodotto a, a è un numero cubo, anche a è un cubo.

PROPOSIZIONE 4.

Se un numero cubo moltiplica un altro numero cubo, il prodotto sarà un cubo.

Infatti, il numero cubo A^3 moltiplicando il numero cubo B^3 dia il prodotto C; dico che C è un cubo.

Moltiplicando sé stesso, difatti, A^3 dà un prodotto che è un cubo[a] (IX, 3). [Indichiamolo con D^3 (cioè: $A^3 \cdot A^3 = D^3$)]. Ora, poiché A^3 moltiplicando sé stesso ha prodotto D^3, e moltiplicando B^3 ha prodotto C, si ha che $A^3 : B^3 = D^3 : C$ (VII, 17-18). E poiché A^3, B^3 sono cubi, A^3, B^3 sono numeri solidi simili. Quindi fra A^3, B^3 si interpongono due numeri medi proporzionali (VIII, 19), cosicché anche fra D^3, C si interporranno due numeri medi proporzionali (VIII, 8). Ma D^3 è un cubo; dunque anche C è un cubo (VIII, 23). – C.D.D.

APPLICA: VII, 17-18; VIII, 8, 19, 23; IX, 3.

PROPOSIZIONE 5.

Se un numero cubo, moltiplicando un altro numero, dà per prodotto un cubo, anche il numero che è stato moltiplicato sarà un cubo.

Infatti, il numero cubo A^3 moltiplicando un altro numero B dia per prodotto il cubo C^3; dico che B è un cubo.

Il numero A^3 difatti, moltiplicando sé stesso, dà per prodotto un numero cubo[, che indicheremo con D^3 (cioè: $A^3 \cdot A^3 = D^3$)] (IX, 9). Ora, poiché A^3 moltiplicando sé stesso ha prodotto D^3, e moltiplicando B ha prodotto C^3, si ha che $A^3 : B = D^3 : C^3$ (VII, 17). E poiché D^3, C^3 sono cubi, sono numeri solidi simili. Quindi fra D^3, C^3 si interpongono due numeri medi proporzionali (VIII, 19). Ma D^3 sta a C^3

a. Sarebbe, alla lettera: « Moltiplicando sé stesso, difatti, A (cioè, il nostro A^3) dia il prodotto D (il nostro D^3); quindi D è (numero) cubo..., ecc. ». In traduzione abbiamo un esempio della formula che adottiamo.

come A^3 sta a B, per cui anche fra A^3, B si interpongono due numeri medi proporzionali (VIII, 8). Ma A^3 è un cubo; dunque anche B è un cubo. – C.D.D.

APPLICA: VII, 17-18; VIII, 8, 19, 23; IX, 3.

PROPOSIZIONE 6.

Se un numero moltiplicando sé stesso dà per prodotto un cubo, sarà esso pure un cubo.

Infatti, il numero A moltiplicando sé stesso dia come prodotto un numero cubo B; dico che anche A è un cubo.

Il numero A difatti, moltiplicando sé stesso, ha dato il prodotto B. Poiché dunque A moltiplicando sé stesso ha prodotto B, [cioè A^2,] e moltiplicando ancora A per $B = A^2$ risulta produrre A^3, si ha che A^3 è un numero cubo[, cioè il cubo di A]. Ora, poiché A moltiplicando sé stesso ha prodotto B, si ha che A è contenuto in B altrettante volte quante sono le unità contenute in A. Ma anche l'unità U è contenuta in A altrettante volte quante sono le unità in A contenute. Perciò $U : A = A : B$ (VII, def. XX). E poiché A moltiplicando B ha prodotto A^3, si ha che B è contenuto in A^3 altrettante volte quante sono le unità contenute in A. Ma pure l'unità U è contenuta in A altrettante volte quante sono le unità in A contenute. Perciò $U : A = B : A^3$ (VII, def. XX). Ma[, come si è visto,] $U : A = A : B$; quindi anche, $A : B = B : A^3$. Ma poiché B, A^3 sono cubi, essi sono numeri solidi simili. Quindi fra B, A^3 esistono due numeri medi proporzionali (VIII, 19). Ora, B sta ad A^3 come A sta a B. Anche fra A, B esistono perciò due numeri medi proporzionali (VIII, 8). Ma B è un cubo; dunque anche A è un cubo (VIII, 23). – C.D.D.

APPLICA: VIII, 8, 9, 23.

È APPLICATA IN: IX, 10.

PROPOSIZIONE 7.

Se un numero composto moltiplica un altro numero, il prodotto sarà un numero solido.

Infatti, il numero composto A moltiplicando un altro numero B dia il prodotto C; dico che C è un numero solido.

Poiché difatti A è composto, avrà per divisore un qualche altro numero (VII, def. XIII). Sia diviso da D, e per quante volte D divide A, altrettante unità siano in un numero E[, cioè sia: $A : D = E : U$]. Poiché dunque D divide A secondo le unità che sono in E, si ha che E, moltiplicando D, dà come prodotto A[, ossia: $ED = A$] (VII, def. XV). Ora, poiché A moltiplicando B ha prodotto C, ma A è il prodotto di D per E, [ossia per ipotesi: $AB = C$, ma $A = ED$,] si ha che il prodotto di D per E, moltiplicando B, dà come prodotto C [$AB = EDB = C$]. Dunque C è un numero solido, e D, E, B sono i suoi lati. - C.D.D.

PROPOSIZIONE 8.

Se quanti si voglia numeri stanno fra loro in proporzione continuata a partire dall'unità, il terzo cominciando dall'unità sarà un quadrato e così quelli tra i quali sia intercalato successivamente un posto, il quarto poi sarà un cubo e così quelli tra i quali siano intercalati successivamente due posti, il settimo infine sarà sia un cubo che un quadrato e così quelli tra i quali siano intercalati successivamente cinque posti[3].

Siano A, B, C, D, E, F quanti si voglia numeri in proporzione continuata a partire dall'unità U, cioè sia: $U : A =$

[3] Questa proposizione, così come la seguente IX, 9, riguarda le proporzioni continuate che partono dall'unità; cioè riguardano quelle particolari progressioni geometriche i termini delle quali, dopo l'unità e la *ragione*, sono le successive potenze della ragione stessa:

$$1 \cdot q \cdot q^2 \cdot q^3 \cdot q^4 \cdot q^5 \cdot q^6 \cdot q^7 \ldots..$$

La IX, 8 stabilisce che il terzo termine (dopo l'unità, cioè quello che abbiamo indicato con q^2) è un quadrato, e così quelli che dopo di esso si susseguono con l'intervallo di un posto (come q^4, q^6...). Stabilisce inoltre

$= A : B = B : C = C : D = D : E = E : F$. Dico che il terzo cominciando dall'unità, cioè B, è un quadrato e così tutti quelli tra i quali sia intercalato successivamente un posto, che il quarto poi, C, è un cubo e così tutti quelli tra i quali siano intercalati successivamente due posti, che infine il settimo, F, è sia un cubo che un quadrato e così tutti quelli tra i quali siano intercalati successivamente cinque posti.

Infatti, poiché $U : A = A : B$, l'unità è contenuta in A altrettante volte quante A è contenuto in B (VII, def. XX). Ma l'unità è contenuta in A altrettante volte quante sono

che il quarto termine (dopo l'unità, cioè il nostro q^3) è un cubo, e così i seguenti con l'intervallo di due posti (cioè q^6, ecc.). Finalmente stabilisce che il settimo (dopo l'unità, cioè q^6) è insieme quadrato e cubo, e così i seguenti con l'intervallo di cinque posti.

Per comprendere lo spirito di questa proposizione euclidea, occorre por mente al fatto che in essa non vengono adoperati simboli: ciò che nelle nostre notazioni appare chiaro andava invece necessariamente ricostruito da Euclide. È proprio attraverso questa proposizione, ed altre similari, che vengono *guadagnate* le proprietà delle potenze. Per esempio, il fatto che il settimo termine sia quadrato e cubo, è in relazione strettissima con la proprietà che noi esprimiamo scrivendo:

$$q^6 = (q^2)^3 = (q^3)^2$$

cioè riguarda la regola per elevare a potenza una potenza.

La IX, 9 riguarda una proporzione continuata, che parte dall'unità, e che abbia come secondo termine un numero quadrato.

Tutti gli altri termini, a partire da b, sono quadrati. Infatti, essendo la *ragione* lo stesso numero quadrato a^2, si viene a moltiplicare un numero quadrato per un numero quadrato: la IX, 9 dice appunto che detto prodotto (così come tutti i seguenti) è un numero quadrato. Si tratta cioè di quella proprietà che noi esprimiamo scrivendo:

$$a^2 \cdot a^2 = (a \cdot a)^2$$

caso particolare di:

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n$$

Nella IX, 9 si stabilisce anche la proprietà analoga per i numeri cubi. Se si ha:

$$1 : a^3 = a^3 : b \ldots..$$

il termine b, come tutti i seguenti, è un numero cubo. Va ricordato che G. Vacca osservò che nelle IX, 8, 9 Euclide si serve del principio di induzione completa (cfr. per questo l'edizione di *Euclide* di ENRIQUES, vol. II, pp. 313-317).

La IX, 10 rappresenta poi una specie di proposizione *contraria* delle IX, 8, 9: dalla negazione dell'ipotesi di dette proposizioni 8, 9 si deduce la negazione della tesi.

le unità contenute in A, per cui pure A è contenuto in B altrettante volte quante sono le unità contenute in A. Quindi A, moltiplicando sé stesso, dà come prodotto B; perciò B è un quadrato[, cioè il quadrato di A]. E poiché B, C, D stanno fra loro in proporzione continuata, e B è un quadrato, anche D è un quadrato (VIII, 22). Per la stessa ragione, pure F è un quadrato. Similmente potremo dimostrare che anche tutti i numeri tra i quali sia intercalato successivamente un posto [a partire dall'unità (cioè B, D, F ecc.)] sono quadrati. Dico ora che il quarto cominciando dall'unità, cioè D, è inoltre un cubo e così tutti i numeri tra i quali siano intercalati successivamente due posti. Infatti, poiché $U : A = B : C$, l'unità è contenuta nel numero A altrettante volte quante B è contenuto in C. Ma l'unità è contenuta nel numero A altrettante volte quante sono le unità contenute in A, per cui pure B è contenuto in C altrettante volte quante sono le unità contenute in A; quindi A moltiplicando B dà come prodotto C. Poiché dunque A moltiplicando sé stesso dà come prodotto B, e moltiplicando B dà come prodotto C, si ha che C è un cubo [$A \cdot A = B$; $A \cdot B = C$, e B è il cubo di A, per cui C è un cubo]. E poiché C, D, E, F stanno fra loro in proporzione continuata, e C è un cubo, anche F è un cubo (VIII, 23). Ma fu dimostrato che F è pure un quadrato, per cui il settimo numero [F] cominciando dall'unità è sia un cubo che un quadrato. Similmente potremo dimostrare che anche tutti i numeri tra i quali siano intercalati successivamente cinque posti sono sia cubi che quadrati. – C.D.D.

APPLICA: VIII, 22, 23.

È APPLICATA IN: IX, 9, 10, 12, 13.

PROPOSIZIONE 9.

Se quanti si voglia numeri stanno fra loro in proporzione continuata a partire dall'unità, ed il numero successivo all'unità è un quadrato, anche tutti i rimanenti saranno quadrati. E

se il numero successivo all'unità è un cubo, anche tutti i rimanenti saranno cubi.

Siano A, B, C, D, E, F quanti si voglia numeri in proporzione continuata a partire dall'unità U, sicché si abbia: $U : A = A : B = B : C = C : D = D : E = E : F$, ed il numero successivo all'unità, cioè A, sia un quadrato; dico che anche tutti i rimanenti saranno quadrati.

Che dunque il terzo numero cominciando dall'unità, cioè B, sia un quadrato e così tutti quelli tra i quali sia intercalato successivamente un posto, è stato dimostrato (IX, 8); dico che anche tutti i rimanenti sono quadrati. Infatti, poiché A, B, C stanno fra loro in proporzione continuata, ed A è un quadrato, pure C è un quadrato (VIII, 22). Di nuovo, poiché B, C, D stanno fra loro in proporzione continuata, e B è un quadrato, pure D è un quadrato (VIII, 22). Similmente potremo dimostrare che anche tutti i numeri rimanenti sono quadrati.

Ma sia adesso il caso in cui A è per ipotesi un cubo; dico che anche tutti i numeri rimanenti sono cubi.

Che dunque il quarto numero cominciando dall'unità, cioè C, sia un cubo e così tutti quelli tra i quali siano intercalati successivamente due posti, è stato dimostrato (IX, 8); dico che pure tutti i rimanenti sono cubi. Infatti, poiché $U : A = A : B$, l'unità U è contenuta in A altrettante volte quante A è contenuto in B. Ma l'unità è contenuta in A altrettante volte quante sono le unità contenute in A; quindi pure A è contenuto in B altrettante volte quante sono le unità contenute in A, per cui A moltiplicando sé stesso dà come prodotto B. Ora, A è [per ipotesi] un numero cubo. Ma se un numero cubo moltiplica sé stesso, il prodotto è un cubo (IX, 3); quindi anche B è un cubo. E poiché i quattro numeri A, B, C, D stanno fra loro in proporzione continuata, ed A è un cubo, pure D è un cubo (VIII, 23). Per la stessa ragione, anche E è un cubo, e similmente tutti i numeri rimanenti sono cubi. – C.D.D.

APPLICA: VIII, 22, 23.

È APPLICATA IN: IX, 3, 8.

PROPOSIZIONE 10.

Se quanti si voglia numeri stanno fra loro in proporzione continuata a partire dall'unità, ed il numero successivo all'unità non è un quadrato, nessun altro numero sarà un quadrato eccetto il terzo cominciando dall'unità e tutti quelli tra i quali sia intercalato successivamente un posto. E se il numero successivo all'unità non è un cubo, nessun altro numero sarà un cubo eccetto il quarto cominciando dall'unità e tutti quelli tra i quali siano intercalati successivamente due posti.

Siano A, B, C, D, E, F quanti si voglia numeri in proporzione continuata a partire dall'unità U, [cioè si abbia: $U : A = A : B = B : C = C : D = D : E = E : F$], ed il numero successivo all'unità, cioè A, non sia un quadrato; dico che nessun altro numero sarà un quadrato eccetto il terzo cominciando dall'unità[, ossia B,] e quelli tra i quali sia intercalato successivamente un posto[, cioè D, F...].

Infatti, se possibile, sia C un quadrato. Ma anche B è un quadrato (XI, 8)[, per cui B, C avrebbero fra loro il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato [a]]. Ora, $B : C = A : B$; quindi A, B avrebbero fra loro il rapporto che un numero quadrato [B] ha con un numero quadrato [C], cosicché A, B sono in tal caso numeri piani simili (VIII, 26, reciproca). Ma B è un quadrato, per cui anche A sarebbe un quadrato – il che è contro l'ipotesi. Dunque C non è un quadrato. Similmente potremo dimostrare che nessun altro numero è un quadrato eccetto il terzo cominciando dall'unità e tutti quelli tra i quali sia intercalato successivamente un posto.

Ma sia adesso il caso in cui A per ipotesi non sia un cubo. Dico che nessun altro numero sarà un cubo eccetto

a. Heiberg ritiene forse spurie le parole da noi poste fra parentesi, dato che qui l'uso di VIII, 24 apparirebbe molto più prestarsi che non quello della reciproca di VIII, 26, perché più agevole da un lato ed insieme corrispondente a quello di VIII, 25 nella seconda parte di questa stessa proposizione relativamente ai cubi (v. anche HEATH, *op. cit.*, vol. II, p. 395).

il quarto cominciando dall'unità[, ossia C,] e quelli tra i quali siano intercalati successivamente due posti[, cioè C, F...].

Infatti, se possibile, D sia un cubo. Ma pure C è un cubo: difatti C è il quarto numero cominciando dall'unità (IX, 8). Ora, $C : D = B : C$; quindi anche B avrebbe in tal caso con C il rapporto che un numero cubo ha con un numero cubo. Ma C è un numero cubo, per cui anche B sarebbe un numero cubo (VIII, 25). E poiché $U : A = A : B$, ma l'unità è contenuta in A altrettante volte quante sono le unità contenute in A, pure A è contenuto allora in B altrettante volte quante sono le unità contenute in A; quindi A, moltiplicando sé stesso, dà come prodotto B[, che si è dimostrato sarebbe un] numero cubo. Ma se un numero moltiplicando sé stesso dà per prodotto un cubo, sarà anch'esso un cubo (IX, 6). Perciò anche A sarebbe un cubo – il che è contro l'ipotesi. Dunque D non è un cubo. Similmente potremo dimostrare che nessun altro numero è un cubo eccetto il quarto cominciando dall'unità e quelli tra i quali siano intercalati successivamente due posti. – C.D.D.

APPLICA: VII, 13; VIII, 25; IX, 6, 8.

PROPOSIZIONE 11.

Se quanti si voglia numeri stanno fra loro in proporzione continuata a partire dall'unità, il minore divide il maggiore secondo uno dei numeri appartenenti a quelli che stanno in proporzione fra loro[, *ossia secondo uno degli intermedi*] [4].

Siano A, B, C, D quanti si voglia numeri in proporzione continuata a partire dall'unità U; dico che il minore dei

[4] Comincia la *preparazione* per giungere alla IX, 13, che è di grande importanza per stabilire la teoria dei *numeri perfetti*, ossia di quelli che sono uguali alla somma dei propri divisori (VII, def. 22: fra i divisori va compresa l'unità, e va naturalmente escluso il numero stesso). La regola per trovare numeri perfetti rappresenta appunto lo scopo finale del libro nono.

numeri A, B, C, D, cioè A, divide D secondo qualcuno dei numeri B, C.

Infatti, poiché l'unità U sta ad A come C sta a D, l'unità U è contenuta nel numero A altrettante volte quante C è contenuto in D; quindi, *permutando*, l'unità U è contenuta in C altrettante volte quante A è contenuto in D (VII, 15). Ma l'unità U è contenuta in C secondo le unità che sono in C, per cui pure A è contenuto in D secondo le unità che sono in C; cosicché il numero minore A divide il maggiore D secondo uno dei numeri intermedi B, C.

APPLICA: VII, 15.

È APPLICATA IN: IX, 12, 13.

COROLLARIO

Ed è evidente che lo stesso posto occupato, cominciando dall'unità, dal numero [A] che è divisore [di D], è occupato pure dal numero secondo il quale esso è divisore [di D, se] partendo dal numero diviso[, cioè da D, si procede] nella direzione dei numeri ad esso antecedenti. – C.D.D.

e viene contenuta nell'ultima proposizione (IX, 36) di detto libro. E nella IX, 36 viene appunto applicata la IX, 13.

La IX, 11 considera una proporzione continuata che parte dall'unità:

$$1 : a = a : b = b : c = c : d = d : e = \ldots..$$

ossia, rappresentandola come progressione geometrica:

$$1 \cdot a \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot a^4 \cdot a^5 \ldots..$$

E la proposizione afferma che il termine minore (cioè il secondo, ossia a) divide il maggiore (cioè l'ultimo, a^5) secondo un numero intermedio, che il corollario della stessa IX, 11 precisa essere quello che ha dall'ultimo (a^5) distanza uguale alla distanza del primo (a) dall'unità: cioè $a \cdot a^4 = a^5$.

Se si considera ora la proporzione continuata:

$$1 \cdot a^2 \cdot a^4 \cdot a^6 \ldots..$$

si ricava che:

$$a^2 \cdot a^4 = a^6$$

ossia si tratta della proprietà fondamentale delle potenze (somma degli esponenti per avere il prodotto di due potenze di ugual base) sia pure su un caso particolare.

PROPOSIZIONE 12.

Se quanti si voglia numeri stanno fra loro in proporzione continuata a partire dall'unità, tutti i numeri primi che dividono l'ultimo dividono anche il numero più vicino all'unità[5].

Siano A, B, C, D quanti si voglia numeri in proporzione [continuata] fra loro a partire dall'unità; dico che da quanti numeri primi è diviso D, dagli stessi sarà diviso anche A.

Infatti, sia diviso D da un numero primo p; dico che p divide A. Supponiamo difatti che non lo divida: ora, p è

[5] Ancora una proporzione continuata che parte dall'unità. Si considera l'ultimo termine: tutti i divisori primi di questo sono divisori anche del termine più vicino all'unità, ossia della ragione.

Cioè, essendo:

$$1 : q = q : q^2 = q^2 : q^3 = \ldots\ldots$$

tutti i divisori primi di q^3 (o comunque dell'ultimo termine) sono anche divisori di q.

Questa proposizione IX, 12 viene citata da G. SACCHERI (1667-1733) nella sua opera *Logica demonstrativa* per il fatto che in essa viene adoperato un tipo particolare di ragionamento mediante il quale *anche assumendo come ipotesi la falsità della proposizione che si vuol dimostrare, si giunge ugualmente a concludere che essa è vera* (cfr. G. VAILATI: *Di un'opera dimenticata del P. Gerolamo Saccheri*, « Rivista filosofica », 1903: n. 109 degli *Scritti* di G. VAILATI, Lipsia-Firenze, 1911, pp. 477-484, citato anche in: R. BONOLA, *La geometria non euclidea: esposizione storico-critica del suo sviluppo*; Bologna, Zanichelli, 1906, p. 20). L'idea che il Saccheri sviluppa nella sua più celebre opera: *Euclides ad omni naevo vindicatus* (Milano, 1733), è appunto di quel genere: ammesse le prime ventisei proposizioni (sono escluse anche le due prime sulle parallele) del libro primo di Euclide, egli formula l'ipotesi che il quinto postulato sia *falso*, e da questo insieme di ammissioni egli cerca come conseguenza l'affermazione della validità del postulato stesso.

Sicché il primo notevole passo, dovuto al Saccheri, per la fondazione delle geometrie non-euclidee trae la sua prima origine proprio nell'esame approfondito di una proposizione di Euclide.

Entrando nel merito della questione, va osservato che nella IX, 12 viene eseguita la dimostrazione con una specie di metodo di riduzione all'assurdo, ma in modo diverso da quello consueto.

Di solito, dopo aver negato la tesi, si fa vedere che come conseguenza di tale negazione si giunge ad una conclusione che è contraddittoria rispetto all'ipotesi. Nella IX, 12, invece, volendo dimostrare che un certo numero X divide un certo altronumero Y, si parte dalla negazione di tal fatto, e come conseguenza si trova proprio la negazione di detta negazione, ossia l'affermazione che X divide Y. Di qui l'assurdo della negazione stessa.

primo, ed ogni numero primo è primo rispetto ad ogni altro numero, di cui non sia divisore (VII, 29); perciò p, A sarebbero primi fra loro. E poiché p divide D, lo divida secondo il quoziente m[, cioè sia: $D = pm$]; quindi p, moltiplicando m, dia come prodotto D. Di nuovo, poiché A divide D secondo le unità che sono in C (IX, 11 e coroll.), si ha che A moltiplicando C dà come prodotto D. Ma anche p tuttavia, moltiplicando m, ha prodotto D, per cui il prodotto di A per C[, cioè AC,] è uguale al prodotto di p per m[, cioè pm]. Quindi $A : p = m : C$ (VII, 19). Ma A, p sono [supposti] primi fra loro, e i numeri primi sono anche i più piccoli fra tutti quelli aventi tra loro a due a due lo stesso rapporto (VII, 21), ed i numeri più piccoli possibile sono equisottomultipli di quanti abbiano tra loro a due a due lo stesso rapporto (VII, 20), l'antecedente[, cioè A,] dividendo l'antecedente [m] ed il conseguente [p] dividendo il conseguente [C]; dunque p divide C. Lo divida secondo il quoziente n; quindi p, moltiplicando n, dà come prodotto C[, cioè sia: $C = pn$] (IX, 11 e coroll.). Perciò il prodotto di A per B sarebbe uguale al prodotto di p per n[, ossia $AB = pn$]. Quindi, in tal caso, si avrebbe che $A : p = n : B$ (VII, 19). Ma A, p sono primi fra loro, e i numeri primi tra loro sono anche i più piccoli fra tutti quelli aventi a due a due lo stesso rapporto (VII, 21), ed i numeri più piccoli possibile sono equisottomultipli di quanti abbiano tra loro a due a due lo stesso rapporto (VII, 20), l'antecedente [A] dividendo l'antecedente [n] ed il conseguente [p] dividendo il conseguente [B]; dunque p divide B. Lo divida secondo il quoziente q; quindi p, moltiplicando q, dà come prodotto B[, ossia $B = pq$]. Ma pure A tuttavia, moltiplicando sé stesso, dà come prodotto B [$A^2 = B$] (IX, 8), per cui il prodotto di p per q sarebbe uguale al quadrato di A [$A^2 = pq$]. Quindi, in tal caso, si avrebbe: $p : A = A : q$ (VII, 19). Ma A, p sono primi fra loro, e i numeri primi tra loro sono anche i più piccoli fra tutti quelli aventi tra loro a due a due lo stesso rapporto (VII, 21), ed i numeri più piccoli possibile sono equisottomultipli di quanti abbiano tra loro a due a due lo stesso rapporto (VII, 20), l'antece-

dente [*p*] dividendo l'antecedente [*A*] ed il conseguente [*A*] dividendo il conseguente [*q*], per cui *p* dividerebbe in tal caso *A*, dato che antecedente divide antecedente. Ma anche, tuttavia, non lo dividerebbe[, poiché così si è supposto]: il che è impossibile. Perciò *p*, *A* non sono primi fra loro. Sono quindi numeri composti. Ma numeri composti sono divisi da un qualche altro numero (VII, def. XIV). E poiché *p* è primo per ipotesi, ma un numero primo non è diviso da nessun altro numero tranne che da sé stesso (VII, def. XI), si ha che *p* divide *A*, *p*, cosicché *p* divide *A*. [Ma divide anche *D*, per cui *p* divide *A*, *D*.][a] Similmente potremo dimostrare che da quanti numeri primi sia diviso *D*, dagli stessi sarà diviso anche *A*. – C.D.D.

APPLICA: VII, 19, 20, 21, 29; IX, 8, 11.

È APPLICATA IN: IX, 13.

PROPOSIZIONE 13.

Se quanti si voglia numeri stanno fra loro in proporzione continuata a partire dall'unità, e quello più vicino all'unità è primo, il numero più grande [fra quelli dati] non sarà diviso da nessun altro numero eccetto che da quelli che lo precedono [6].

Siano *A*, *B*, *C*, *D* quanti si voglia numeri in proporzione continuata a partire dall'unità, e quello successivo all'unità,

a. Heiberg, rilevando che nell'esposizione Euclide si era assegnato a tesi da dimostrare che *p* divide *A*, il che si termina di dimostrare con le parole « cosicché *p* divide *A* », ritiene, di conseguenza, le parole poste in parentesi come non necessarie e forse interpolate.

[6] È, questa IX, 13, una proposizione (s'è già detto) assai importante, poiché su di essa si fonda l'ultima proposizione (36) del libro nono, che introduce una regola per trovare *numeri perfetti*.

Appunto alcune proposizioni precedenti (IX, 11, 12 e anche 8) sono state da Euclide orientate verso questa IX, 13.

Viene, nella IX, 13, considerata una proporzione continuata partente

cioè A, sia primo; dico che il numero maggiore fra essi, cioè D, non sarà diviso da nessun altro numero eccetto che da A, B, C.

Infatti, se possibile, sia diviso D da un numero E, ed E non sia uguale a nessuno dei numeri A, B, C. È allora evidente che E non è primo. Se difatti E fosse primo e dividesse D, dividerebbe anche A (IX, 12), che [per ipotesi] è primo, pur non essendo uguale ad A: il che è impossibile. Perciò E non è primo. Quindi è un numero composto. Ma ogni numero composto ha per divisore un numero primo (VII, 31), per cui E è diviso da un numero primo. Dico adesso che non sarà diviso da alcun altro numero primo eccetto che da A. Infatti, se E fosse diviso da un altro numero [primo F], quel numero [primo F], poiché E divide D, dividerebbe anche D; cosicché esso, pur non essendo uguale ad A, dividerebbe anche A, che è primo [per ipotesi]: il che è impossibile. È quindi A che divide E. [*Da questo punto in poi è stato riassunto il testo della IX, 13 ad opera del curatore Attilio Frajese in quanto dice d'essenziale, non riportandosi integralmente il medesimo per la prolissità ripetitoria che può confondere*]. Si è trovato dunque che la negazione della tesi, cioè la supposizione che, se possibile, D ammetta un divisore E diverso da A, B, C, porta alla conseguenza che un tal numero E non è primo, e che esso ammette come unico divisore primo il numero A.

Sia ora $D = EF$, cioè D contenga F volte il suo supposto divisore E. Si ripete per F dimostrazione analoga a

dall'unità, e avente per ragione (cioè per secondo termine) un numero primo. Ossia:

$$1 : a = a : b = b : c = c : d$$

dove a è numero primo.

Sappiamo che la proporzione continuata di cui si tratta è una progressione geometrica avente come termini le successive potenze di a ossia è

$$1 \cdot a \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot a^4$$

La IX, 13 afferma che l'ultimo termine ($d = a^4$) ammette come divisori esclusivamente i termini ad esso precedenti, ossia (nel nostro caso): a; $b = a^2$; $c = a^3$, e soltanto essi.

Il teorema viene dimostrato col metodo di riduzione all'assurdo.

quella fatta per E, e si trova che F non può esser primo, che deve essere diverso da A, B, C e che ammette A come unico divisore primo: inoltre si trova che F divide C.

Sia dunque: $C = FH$. Si dimostra, in modo simile, che H non è primo, che è diverso da A, B, C, che ammette A come unico divisore primo, e che divide B.

Dunque: E divide D, F divide C, H divide B.

Con un altro passo: $B = HK$ si trova un numero K che, pur essendo diverso da A, dividerebbe il numero primo A, il che è assurdo. È quindi impossibile che D ammetta un divisore E diverso da A, B, C. – C.D.D.

APPLICA: VII, 19, 31; IX, 8, 11, 12.

È APPLICATA IN: IX, 32, 36.

PROPOSIZIONE 14.

Se un numero che sia il più piccolo possibile è diviso da certi numeri primi, esso non sarà diviso da nessun altro numero eccetto quelli che inizialmente ne siano divisori[*, ossia il minimo comune multiplo di più numeri primi non ha altri divisori primi oltre agli stessi numeri primi dati*].

Infatti, il numero A sia il minimo comune multiplo dei numeri primi B, C, D; dico che A non sarà diviso da nessun altro numero eccetto che da B, C, D.

Se fosse possibile, difatti, venga diviso dal numero primo E, ed E non sia uguale a nessuno dei numeri B, C, D. Ora, poiché E divide A, lo divida secondo il quoziente F; quindi E, moltiplicando F, darebbe come prodotto A[, cioè $EF = A$]. Ed A è [per ipotesi] diviso dai numeri primi B, C, D. Ma se due numeri si moltiplicano fra loro, ed un altro numero, che sia primo, divide il loro prodotto, esso dividerà anche uno dei numeri presi inizialmente[, cioè uno dei fattori] (VII, 30), per cui B, C, D divideranno uno dei numeri E, F. Ma essi non possono dividere E: difatti E è primo e non è uguale a nessuno dei numeri B, C, D. Perciò essi dividerebbero F, che è minore di A [– difatti $EF = A$]: il che

è impossibile. Infatti *A* è per ipotesi il numero più piccolo che sia diviso da *B*, *C*, *D*[, ossia è il minimo comune multiplo di *B*, *C*, *D*]. Dunque, nessun numero primo eccetto *B*, *C*, *D* può dividere *A*. – C.D.D.

APPLICA: VII, 30.

PROPOSIZIONE 15.

Se tre numeri in proporzione continuata fra loro sono i più piccoli possibile fra quanti abbiano tra loro a due a due lo stesso rapporto, due qualsivoglia di essi, se sommati, dànno per risultato un numero che è primo[a] *rispetto a quello che rimane* [*dei tre*].

Siano *A*, *B*, *C* tre numeri in proporzione continuata fra loro e che siano i più piccoli possibili fra quanti abbiano tra loro a due a due lo stesso rapporto; dico che due qualunque dei numeri *A*, *B*, *C*, se sommati, dànno per risultato un numero che è primo rispetto a quello che rimane dei tre, cioè che la somma di *A*, *B* è prima rispetto a *C*, quella di *B*, *C* è prima rispetto ad *A*, ed infine quella di *A*, *C* è prima rispetto a *B*.

Infatti, si prendano i due numeri *D*, *E*, che siano i più piccoli possibile fra quanti abbiano tra loro a due a due lo stesso rapporto che fra loro hanno *A*, *B*, *C* (VIII, 2). È allora evidente che *D*, moltiplicando sé stesso, dà come prodotto *A*, mentre moltiplicando *E* dà come prodotto *B*, e che infine *E*, moltiplicando sé stesso, dà come prodotto *C* [$A = D^2$; $B = DE$; $C = E^2$] (VIII, 2, coroll.). Ora, poiché *D*, *E* sono numeri minimi [ad avere un dato rapporto], sono primi fra loro (VII, 22). Ma se due numeri sono primi fra loro, anche la loro somma dà per risultato un numero primo rispetto a ciascuno dei due (VII, 28); perciò anche il numero $D + E$ è primo rispetto a ciascuno dei due numeri

a. Letteralmente: due qualsivoglia di essi, se sommati, sono primi.

D, E. Ma pure D, tuttavia, è primo rispetto ad E; quindi $D + E$, D sono primi rispetto ad E. Ma se due numeri sono primi rispetto ad un altro, anche il loro prodotto è primo rispetto a quel numero (VII, 24), cosicché il prodotto $(D + E)D$ è primo rispetto ad E, e di conseguenza è primo anche rispetto al quadrato di E[, ossia rispetto ad E^2] (VII, 25). Ma il prodotto $(D + E)D$ è la somma del quadrato di D e del prodotto ED [$D^2 + ED$] (II, 3); la somma del quadrato di D e del prodotto ED è perciò un numero primo rispetto al quadrato E^2 di E. Ora, $D^2 = A$; $ED = B$; $E^2 = C$[, come si è sopra veduto (VIII, 2, coroll.)]; quindi la somma di A, B [$A + B = D^2 + ED$] è un numero primo rispetto a $C = E^2$. Similmente potremo dimostrare che pure la somma di B, C dà per risultato un numero primo rispetto ad A. Dico adesso che anche la somma di A, C è un numero primo rispetto a B. Infatti, poiché $D + E$ è primo rispetto a ciascuno dei due numeri D, E, pure il quadrato di $D + E$ è primo rispetto al prodotto DE (VII, 24, 25). Ma al quadrato di $D + E$ è uguale la somma dei quadrati di D, E e del doppio del prodotto DE [$(D + E)^2 = D^2 + E^2 + 2DE$] (II, 4); anche la somma $D^2 + E^2 + 2DE$ è perciò un numero primo rispetto al prodotto DE. Sottraendo allora, la somma $D^2 + E^2 + DE$ è un numero primo rispetto al prodotto DE. Quindi, ancora sottraendo, la somma $D^2 + E^2$ è un numero primo rispetto al prodotto DE. Ma $D^2 = A$, $DE = B$, $E^2 = C$. Dunque, la somma $A + C$ è un numero primo rispetto a B. - C.D.D.

APPLICA: II, 3, 4; VII, 22, 24, 25, 28; VIII, 2.

PROPOSIZIONE 16.

Se due numeri sono primi fra loro, non è possibile che il primo stia al secondo come il secondo sta ad un terzo [a][, *cioè:*

a. Letteralmente: ad un qualche altro.

non esiste un numero terzo proporzionale dopo due numeri primi tra loro].

Infatti, i due numeri A, B siano primi fra loro; dico che A non può stare a B come B sta ad un terzo numero.

Se fosse possibile, difatti, si abbia: $A : B = B : C$. Ma A, B sono primi fra loro, e i numeri primi sono anche i più piccoli fra tutti quelli aventi tra loro a due a due lo stesso rapporto (VII, 21), ed i numeri più piccoli possibile sono equisottomultipli di quanti abbiano tra loro a due a due lo stesso rapporto (VII, 20), l'antecedente[, in questo caso A,] dividendo l'antecedente [B] ed il conseguente [B] dividendo il conseguente [C]; quindi A divide in tal caso B, dato che antecedente divide antecedente. Ma A divide anche sé stesso, per cui A dividerebbe i numeri A, B, che sono primi fra loro: il che è assurdo. Dunque A non può stare a B come B sta a C. - C.D.D.

APPLICA: VII, 20, 21.

È APPLICATA IN: IX, 18.

PROPOSIZIONE 17.

Se si dànno quanti si voglia numeri in proporzione continuata fra loro, ed i loro estremi sono primi fra loro, non è possibile che il primo stia al secondo come l'ultimo sta ad un altro numero[, *ossia non esiste un numero quarto proporzionale dopo il primo, il secondo e l'ultimo*].

Siano A, B, C, D quanti si voglia numeri in proporzione continuata fra loro, e gli estremi A, D siano fra loro primi; dico che non può darsi che A stia a B come D sta ad un altro numero.

Infatti, se possibile, si abbia: $A : B = D : E$; quindi, *permutando*: $A : D = B : E$ (VII, 13). Ma A, D sono primi fra loro, e i numeri primi sono anche i più piccoli fra tutti quelli aventi tra loro a due a due lo stesso rapporto (VII, 21), ed i numeri più piccoli possibile sono equisottomultipli di quanti abbiano tra loro a due a due lo stesso rapporto

Geometri e agrimensori in discussione

(Roma, Biblioteca Vaticana, Cod. Vat. Pal. Lat. 1564, f. 2, sec. IX).

(VII, 20), l'antecedente[, qui A,] dividendo l'antecedente [B] ed il conseguente [D] dividendo il conseguente [E]. Perciò A divide B. Ma si ha [per ipotesi]: $A : B = B : C$. Quindi anche B divide C, cosicché pure A divide C. Ora, poiché [per ipotesi] $B : C = C : D$, e B divide C, anche C divide D. Ma A divideva C, cosicché A dividerebbe pure D. Ma A divide anche sé stesso. Perciò A dividerebbe A, D, che sono numeri primi fra loro: il che è impossibile. Dunque, non può darsi che A stia a B come D sta ad un altro numero. – C.D.D.

APPLICA: VII, 13, 20, 21.

È APPLICATA IN: IX, 19.

PROPOSIZIONE 18.

Dati due numeri, cercare se sia possibile trovarne un altro che sia terzo proporzionale [*dopo di essi*] [7].

Siano A, B i due numeri dati, e si debba cercare se sia possibile trovarne un altro che sia terzo proporzionale dopo di essi.

[7] Nella IX, 18 e nella IX, 19 si ricerca a quali condizioni debbano soddisfare rispettivamente due o tre numeri (interi), perché sia possibile trovare il terzo (o rispettivamente il quarto) proporzionale intero dopo di essi.

Per il primo problema, la soluzione viene da Euclide trovata in modo assai semplice. Se due numeri a, b sono primi tra loro non esiste il terzo proporzionale dopo di essi. Se non sono primi tra loro si ha il terzo proporzionale se (e soltanto se) il primo numero a divide il quadrato b^2 del secondo numero b.

Esempio numerico: $a = 4$; $b = 6$. Il primo numero, 4, divide il quadrato 36 del secondo numero, e il terzo proporzionale è 9: infatti:

$$4 : 6 = 6 : 9$$

Per il secondo problema (esistenza del numero intero quarto proporzionale dopo tre numeri dati) Euclide distingue quattro casi, come si vede nel testo.

Ma si presenta un fatto singolare, davvero unico in tutti gli *Elementi*. Nel distinguere quattro casi possibili, e nel trattare uno di essi, Euclide *sbaglia*, e giunge a conclusioni errate! Si tratta del caso in cui i tre numeri

Ora, A, B o sono primi fra loro o non lo sono. Ma se sono primi fra loro, è stato dimostrato che è impossibile trovare un altro numero che sia terzo proporzionale dopo di essi (IX, 16).

Sia adesso invece il caso in cui A, B per ipotesi non siano primi fra loro, e B moltiplicando sé stesso dia il quadrato B^2. Ora, o A divide B^2, o non lo divide. Lo divida, dapprima, secondo il quoziente C, per cui A, moltiplicando C, dà come prodotto B^2. Ma pure B tuttavia, moltiplicando sé stesso, dà come prodotto B^2; perciò il prodotto di A per C è uguale al quadrato di B[, ossia: $AC = B^2$]. Quindi A sta a B come B sta a C [$A : B = B : C$] (VII, 19); è stato dunque trovato un numero C che è terzo proporzionale dopo A, B.

Sia adesso invece il caso in cui A per ipotesi non divide B^2; dico che è impossibile trovare un numero che sia terzo proporzionale dopo A, B. Infatti, se possibile, si sia trovato [che è tale] C. Quindi il prodotto di A per C sarebbe uguale al quadrato di B (VII, 19). Cosicché A, moltiplicando C, darebbe come prodotto B^2 [$AC = B^2$]. Perciò A dividerebbe B^2 secondo il quoziente C. Ma [si è supposto] tuttavia [che] anche non lo divide: il che è assurdo. Dunque non si può trovare un numero che sia terzo proporzionale dopo A, B, quando A non divida B^2. - C.D.D.

APPLICA: VII, 19; IX, 16.

dati a, b, c, non sono in proporzione continua ed a, c sono primi tra loro. Euclide giunge all'errata conclusione che non esiste, in tal caso, il quarto proporzionale. Invece esso può esistere: basta che b sia divisibile per a. Infatti, dovendo essere: $a : b = c : x$ si ha: $x = \frac{bc}{a}$ e, pur essendo primi tra loro a, c, basta che b sia divisibile per a perché x sia intero.

Esempio: $5 : 15 = 7 : x$ Qui $x = 21$.

Possiamo concludere adattando al nostro caso quel che il vecchio Orazio dice di Omero in un celebre verso dell'*Arte poetica*:

... quandoque bonus dormitat... Euclides.

Euclide ha invero *sonnecchiato*, ossia ha avuto un attimo di disattenzione: non ha certo sbagliato per imperizia! Heiberg «non osando» confermare che Euclide abbia commesso un tale errore, ne attribuisce la colpa a redattori o copisti posteriori.

PROPOSIZIONE 19.

Dati tre numeri, cercare quando sia possibile trovarne un altro che sia quarto proporzionale dopo di essi.

Siano A, B, C i tre numeri dati, e si debba cercare quando sia possibile trovarne un altro che sia quarto proporzionale dopo di essi.

Ora, o essi non stanno fra loro in proporzione continua, ma gli estremi sono primi fra loro, o stanno fra loro in proporzione continua, ma gli estremi non sono primi fra loro, oppure essi non stanno fra loro in proporzione continua, e gli estremi non sono primi fra loro, o stanno fra loro in proporzione continua, e gli estremi sono primi fra loro.

Se dunque A, B, C stanno fra loro in proporzione continua, e gli estremi A, C sono primi fra loro, è stato dimostrato che è impossibile trovare un numero che sia quarto proporzionale dopo A, B, C (IX, 17). Sia adesso invece il caso in cui A, B, C per ipotesi non stiano fra loro in proporzione continua, ma gli estremi siano di nuovo primi fra loro. Dico che, pure in questo caso, è impossibile trovare un numero quarto proporzionale dopo A, B, C. Infatti, se possibile, si sia trovato esser tale D, cosicché si abbia: $A : B = C : D$, e venga [pure] a darsi: $B : C = D : E$[, cioè esista un quarto proporzionale E dopo B, C, D]. Ora, poiché $A : B = C : D$, e $B : C = D : E$, si ha, *ex aequo*, che $A : C = C : E$ (VII, 14). Ma A, C sono [per ipotesi] primi fra loro, e i numeri primi sono anche i più piccoli fra tutti quelli aventi tra loro a due a due lo stesso rapporto (VII, 21), ed i numeri più piccoli possibile sono equisottomultipli di quanti abbiano tra loro a due a due lo stesso rapporto (VII, 20), l'antecedente[, qui A,] dividendo l'antecedente [C] ed il conseguente [C] dividendo il conseguente [E]. Quindi A divide C, dato che antecedente divide antecedente. Ma A divide anche sé stesso, per cui A dividerebbe A, C che sono primi fra loro: il che è impossibile. Dunque, non si può trovare un numero che sia quarto proporzionale dopo A, B, C. [*La conclusione è errata: cfr. nota 7*].

Di nuovo, sia adesso il caso in cui A, B, C per ipotesi stiano fra loro in proporzione continuata, ma A, C non siano primi fra loro. Dico che è possibile trovare un numero quarto proporzionale dopo A, B, C. Infatti B, moltiplicando C, dia per prodotto il numero D[, cioè $D = BC$]; quindi A o divide D o non lo divide. Lo divida, dapprima, secondo il quoziente E; perciò A moltiplicando E dà come prodotto D[, cioè $AE = D$]. Ma pure B tuttavia, moltiplicando C, dà come prodotto D [$BC = D$], per cui il prodotto di A per E è uguale al prodotto di B per C [$AE = BC$]; si ha quindi la proporzione: $A : B = C : E$ (VII, 19), e dunque si è trovato E quarto proporzionale dopo A, B, C.

Sia adesso invece il caso in cui A per ipotesi non divide D; dico che è impossibile trovare un numero quarto proporzionale dopo A, B, C. Infatti, se possibile, si sia trovato esser tale E[, in modo che si abbia: $A : B = C : E$]; il prodotto di A per E è così uguale a quello di B per C [$AE = BC$] (VII, 19). Ma $BC = D$, per cui anche $AE = D$. Quindi A moltiplicando E dà come prodotto D, e perciò A divide D secondo il quoziente E; cosicché A dividerebbe D. Ma anche[, come si è supposto,] non lo divide: il che è assurdo. Non è quindi possibile trovare [nelle ipotesi fatte] un numero che sia quarto proporzionale dopo A, B, C, quando A non divida D. Sia adesso invece il caso in cui A, B, C non stiano per ipotesi in proporzione continuata fra loro, né gli estremi siano primi fra loro. Ora, B moltiplicando C dia per prodotto il numero D[, cioè sia $BC = D$]. Similmente si potrà dimostrare che, se A divide D, è possibile trovare un numero quarto proporzionale dopo A, B, C, e che, se al contrario A non divide D, è impossibile ritrovarlo. – C.D.D.

APPLICA: VII, 14, 20, 21; IX, 17.

PROPOSIZIONE 20.

Esistono [sempre] numeri primi in numero maggiore di quanti numeri primi si voglia proporre [a] [– *cioè: La serie dei numeri primi è illimitata*] [8].

Siano A, B, C i numeri primi proposti; dico che esistono numeri primi in maggior numero che A, B, C[, cioè che ne esiste almeno un altro, oltre ad A, B, C].

Infatti, si prenda il minimo comune multiplo di A, B, C (VII, 36), e sia esso K; si aggiunga a K l'unità U. Ora, il numero $K + U$ o è primo o non lo è. Dapprima, sia un numero primo; si sono dunque trovati i numeri primi A, B, C, $K + U$ che sono in maggior numero che A, B, C.

a. Letteralmente: « I numeri primi sono di più che ogni proposto numero complessivo (il solito τὸ πλῆθος), *o* proposta pluralità, di numeri primi »; così, anche alla fine del teorema, avremo: « si sono rinvenuti più numeri primi, cioè A, B, C, G, che il proposto numero complessivo, *o* come sopra, di A, B, C ».

[8] Questa IX, 20 è una delle più celebri proposizioni degli *Elementi*: tutti sanno che Euclide dimostrò che la serie dei numeri primi è infinita. Come nel suo stile (e nello stile di Eudosso di Cnido) Euclide non introduce direttamente l'*infinità* del numero dei numeri primi. Si tratta soltanto dell'infinità intesa in senso potenziale: qualunque insieme di numeri primi ci piaccia di fissare esiste sempre almeno un altro numero primo non compreso nell'insieme: cioè i numeri primi sono sempre *di più* di qualunque quantità prefissata di numeri primi.

La classica dimostrazione è la seguente.

Sian dati i numeri primi a, b, c. Dico che esiste almeno un quarto numero primo.

Per raggiungere lo scopo si moltiplicano tra loro i tre numeri dati e si aggiunge una unità: si ottiene così il numero:

$$d = abc + 1$$

Se d è primo, è stata dimostrata l'esistenza di un quarto numero primo. Se d non è primo, esso ammette un divisore primo (VII, 31): sia questo il numero h. Dico che h è diverso da a, b, c, e quindi che esso costituisce il quarto numero primo del quale si voleva appunto dimostrare l'esistenza.

Se, infatti, il numero h fosse uguale ad uno dei tre numeri a, b, c, esso dividerebbe il prodotto abc. Ma s'è supposto che il numero h divida anche $d = abc + 1$, quindi h dividerebbe pure la differenza tra $(abc + 1)$ e abc, ossia l'unità: cosa assurda (ἄτοπον).

Ma sia adesso il caso in cui, per ipotesi, $K + U$ non è primo, per cui esso è diviso da un numero primo (VII, 31). Sia diviso dal numero primo D; dico che D non è uguale a nessuno dei numeri A, B, C. Infatti, se possibile, sia uguale [a qualcuno di essi]. Ma A, B, C dividono K; perciò anche D dividerebbe K. Ma D divide pure $K + U$; ossia D dividerebbe, pur essendo un numero, anche l'unità U che rimane di $K + U$[, ossia dividerebbe anche la differenza fra i due numeri consecutivi $K + U$ e K, vale a dire, pur essendo un numero, dividerebbe l'unità U]: il che è assurdo. Quindi D non è uguale a nessuno dei numeri A, B, C. Ed è, per ipotesi, primo.

Dunque, si sono trovati numeri primi, cioè A, B, C, D, più numerosi di quanti numeri primi si siano proposti, cioè A, B, C. – C.D.D.

APPLICA: VII, 31.

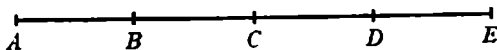
PROPOSIZIONE 21.

Se si sommano quanti si voglia numeri pari, il totale è pari [9].

Infatti, si sommino quanti si voglia numeri pari AB, BC, CD, DE; dico che il totale AE è pari.

[9] Comincia con la IX, 21 un gruppo di semplicissime proposizioni (21-34) riguardanti la distinzione tra numeri pari e numeri dispari. Si giunge così, nelle tre ultime, 32-34, a stabilire che le potenze di 2 sono numeri soltanto parimente pari: che il doppio di un numero dispari è soltanto parimente dispari, e finalmente che un numero (va inteso che sia *pari*) che non sia né una potenza di 2 né sia il doppio di un numero dispari, è al tempo stesso parimente pari e parimente dispari. Per esempio il numero 20 è in tali ultime condizioni: infatti non è potenza di 2 e la sua metà non è un numero dispari. E infatti un numero come 20 è parimente pari (perché diviso dal numero pari 2 dà il quoziente pari 10) ed è pure parimente dispari (perché, diviso dal numero pari 4, dà il quoziente dispari 5).

Delle proposizioni IX, 21-34 si è occupato Oskar Becker (*Die Lehre von Geraden und Ungeraden im neunten Buch der Euklidischen Elemente*, in «Quellen u. Studien z. Gesch. d. Math.», Studien, Bd 3, S. 533-553, Berlin, Springer, 1934), il quale ritiene in definitiva che si tratti di un

Poiché difatti ciascuno dei numeri *AB*, *BC*, *CD*, *DE* è pari, ognuno di essi è divisibile per metà[a] (VII, def. VI), cosicché anche il totale *AE* è divisibile per metà. Ma numero pari è quello che è divisibile per metà (id.); dunque *AE* è pari. – C.D.D.

È APPLICATA IN: IX, 22, 23, 28.

PROPOSIZIONE 22.

Se si sommano quanti si voglia numeri dispari, ed il numero di essi è complessivamente pari, [*cioè se si somma un numero pari di numeri dispari,*] *il totale sarà pari.*

Infatti, si sommino i numeri dispari quanti si voglia, ma che siano complessivamente in numero pari [– quattro nell'esempio], *AB*, *BC*, *CD*, *DE*; dico che il totale *AE* è pari.

a. Letteralmente: « ha una metà », o, meglio, una mezza parte, una parte mediana; ciò vale pure per *il totale AE* successivo, mentre del « numero pari » si dice che è δίχα διαιρούμενος, *divisibile per metà*, secondo la def. VI del libro VII.

riferimento ad un primo gradino dello sviluppo dell'aritmetica greca (*Altpythagoreische Stufe*) corrispondente all'antica scuola pitagorica.

Osserviamo che le proposizioni IX, 21-34 non trovano applicazione nel séguito degli *Elementi*, fatta eccezione per la IX, 24 e la IX, 26 che vengono usate per un lemma alla proposizione 29 del libro decimo. Ma quest'applicazione non ha alcun valore, dato il carattere speciale dei lemmi del libro decimo.

E come abbiamo detto nell'introduzione generale, tutte le volte che una proposizione degli *Elementi* è inutile, va ricercata la causa particolare che ha indotto Euclide a introdurla. E di carattere storico sarebbe dunque il motivo dell'introduzione delle proposizioni IX, 21-34: una rievocazione della più antica aritmetica pitagorica *del pari e del dispari*, secondo la locuzione cara a Platone.

Ci sembra quindi ben valida l'ipotesi del Becker, il quale appunto osserva che *dal punto di vista del lettore moderno* (cioè al di fuori di ogni considerazione di carattere storico) *è inspiegabile come queste cose estremamente semplici* (cioè le proposizioni IX, 21-34) *compaiano alla fine di una teoria sviluppata ad alto livello* (quale è quella precedentemente trattata nei tre libri aritmetici). Cfr. anche (per un probabile *ricordo pitagorico*) la nota alla prima definizione del libro primo (la definizione del *punto*).

Poiché difatti ciascuno dei numeri *AB*, *BC*, *CD*, *DE* è dispari, qualora si sottragga un'unità da ciascuno di essi, ognuno dei resti sarà pari (VII, def. VII); cosicché sarà pari anche il numero risultante dalla loro somma (IX, 21). Ma pure il numero delle unità [sottratte] è pari. Dunque anche il totale *AE* è pari (IX, 21). – C.D.D.

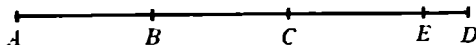
APPLICA: IX, 21.

È APPLICATA IN: IX, 23.

PROPOSIZIONE 23.

Se si somma un numero dispari di numeri dispari, pure il totale sarà dispari.

Infatti, si sommino i numeri dispari *AB*, *BC*, *CD*, che siano in numero dispari [– tre nell'esempio]; dico che il totale *AD* è dispari.

Si sottragga da *CD* l'unità *DE*; quindi il resto *CE* è pari (VII, def. VII). Ma pure *CA* è pari (IX, 22); perciò anche il totale *AE* è pari (IX, 21). Ma *DE* è un'unità. Dunque *AD* è dispari (VII, def. VII). – C.D.D.

APPLICA: IX, 21, 22.

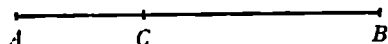
È APPLICATA IN: IX, 29, 30.

PROPOSIZIONE 24.

Se da un numero pari si sottrae un numero pari, la differenza sarà pari.

Infatti, dal numero pari *AB* si sottragga il numero pari *BC*; dico che il resto *AC* è pari.

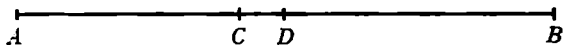
Poiché difatti *AB* è pari, esso è divisibile per metà (VII, def. VI). Per la stessa ragione, pure *BC* è divisibile per

metà; cosicché la differenza [AC è divisibile per metà; dunque] AC è pari. - C.D.D.

È APPLICATA IN: IX, 25, 26. 27, e in X (lemma a X, 29),

PROPOSIZIONE 25.

Se da un numero pari si sottrae un numero dispari, la differenza sarà dispari.

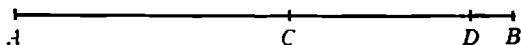
Infatti, dal numero pari AB si sottragga il numero dispari BC; dico che la differenza AC è dispari.

Si sottragga difatti da BC l'unità CD; quindi DB è pari (VII, def. VII). Ma pure AB è pari; perciò anche la differenza AD è pari (IX, 24). Ma CD è un'unità; dunque CA è dispari (VII, def. VII). - C.D.D.

APPLICA: IX, 24.

PROPOSIZIONE 26.

Se da un numero dispari si sottrae un numero dispari, la differenza sarà pari.

Infatti, dal numero dispari AB si sottragga il numero dispari BC; dico che il resto CA è pari.

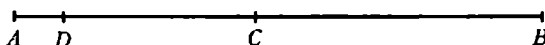
Poiché difatti AB è dispari, se ne sottragga l'unità BD; quindi la differenza AD è pari (VII, def. VII). Per la stessa ragione, pure CD è pari (id.); cosicché è pari anche la differenza AC (IX, 24). - C.D.D.

APPLICA: IX, 24.

È APPLICATA NEL LEMMA A: X, 29.

PROPOSIZIONE 27.

Se da un numero dispari si sottrae un numero pari, la differenza sarà dispari.

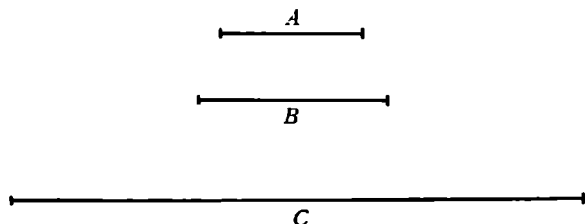
Infatti, dal numero dispari AB si sottragga il numero pari BC; dico che la differenza AC è dispari.

Si sottragga [da AB] l'unità AD; quindi DB è pari (VII, def. VII). Ma pure BC è pari, per cui è pari anche la differenza DC (IX, 24). Dunque AC è dispari (VII, def. VII). - C.D.D.

APPLICA: IX, 24.

PROPOSIZIONE 28.

Se un numero dispari moltiplica un numero pari, il prodotto sarà pari.

Infatti, il numero dispari A, moltiplicando il numero pari B, dia il prodotto C; dico che C è pari.

Poiché difatti $AB = C$ [a], si ha che C è composto da tanti numeri uguali a B quante unità sono in A (VII, def. XV). Ora, B è pari; quindi C è composto da numeri pari. Ma se si sommano quanti si voglia numeri pari, il totale è pari (IX, 21). Dunque C è pari. - C.D.D.

APPLICA: IX, 21.

a. L'espressione greca è la solita: « Poiché difatti A, moltiplicando B, dà come prodotto C ».

PROPOSIZIONE 29.

Se un numero dispari moltiplica un numero dispari, il prodotto sarà dispari.

Infatti, il numero dispari A, moltiplicando il numero dispari B, dia il prodotto C; dico che C è dispari.

Poiché difatti $AB = C$, si ha che C è composto da tanti numeri uguali a B quante unità sono in A (VII, def. XV). Ora, ciascuno dei due numeri A, B è dispari; quindi C è composto da numeri dispari in numero dispari [a]. Cosicché C è dispari (IX, 23). - C.D.D.

APPLICA: IX, 23.

PROPOSIZIONE 30.

Se un numero dispari divide un numero pari, dividerà anche la sua metà.

Infatti, il numero dispari A divida il numero pari B; dico che dividerà anche la metà di B.

Poiché difatti A divide B, lo divida secondo il quoziente C[, cioè si abbia $B = AC$]; dico che C non è dispari. Infatti supponiamo, se possibile, che lo sia. Ora, poiché A divide B secondo il quoziente C, si ha: $AC = B$. Quindi B è composto da numeri dispari in numero dispari. Perciò B sarebbe dispari (IX, 23) - il che è assurdo: difatti è pari per ipotesi. Quindi C non è dispari, e dunque è pari. Cosicché A divide B un numero pari di volte. Per questa ragione, dividerà anche la metà di B. - C.D.D.

APPLICA: IX, 23.

È APPLICATA IN: IX, 31.

a. La formula greca è sempre la solita: « da numeri dispari il cui numero, per quanti siano in complessivo, è dispari ».

PROPOSIZIONE 31.

Se un numero dispari è primo rispetto ad un altro numero, sarà primo anche rispetto al doppio di esso.

Infatti, il numero dispari A sia primo rispetto ad un numero B, e C sia il doppio di B; dico che A è primo rispetto a C.

Se essi difatti non fossero primi fra loro, li dividerebbe un certo numero. Li divida, e sia esso D. Ora, A è dispari, per cui anche D è dispari. Ma poiché D, che è dispari, divide C, e C è pari, si ha che D dividerà pure la metà di C (IX, 30). Ma B è la metà di C[: difatti C è il doppio di B]; quindi D divide B. Ma esso divide anche A. Perciò D dividerebbe A, B, che sono primi fra loro: il che è impossibile. Quindi non può darsi che A non sia primo rispetto a C. Dunque A, C sono primi fra loro. – C.D.D.

APPLICA: IX, 30.

PROPOSIZIONE 32.

Ciascuno dei numeri che si ottengono raddoppiando successivamente a partire da una diade [*cioè da* $A = 2$] *non può essere che un numero parimente pari.*

Infatti, si siano ottenuti[a] quanti si voglia numeri B, C, D raddoppiando sempre di séguito a partire da $A = 2$[, cioè $B = 4$, $C = 8$, $D = 16$]; dico che B, C, D non possono essere che parimente pari.

Che ciascuno dei numeri B, C, D sia dunque parimente pari, è evidente: difatti ognuno di essi viene raddoppiato di séguito a partire dal numero $A = 2$ (VII, def. VIII). Dico inoltre che ciascuno di essi non può essere che tale. Si prenda infatti [in considerazione] l'unità[, e si abbia quindi: $1 : 2 = 2 : B = B : C = C : D$]. Poiché quanti si vo-

a. Letteralmente: a partire dalla diade A si siano ottenuti quanti si voglia numeri B, C, D, raddoppiando..., ecc.

glia numeri stanno dunque fra loro in proporzione continuata a partire dall'unità, ed il numero successivo all'unità, cioè 2, è primo, il maggiore fra i numeri 2, *B*, *C*, *D*, cioè *D*, non sarà diviso da alcun altro numero eccetto che da 2, *B*, *C* (IX, 13). Ma ciascuno dei numeri 2, *B*, *C* è pari, per cui *D* non può essere che parimente pari[: difatti non può avere un divisore dispari] (VII, def. VIII). Similmente potremo dimostrare che pure ognuno dei due numeri *B*, *C* non può essere che parimente pari. – C.D.D.

Applica: IX, 13.

Proposizione 33.

Se un numero ha la metà dispari, non può essere che parimente dispari.

Infatti, il numero *A* abbia la metà dispari; dico che *A* non può essere che parimente dispari.

Che sia dunque parimente dispari, è evidente: difatti la sua metà, che è dispari, lo divide secondo un quoziente pari (VII, def. IX). Dico ora che non può essere se non tale. Infatti, se *A* fosse anche parimente pari, sarebbe diviso da un numero pari secondo un numero pari (VII, def. VIII), cosicché pure la sua metà sarebbe divisa da un numero pari, pur essendo dispari: il che è assurdo. Dunque *A* non può essere che parimente dispari. – C.D.D.

Proposizione 34.

Se un numero non è fra quelli che si ottengono raddoppiando di séguito a partire dal numero 2, né ha dispari la metà, esso è insieme parimente pari e parimente dispari.

Infatti, il numero *A* non sia fra quei numeri che si ottengono raddoppiando di séguito a partire dal 2, né abbia dispari la metà; dico che *A* è insieme parimente pari e parimente dispari.

Che dunque A sia parimente pari, è evidente: difatti non ha dispari la metà (VII, def. VIII). Dico ora che è anche parimente dispari. Infatti, se dividiamo A per metà, dividiamo poi per metà la metà di esso, e così sempre facciamo di séguito, perverremo ad un numero dispari che dividerà A secondo un numero[, cioè un quoziente,] pari. Se difatti così non fosse, finiremmo col giungere al 2, ed A sarebbe fra i numeri ottenuti raddoppiando di séguito a partire dal numero 2: il che è contro l'ipotesi. Cosicché A è parimente dispari. Ma fu dimostrato che è anche parimente pari. Dunque A è insieme parimente pari e parimente dispari. – C.D.D.

Proposizione 35.

Se si dànno quanti si voglia numeri in proporzione continuata fra loro, e dal secondo e dall'ultimo di essi si sottraggono numeri uguali al primo, si avrà che la differenza fra il secondo ed il primo numero sta al primo come la differenza fra l'ultimo ed il primo sta alla somma di tutti i numeri che precedono l'ultimo [a] [10].

Siano A, BC, D, EF quanti si voglia numeri in proporzione continuata fra loro, che inizino a stare in proporzione

a. Sarebbe piuttosto: «si avrà che l'eccesso del secondo rispetto al primo sta al primo numero come l'eccesso dell'ultimo sempre rispetto al primo sta alla somma dei numeri precedenti».

[10] Questa proposizione IX, 35 costituisce un lemma per la finale IX, 36 sui numeri perfetti. Ma essa stessa contiene un risultato importantissimo: si tratta infatti della somma dei termini di una progressione geometrica. Si considera una proporzione continuata:

$$a : b = b : c = c : d =$$

o, ciò che fa lo stesso, una progressione geometrica:

$$a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot$$

dove, indicando con q la ragione (cioè il rapporto costante $b : a$) si ha: $b = aq$; $c = aq^2$; $d = aq^3$ sicché la progressione è:

$$a \cdot aq \cdot aq^2 \cdot aq^3 \ldots..$$

Dice la IX, 35 che si ha:

$$(b - a) : a = (d - a) : (a + b + c)$$

dal numero minimo A, e da BC si sottragga $BH = A$, e da EF si sottragga $KF = A$; dico che $(BC - A) : A = (EF - A) : (A + BC + D)$[, ossia che $HC : A = EK : (A + BC + D)$].

Infatti, si pongano $FL = BC$, e $FM = D$. Ora, poiché FL è uguale a BC, e la parte FK di FL è uguale alla parte BH di BC, la differenza $ML = FM - FL$ risulta uguale a $D - A$. Ma poiché $EF : D = D : BC = BC : A$ [dalla proporzione continuata dell'ipotesi, *invertendo*], e D è uguale a FM, mentre BC è uguale a FL, ed A è uguale a FK, si ha che $EF : FM = FM : FL = FL : FK$. *Scomponendo* (VII, 11 e VII, 13), si ha: $(EF - FM) : FM = (FM - FL) : FL = (FL - FK) : FK$. Quindi anche, uno dei termini antecedenti sta ad uno dei conseguenti come la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti (VII, 22); perciò $LK : FK = (EM + ML + LK) : (FM + FL + FK)$[, ossia: $LK : FK = EK : (FM + FL + FK)$]. Ma LK è uguale a $BC - A$, mentre FK è uguale ad A, e la somma $FM + FL + FK$ è uguale alla somma $D + BC + A$; perciò $(BC - A) : A = (EF - A) : (D + BC + A)$. Dunque, [dati quanti si voglia numeri in proporzione continuata fra loro,] la differenza fra il secondo ed il primo numero sta al primo come la differenza fra l'ultimo ed il primo sta alla somma di tutti i numeri che precedono l'ultimo. – C.D.D.

che cioè la differenza tra il secondo ed il primo termine sta al primo, come la differenza tra l'ultimo e il primo sta alla somma dei precedenti termini.

Di qui si ricava:

$$a + b + c = \frac{a(d - a)}{b - a}$$

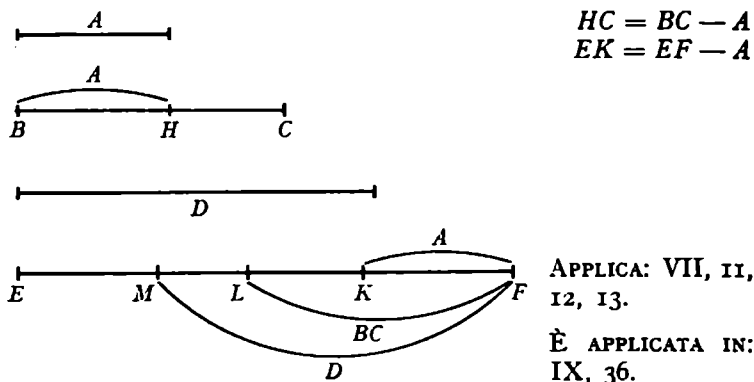
ossia:

$$a + b + c = \frac{a(aq^3 - a)}{aq - a} = a\frac{q^3 - 1}{q - 1}$$

in corrispondenza alla formula generale:

$$s_n = a\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

APPLICA: VII, 11, 12, 13.

È APPLICATA IN: IX, 36.

PROPOSIZIONE 36.

Se, partendo dall'unità, si prendano quanti si voglia numeri raddoppiando successivamente sino a che la loro somma venga ad essere un numero primo, e se la somma stessa vien moltiplicata per l'ultimo dei numeri considerati, il prodotto sarà un numero perfetto [a] [11].

Infatti, a partire dall'unità si assumano quanti si voglia numeri che si ottengano raddoppiando di séguito, e siano

a. Più alla lettera: «Se, partendo dall'unità, si assumano quanti si voglia numeri che stiano fra loro di séguito in proporzione duplicata, sino a che il numero uguale alla loro somma venga ad esser primo, e se il numero che è loro somma vien moltiplicato per l'ultimo di essi, il prodotto sarà un numero perfetto».

[11] Ecco la regola per trovare un numero perfetto. Si parte da una proporzione continuata che cominci dall'unità ed abbia 2 come secondo elemento, sicché i suoi termini siano le successive potenze di 2. Si considerano quanti termini si vogliono e si addizionano insieme. Se la somma è un numero primo basta moltiplicarlo per l'ultimo dei numeri considerati: il prodotto è un numero perfetto, cioè (VII, def. XXII) uguale alla somma dei suoi divisori (inclusa l'unità, escluso il numero stesso).

Sicché se ci fermiamo al secondo termine della progressione abbiamo la somma $1 + 2 = 3$ che è un numero primo. Moltiplicando detta somma 3 per l'ultimo termine considerato 2 abbiamo il primo numero perfetto: $2 \cdot 3 = 6$.

Infatti $6 = 1 + 2 + 3$ (è uguale alla somma dei suoi divisori). Per

essi A, B, C, D, sino a che la loro somma risulti un numero primo; alla loro somma sia uguale il numero E, ed E mol-

trovarne un altro, consideriamo tre termini successivi: 1, 2, 4. La somma $1 + 2 + 4 = 7$ è numero primo, sicché si ha un altro numero perfetto:

$$7 \cdot 4 = 28$$

Infatti

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

La somma di quattro termini non dà un numero primo; lo dà invece la somma di cinque termini:

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$$

Sicché

$$31 \cdot 16 = 496$$

è un altro numero perfetto: Infatti

$$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$$

Il metodo seguito da Euclide può essere esposto coi nostri simboli in modo semplice, almeno per quanto riguarda la prima parte della dimostrazione.

Si consideri una progressione geometrica di n termini che abbia inizio dall'unità ed abbia la ragione 2, cioè:

$$1,\ 2,\ 2^2 \ldots .\ 2^{n-1}$$

Sia s la somma dei suoi termini:

$$s = 1 + 2 + 2^2 + \ldots .\ 2^{n-1}$$

Se s è un numero primo, il prodotto $2^{n-1} \cdot s$ è un numero perfetto,
Infatti si consideri un'altra progressione geometrica pure di n termini. pure di ragione 2, ma avente come primo termine la somma s, ossia:

$$s \cdot 2s \cdot 2^2 s \cdot \ldots .\ 2^{n-1}s$$

Ora si applica a questa progressione il teorema precedente IX, 35. Si ha:

$$(2s - s) : s = (2^{n-1}s - s) : (s + 2s + \ldots . + 2^{n-2}s)$$

E siccome il primo membro $s : s$ è uguale all'unità, si ricava:

$$2^{n-1}s - s = s + 2s + \ldots . + 2^{n-2}s$$

da cui:

$$2^{n-1}s = s + (s + 2s + \ldots . + 2^{n-2}s)$$
$$= (1 + 2 + \ldots . + 2^{n-1}) + (s + 2s + \ldots . + 2^{n-2}s)$$

Si vede subito che ciascun termine del secondo membro è un divisore di $2^{n-1}s$. Più complicato è far vedere che i termini del secondo membro sono *tutti* i divisori di $2^{n-1}s$ e che quindi $2^{n-1}s$, essendo uguale alla somma di tutti i suoi divisori, è un numero perfetto.

Per questa seconda parte della dimostrazione, Euclide ricorre all'ipotesi che s sia primo, e poi ricorre alla IX, 13 la quale afferma che data una proporzione continuata partente dall'unità ed avente per ragione un numero primo, l'ultimo ha come divisori tutti e soli i numeri che lo precedono nella proporzione.

tiplicando [l'ultimo numero] D dia il prodotto $F = ED$. Dico che $F = ED$ è un numero perfetto.

Per quanti difatti sono i numeri A, B, C, D, altrettanti se ne prendano a partire da E, raddoppiando successivamente, e siano essi E, K, L, M; quindi, *ex aequo*, A sta a D come E sta a M (VII, 14). Perciò il prodotto di E per D è uguale al prodotto di A per M (VII, 19). Ora, il prodotto di E per D è F, per cui anche il prodotto di A per M è [uguale a] F[, cioè $F = ED = AM$]. Di conseguenza, A moltiplicando M dà come prodotto F. Quindi A divide $F = AM = ED$ secondo le unità che sono in A. Ma A è uguale a 2; perciò $AM = F$ è il doppio di M. Ma pure M, L, K, E sono successivamente l'uno il doppio dell'altro, per cui E, K, L, M, F stanno fra loro di séguito in proporzione continuata [$E : K = K : L = L : M = M : F$]. Si sottragga ora dal secondo numero, K, e dall'ultimo, F, il primo numero E; si ha quindi che la differenza fra il secondo ed il primo numero sta al primo come la differenza fra l'ultimo ed il primo sta alla somma di tutti i numeri che precedono l'ultimo (IX, 35). Perciò $(K - E) : E = (F - E) : (E + K + L + M)$. Ma $K - E$ è uguale ad E[: difatti $K - E = E$, poiché K è il doppio di E]; pure $F - E$ è quindi uguale alla somma di E, K, L, M [$F - E = E + K + L + M$). Ma $E = 1 + A + B + C + D$. Quindi tutto quanto F è uguale alla somma di E, K, L, M insieme alla somma di A, B, C, D più un'unità[, e difatti: $F = (E + K + L + M) + E$, che ci dà: $F = (E + K + L + M) + (1 + A + B + C + D)$]; ed è diviso da tali numeri. Dico inoltre che F non può esser diviso da alcun altro numero eccetto che da A, B, C, D, E, K, L, M e l'unità. Infatti, se possibile, un numero P divida F, e P non sia uguale a nessuno dei numeri A, B, C, D, E, K, L, M. Ora, per quante volte P è contenuto in tal caso in F, altrettante siano le unità contenute in un numero Q; perciò Q, moltiplicando P, dà come prodotto F [$PQ = F$]. Ma pure E tuttavia, moltiplicando D, dà come prodotto F [$ED = F$]; quindi $E : Q = P : D$ (VII, 19). Ma poiché A, B, C, D stanno fra loro in proporzione continuata a partire dall'unità, si ha che D non può esser diviso da alcun altro

numero eccetto che da A, B, C (IX, 13). E per ipotesi, P non è uguale a nessuno dei numeri A, B, C; quindi P non può dividere D. Ma $P : D = E : Q$, per cui neppure E divide Q (VII, def. XX). Ora, E è primo, ed ogni numero primo è primo rispetto ad ogni altro numero che esso non divida (VII, 29). Quindi E, Q sono primi fra loro. Ma i numeri primi fra loro sono anche i più piccoli fra tutti quelli aventi tra loro a due a due lo stesso rapporto (VII, 21), ed i numeri più piccoli possibile sono equisottomultipli di quanti abbiano tra loro a due a due lo stesso rapporto (VII, 20), l'antecedente[, qui E,] dividendo l'antecedente [P] ed il conseguente [Q] dividendo il conseguente [D]; ed E sta a Q come P sta a D; perciò E divide P altrettante volte quante Q divide D. Ma D non è diviso da nessun altro numero eccetto che da A, B, C; quindi Q è uguale ad uno dei numeri A, B, C. Sia esso uguale a B. Per quanti sono i numeri B, C, D, altrettanti se ne prendano cominciando da E [e raddoppiando sempre], cioè si prendano E, K, L. Ma E, K, L stanno fra loro a due a due nello stesso rapporto in cui tra loro stanno B, C, D; quindi, *ex aequo*, $B : D = E : L$ (VII, 14). Perciò $BL = ED$ (VII, 19); ma $ED = F = PQ$, per cui si ha anche: $PQ = BL$. Perciò in tal caso si avrebbe: $Q : B = L : P$ (VII, 19). Ma Q[, come si è supposto,] è uguale a B, per cui anche L sarebbe uguale a P – il che è impossibile: infatti, per ipotesi, P non è uguale a nessuno dei numeri che si siano proposti. Quindi nessun altro numero dividerà F eccetto A, B, C, D, E, K, L, M e l'unità. Fu inoltre dimostrato che F è uguale alla somma di A, B, C, D, E, K, L, M, più un'unità. Ma numero perfetto è quello che è uguale alla somma delle sue parti[, cioè dei suoi divisori] (VII, def. XXII); dunque F è un numero perfetto. – C.D.D.

APPLICA: VII, 14, 19, 20, 21, 29; IX, 13, 35.

LIBRO DECIMO

In linea generale, i libri degli Elementi *di Euclide che sono maggiormente letti sono il primo, e (in misura minore) il secondo e il quinto. Tutti sanno, tuttavia, che c'è anche un libro decimo, che è il più lungo di tutti (conta nientemeno che 115 proposizioni!) e che tratta di quelle* irrazionalità *che noi esprimiamo con radicali quadratici, anche sovrapposti.*

Ma pure con la migliore volontà, la lettura di questo decimo libro, interminabile e complicato, riesce assai scomoda: molto spesso viene interrotta a breve distanza dall'inizio.

La stessa impressione, del resto, ci trova in illustre compagnia: scrive nel Flos *il Fibonacci (Leonardo Pisano) che il decimo libro* difficilior est antecedentium et quorumdam sequentium librorum Euclidis *e aggiunge poco dopo, nei riguardi delle quindici* rette *di detto libro (due razionali e tredici irrazionali),* et cum studiose super hos quindecim numeros, et super eorum diversitates cogitarem...

E si potrebbe citare Simone Stevin (il decimo è la croix des mathématiciens), *e tra i contemporanei B. L. Van der Waerden* (« *Book X does not make easy reading* ») [1].

Qui vorrei fornire al lettore una rapida, ma sostanziale, *veduta panoramica del libro decimo, pensando che essa possa indurre alla lettura: ne vale effettivamente la pena!*

[1] B. L. VAN DER WAERDEN, *Science Awakening*, trad. inglese di A. Dresden, Gröningen (Noordhoff), 1954, p. 172.

Una delle questioni che maggiormente ha interessato gli storici e i commentatori è quella di stabilire a che cosa serva il libro decimo. Ciò non già nel senso delle applicazioni pratiche (pensiero totalmente estraneo all'opera euclidea), ma nel senso dell'economia generale degli Elementi, *che sembran concepiti come un gigantesco ed equilibrato sistema di lemmi, sicché per le proposizioni che son fine a sé stesse i commentatori ricercano la ragione per la quale Euclide le abbia date (ragione che è spesso di carattere storico, come in X, 2, o d'indipendenza da un postulato, come in I, 17).*

Tutti i risultati del vastissimo libro decimo trovano, invece, scarsissima applicazione: ciò soltanto nel libro decimoterzo sui poliedri regolari, sicché Ruth Struik può scrivere (nell'edizione di Enriques, vol. III, p. 13). « Se proprio Euclide ha composto il decimo per possedere quanto occorre alla trattazione dei poliedri regolari, egli ha fabbricato tutta una batteria di cannoni per sparare un solo colpo ». Aggiunge però, in relazione all'opera dei posteri (che sotto questo profilo qui non c'interessa): « E tuttavia la batteria potrà servire, com'è avvenuto, per sparare in séguito altri colpi »!

Ed effettivamente il libro decimo fa eccezione, voluminosa *eccezione, al principio generale degli* Elementi-sistema di lemmi.

Vorremmo formulare a questo punto l'ipotesi che Euclide si sia lasciato prender la mano *dal suo gusto matematico, e che, senza preoccuparsi della pur ferrea legge della formazione degli* Elementi, *si sia rivolto ad un argomento, evidentemente a lui caro, trattandolo con ampiezza inusitata.*

In detto argomento, delle irrazionalità quadratiche, egli si sarebbe letteralmente immerso, dimentico di tutto il resto: la ricerca per la ricerca, l'arte per l'arte, diremmo quasi.

Si potrebbe per Euclide ricordare gli immortali versi del Cantore *di Goethe, di quel* cantore *che rifiuta dal re vistosi doni, poiché già il proprio canto lo appaga:*

> Ich singe, wie der Vogel singt,
> der in den Zweigen wohnet;
> das Lied, das aus der Kehle dringt
> ist Lohn, der reichlich lohnet.

Io canto, come canta l'uccello
che dimora in mezzo ai rami;
il canto che erompe dalla gola
è premio che compensa riccamente.

E ci rifaremmo anche al Platone del Teeteto *il quale fa sotto un certo aspetto l'elogio del* macrologio (*che pur altrove condanna*)*: esso offre la possibilità di parlare e discutere a lungo, senza la servile preoccupazione del tempo che passa.*

Tutto ciò presuppone che la trattazione del libro decimo possegga elementi di bellezza, e conduce alla conseguenza che essa debba essere sostanzialmente *opera personale di Euclide.*

Ora nessun dubbio sulla bellezza della trattazione: e saremo ben lieti se avremo spinto il lettore a leggere *effettivamente ed a gustare pienamente tutto il libro decimo. Attribuiamo personalmente a Euclide la trattazione, s'è detto: ma forse anche molti risultati, frutto di una vasta ricerca, sono da attribuire a lui. Ciò può accordarsi pure con la tradizionale attribuzione di risultati del libro decimo a Teeteto* (*ad es. il criterio della X, 9 e la scoperta di tre linee irrazionali*) *e a Teodoro di Cirene* (*ad es. il procedimento della X, 2*).

Ma secondo la nostra veduta è a Euclide che si deve l'ulteriore classificazione delle linee irrazionali (*oltre le semplici* mediali, binomiali *e* apotomi), *ed è a lui che si devono l'impostazione logica e l'intelaiatura della trattazione, fino ai risultati finali.*

Per alcune tra le prime proposizioni del libro decimo, Euclide si rivolge alle grandezze in generale. Sono le stesse grandezze *del libro quinto: l'anello di congiunzione è costituito dalla X, 1 la quale introduce, per le grandezze del libro decimo, quel cosiddetto postulato di Archimede che, attraverso la definizione quarta, costituisce caratteristica essenziale delle grandezze del libro quinto.*

Ma nel libro quinto (*tranne nei particolari casi delle proposizioni iniziali*) *non viene introdotta alcuna distinzione tra grandezze commensurabili ed incommensurabili, sicché nella celebre definizione quinta* (*di proporzione*) *si accusa chiara-*

mente lo sforzo compiuto per adattarla indifferentemente all'uno o all'altro caso.

Nei libri aritmetici, invece (settimo, ottavo, nono), Euclide si rivolge a quelle particolari grandezze commensurabili che son costituite dai numeri (interi): qui nel libro decimo, al contrario, l'accento viene posto sul caso della incommensurabilità: in ogni modo la distinzione tra i due casi è sempre al centro della trattazione.

Ed anzi, per le rette (*i nostri* segmenti di retta) *i concetti di commensurabilità e di incommensurabilità vengono raffinati maggiormente nella loro distinzione.*

Due rette *sono commensurabili (o incommensurabili) in lunghezza, quando lo sono nel nostro senso ordinario.*

Due rette si dicono, invece, commensurabili (o incommensurabili) in potenza, se tali rispettivamente sono i quadrati su di esse costruiti. Sicché, per esempio, lato e diagonale di un quadrato sono incommensurabili in lunghezza, ma commensurabili in potenza.

Tutta la trattazione è poi fondata sulla considerazione di una retta arbitraria, che si assume una volta per tutte come « razionale » di partenza. *Tutte le rette che sono commensurabili, in lunghezza o anche soltanto in potenza, con essa, si dicono* razionali.

Perché una retta sia irrazionale *occorre che sia incommensurabile con la razionale di partenza non soltanto in lunghezza, ma anche in potenza: occorre cioè che il quadrato costruito sulla retta che si considera sia incommensurabile col quadrato costruito sulla retta razionale di partenza. Così, per esempio, se sulla retta razionale di partenza si costruisce un quadrato, la diagonale è retta razionale, perché il suo quadrato, essendo doppio dell'altro, è con esso commensurabile.*

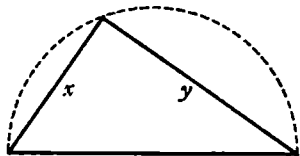
La sezione aurea del lato sarebbe, invece, una linea irrazionale, poiché (come Euclide mostrerà) il suo quadrato è incommensurabile col quadrato della retta razionale di partenza.

Nella sua trattazione, Euclide considera sempre due rette, *sulle quali si formulano ipotesi diverse nei riguardi della loro commensurabilità o meno: nello sfondo c'è però sem-*

pre immutabile una terza retta, anzi (meglio) una prima, che è quella che (come s'è detto) si assume come retta razionale di partenza.

Si comincia allora col considerare due rette *razionali* x, y, *commensurabili tra loro soltanto in potenza.*

Disponiamole ad angolo retto, in modo che costituiscano i cateti di un triangolo rettangolo. L'area del loro rettangolo, e quindi anche l'area del triangolo, è (lo dimostra Euclide) un'area irrazionale.

Il lato del quadrato equivalente al rettangolo è quindi una linea irrazionale, alla quale si dà il nome di retta mediale, *mentre il rettangolo (o il quadrato ad esso equivalente) è detto* area mediale.

Se indichiamo, ad esempio, col numero razionale (o intero) a *la lunghezza di* x, *potremo indicare con* $\sqrt{b}$ *la lunghezza di* y *(infatti* x, y *risultano allora incommensurabili in lunghezza, ma commensurabili in potenza), il rettangolo ha l'area* $a\sqrt{b}$, *quindi il lato del quadrato equivalente ha la lunghezza* $\sqrt{a\sqrt{b}}$.

Questa è, nei nostri simboli, l'indicazione della retta irrazionale detta mediale: *essa equivale, in sostanza, ad una nostra radice quarta. In altri termini: retta mediale è la media proporzionale tra due rette razionali commensurabili soltanto in potenza.*

Se ora, anziché considerare il rettangolo delle due rette x, y *commensurabili tra loro soltanto in potenza, consideriamo la loro somma, abbiamo un'altra retta irrazionale, che prende il nome di* binomiale, *e che potremo esprimere simbolicamente così:*

$$a + \sqrt{b}$$

o anche nelle seguenti altre due maniere:

$$\sqrt{a} + b$$

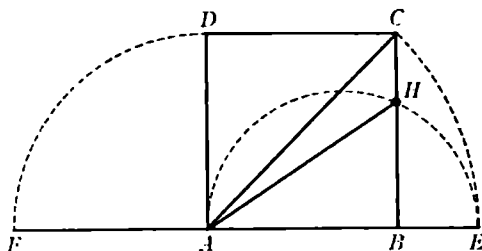
oppure:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Finalmente, sempre partendo da due rette x, y (*di lunghezza rispettiva* a, $\sqrt{b}$ *ecc.*) *commensurabili tra loro soltanto in potenza, si ottiene una terza retta irrazionale sottraendo la minore dalla maggiore. Detta linea-differenza si chiama* apòtome *e si esprime numericamente in uno dei tre seguenti modi:*

$$a - \sqrt{b}, \quad \textit{oppure} \quad \sqrt{a} - b, \quad \textit{oppure} \quad \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

Per mostrare un esempio di costruzione delle tre rette irrazionali così introdotte, cioè mediale, binomiale, apotome, con-

sideriamo un quadrato ABCD *di lato razionale, e riportiamo in* AE *la diagonale* AC.

Poiché il lato AB *e la diagonale* AC = AE *sono rette commensurabili soltanto in potenza, la loro media proporzionale* AH *è una retta mediale.*

Riportando il lato AD *in* AF, *la* retta FE = FA + AE = = AD + AC *è una binomiale, mentre* BE = AE — AB è *un'apotome.*

Per giungere ora alle altre linee irrazionali, Euclide introduce altri concetti, che costituiscono un ulteriore raffinamento dei precedenti. Per semplicità daremo dei nomi particolari alle proprietà relative.

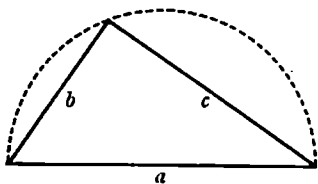
1) Commensurabilità pitagorica (*che abbrevieremo nella scrittura così: comm.tà pit.*) (*v. X, 14*).

Date due rette a, b (*con* a > b) *diremo che esse sono pitagoricamente commensurabili se il quadrato della maggiore* a

supera il quadrato della minore b *del quadrato di una retta commensurabile in lunghezza con la maggiore* a: *cioè se:*

$$q(a) - q(b) = q\left(\frac{m}{n} a\right)$$

ove m, n *sono due numeri interi.*

Geometricamente, la comm.tà pit. *ha il seguente significato: se* a, b *si assumono rispettivamente come ipotenusa e come uno dei cateti di un triangolo rettangolo, l'altro cateto* c *deve risultare comm.le in lunghezza con l'ipotenusa* a.

C'è una condizione necessaria *perché due rette siano comm.li pit.: essa è che le rette stesse siano comm.li* almeno in potenza.

Infatti dalla condizione della comm.tà pit. si ricava:

$$q(a) - q\left(\frac{m}{n} a\right) = q(b)$$

ossia:

$$q(b) = n^2 q\left(\frac{1}{n} a\right) - m^2 q\left(\frac{1}{n} a\right) = (n^2 - m^2)\, q\left(\frac{1}{n} a\right) =$$

$$= \frac{n^2 - m^2}{n^2}\, q(a)$$

Dunque q (b) *risulta commensurabile con* q(a), *ossia le due rette* a, b *devono essere commensurabili almeno in potenza.*

Troviamo ora una condizione sufficiente *perché due rette* a, b *comm.li almeno in potenza, siano comm.li pitagoricamente. Poiché* q(a), q(b) *sono commensurabili, essi stanno tra loro come un numero (intero)* r *sta ad un numero (intero)* s *(X, 5), ossia è:*

$$q(a) : q(b) = r : s$$

Di qui, scomponendo:

$$[q(a) - q(b)] : q(a) = (r - s) : r$$

Ma se a, b *devono essere pit. comm.li è:*

$$q(a) - q(b) = q\left(\frac{m}{n} a\right)$$

quindi:

$$q\left(\frac{m}{n} a\right) : q(a) = (r - s) : r$$

Ma i lati dei due quadrati sono comm.li in lunghezza, quindi i due quadrati stanno tra loro come un numero quadrato sta ad un numero quadrato (X, 9).

E poiché i due numeri (r — s), r *sono primi tra loro (tali potendosi sempre assumere* r, s), *segue che, affinché stiano tra loro come due numeri quadrati, debbono essere numeri quadrati essi stessi. E si vede subito, ripercorrendo la stessa via in senso inverso, che la condizione, oltre che necessaria, è pure sufficiente.*

Applichiamo quanto veduto al lato l *ed alla diagonale* d *di un qualunque quadrato.*

Si ha:

$$q(d) : q(l) = 2 : 1$$

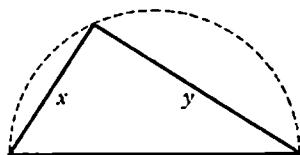
E mentre $r - s = 2 - 1 = 1$ *è un numero quadrato, non è tale* $r = 2$. *Quindi lato e diagonale d'un quadrato non sono comm.li pitagoricamente.*

E infatti:

$$q(d) - q(l) = q(l)$$

ed l *è incomm.le in lunghezza con* d.

2) Razionalità dell'area (*abbreviato in:* area raz.).

Sono di area raz. *due rette* x, y *se il loro rettangolo è appunto un'area razionale, cioè commensurabile col quadrato della retta razionale di partenza.*

Ciò val quanto dire che deve essere razionale l'area del triangolo rettangolo (metà del rettangolo) costruito sui cateti x, y.

È facile vedere che sotto la condizione di area raz. *le due rette* x, y *debbono essere o ambedue rette razionali o ambedue rette irrazionali. Supponiamo,*

infatti che x *sia retta razionale. Ciò significa che il suo quadrato deve essere comm.le con* r (x, y) *ossia che:*

$$q\,(x) : r(x, y) = m : n \qquad (X, 5)$$

dove m, n *sono due numeri (interi).*
Ma:

$$q(x) : r(x, y) = x : y \qquad (VI, 1)$$

quindi:

$$x : y = m : n \qquad (V, 11)$$

ossia x, y *sono tra loro commensurabili (in lunghezza) (X, 6). Pertanto se* x *è razionale lo è anche* y, *e le due rette* x, y *sono comm.li in lunghezza.*

Se, dunque, una delle due x, y *è irrazionale, tale deve essere anche l'altra, bastando la razionalità di una delle due linee per dedurre la razionalità dell'altra.*

Tornando al caso delle due linee razionali x, y, *abbiamo veduto che se debbono dare* area raz. *esse debbono essere comm.li in lunghezza. Nella X, 19 Euclide dimostra la proposizione inversa: cioè che se due rette razionali sono comm.li in lunghezza, il loro rettangolo ha area razionale.*

Se due linee razionali non sono comm.li in lunghezza, cioè sono comm.li soltanto in potenza, il loro rettangolo non è area razionale: infatti è area mediale *(X, 21), e il lato del quadrato equivalente è quella retta irrazionale che Euclide chiama* mediale.

Euclide considera poi il caso di due rette mediali: se esse sono comm.li in lunghezza il loro rettangolo è area mediale, mentre se sono comm.li soltanto in potenza il loro rettangolo può essere razionale o mediale.

Ci possiamo render conto delle varie possibilità usando il nostro simbolismo. Una retta mediale, s'è visto, è indicata dal radicale $\sqrt{a\sqrt{b}}$. *Se due rette mediali sono tra loro comm.li in lunghezza, esse verranno indicate con:* $m\sqrt{a\sqrt{b}}$ *e* $n\sqrt{a\sqrt{b}}$ *cioè potranno le loro espressioni differire soltanto per il coefficiente davanti al radicale, mentre quest'ultimo è lo stesso per ambedue.*

L'area del rettangolo è $mna\sqrt{b}$ *ed è quindi mediale. Invece se le due rette mediali devono essere comm.li soltanto in potenza,*

le loro espressioni saranno del tipo: $\sqrt{a\sqrt{b}}$ *e* $\sqrt{c\sqrt{b}}$. *Infatti i loro quadrati avranno le aree* $a\sqrt{b}$, $c\sqrt{b}$ *e quindi saranno comm.li tra loro. Ebbene: il rettangolo di tali rette è espresso da:*

$$\sqrt{a\sqrt{b}} \cdot \sqrt{c\sqrt{b}} = \sqrt{abc}$$

Esso sarà quindi razionale se abc *è un quadrato perfetto; sarà mediale se* abc *non sarà un quadrato.*

3) Sommabilità pitagorica. *Diremo che due rette sono* sommabili pitagoricamente *se la somma dei quadrati su di essi costruiti è una area razionale.*

Quindi, assunte le due rette come cateti di un triangolo rettangolo, deve risultare area razionale il quadrato dell'ipotenusa, e perciò retta razionale l'ipotenusa.

È facile vedere se due rette a, b *sono pitag. sommabili, esse risultano o ambedue razionali o ambedue irrazionali. Infatti supponiamo che una delle due rette, ad esempio* a, *sia razionale: mostreremo che è razionale anche l'altra* b. *Essendo:*

$$q(a) + q(b) = q(c)$$

ed essendo q(c) *razionale per la sommabilità pitagorica, veniamo ad avere* q(a), q(c) *ambedue razionali. Ciò significa che:*

q(c) *comm.le con* q(r)
q(a) *comm.le con* q(r)

dove q(r) *è il quadrato della retta* r *assunta come retta razionale di partenza. Ma allora, per la proprietà transitiva della commensurabilità* (*X*, *12*) *si ha:*

q(c) *comm.le con* q(a)

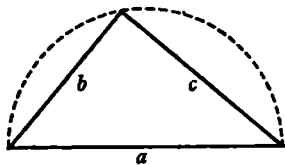
Segue quindi, per la X, 15, che anche q(b), *è comm.le con* q(c) *e con* q(a), *ossia anche con* q(r).

Pertanto q(b) *è razionale, e quindi è razionale anche la retta* b.

Un quadro riassuntivo e unitariamente illustrativo delle tre proprietà sopra vedute si ha considerando un triangolo rettangolo, l'ipotenusa del quale indicheremo con a, *i cateti con* b, c.

Per la commensurabilità pitagorica (come s'è già veduto) si parte dall'ipotenusa e da un cateto, e si ricavano elementi riguardanti l'altro cateto:

$$q(a) - q(b) = q\left(\frac{m}{n}a\right) = q(c)$$

da cui $c = \frac{m}{n}a$. *Ossia, supposto che l'ipotenusa* a *ed uno dei cateti* b *siano tra loro commensurabili (almeno in potenza) la commensurabilità pitagorica tra* a, b *significa che l'altro cateto* c *è commensurabile in lunghezza con l'ipotenusa.*

Per la razionalità dell'area si parte invece dai due cateti b, c: *l'area del loro rettangolo deve essere razionale, quindi è tale anche la loro metà, ossia l'area del triangolo rettangolo che abbiamo considerato.*

Finalmente anche per la sommabilità pitagorica si parte dai due cateti b, c: *la somma dei loro quadrati deve essere razionale, quindi tale è il quadrato dell'ipotenusa, e razionale è anche l'ipotenusa stessa.*

Euclide ora passa a dimostrare l'esistenza di altre rette irrazionali. S'è visto che la somma di due rette razionali commensurabili soltanto in potenza è quella retta irrazionale che s'è chiamata binomiale, *mentre la differenza tra rette cosiffatte è la retta irrazionale detta* apotome.

Ebbene: Euclide passa alla somma, e alla differenza, anziché di due rette razionali, di due rette mediali: anche queste soddisfacenti alla condizione di essere commensurabili soltanto in potenza. Si ottengono altre due rette irrazionali: anzi quattro, perché ciascuna delle due si suddivide a sua volta in due specie.

Precisamente: addizionando quelle due rette mediali si ottiene la retta irrazionale detta bimediale (*come dire:* binomiale

di mediale), *mentre sottraendole si ha la cosiddetta* apotome di mediale.

La bimediale si suddivide in prima bimediale (*se le due rette che la generano formano un rettangolo che sia razionale*) *e in* seconda bimediale (*se le due rette formano un rettangolo che sia area mediale*). *In modo del tutto simile l'apotome di mediale si suddivide in* prima e seconda (*apotome di mediale*). *Volendo esprimere coi nostri simboli, che si riferiscono alle lunghezze, queste quattro linee irrazionali, abbiamo:*

$$\sqrt{a\sqrt{b}} \pm \sqrt{c\sqrt{b}}$$

con abc *quadrato perfetto per la* prima *bimediale e la* prima *apotome di mediale, con* abc *non quadrato perfetto per le altre due rette* (le seconde). *Si osservi però che dove noi riuniamo i due casi* (*della binomiale e dell'apotome*) *mediante il doppio segno, e così per le rette irrazionali che ne derivano, Euclide, che non usa formule e svolge l'argomento soltanto per via geometrica, tratta separatamente i due casi, sicché abbiamo il segno + dalla prop. 36 alla 72, e il segno — dalla prop. 73 alla 111.*

Questo spezzarsi del testo, dopo una parte introduttiva generale, in due metà simmetriche, l'una corrispondente alla somma, l'altra alla differenza, ha pure un suo suggestivo aspetto. Ci viene in mente la simmetria mirabile di un tempio greco, con l'immagine di due colonne uguali che reggano un architrave. E in altro campo artistico ci viene fatto di pensare allo schema di una classica sinfonia, nella quale i temi principali vengono, col loro svolgimento, due volte all'ascolto.

E a chi questi riferimenti trovasse esagerati, risponderemmo esortando a leggere questo titanico libro decimo.

Euclide, dopo l'introduzione delle prime sette rette irrazionali, abbandona la coppia di rette commensurabili solo in potenza e passa alla considerazione di una coppia di rette non soltanto incommensurabili in lunghezza, ma anche in potenza. Si dà luogo a sei nuove rette irrazionali, che con le rette precedenti completano il quadro delle famose tredici *rette*

irrazionali euclidee. Naturalmente, in perfetta simmetria, tre delle nuove rette si riferiscono alla somma e tre alla differenza.

Perché tre rette diverse per la somma di due rette incommensurabili in potenza?

Vediamo appunto quali sono i casi che Euclide distingue nell'addizione di due rette incommensurabili tra loro anche in potenza. Anzitutto: le due rette non possono essere ambedue razionali, altrimenti i loro quadrati dovrebbero essere ambedue commensurabili col quadrato della retta razionale di partenza, e quindi sarebbero commensurabili tra loro (X, 12). Pertanto le due rette sarebbero commensurabili in potenza.

Entrano ora in gioco le due proprietà che abbiamo chiamato area razionale *e* sommabilità pitagorica.

E poiché, s'è visto, due rette che dan luogo all'area razionale o alla sommabilità pitagorica sono ambedue razionali o ambedue irrazionali, segue che tutte le volte che le rette ora considerate soddisfano ad una delle due proprietà suddette, devono essere ambedue irrazionali. E ricordando che, dovendo considerare un'area irrazionale, Euclide si limita a considerare un'area mediale, avremmo le seguenti possibilità:

1) *sommabilità pit. e area razionale;*
2) *sommabilità pit. e area mediale;*
3) *non sommabilità pit. e area razionale;*
4) *non sommabilità pit. e area mediale.*

Ma la prima possibilità non viene considerata da Euclide: e ciò perché essa dà luogo ad una retta razionale, e non ad una retta irrazionale.

Infatti date due rette a, b, *se deve essere* $q(a) + q(b) = q(c)$ *con* $q(c)$ *razionale (sommabilità pitagorica) e dovendo essere* $r(a, b)$ *pure razionale (per la proprietà, supposta valida, dell'area razionale) è pure razionale* $2r(a, b)$, *e quindi risulta razionale la somma:*

$$q(a) + q(b) + 2r(a, b) = q(a + b)$$

Dunque è razionale la somma $a + b$ *delle due rette: ecco perché Euclide esclude questo caso nella sua* scoperta *ed enumerazione delle rette irrazionali.*

Passiamo ora al secondo caso: sommabilità pitagorica, ma area irrazionale (cioè, unico caso che Euclide considera, area mediale). Nella X, 33 viene eseguita la costruzione di due rette a, b *che soddisfino a tutti i requisiti suddetti, mentre nella X, 39 viene dimostrato che la somma* a + b *è una retta irrazionale, che vien chiamata* maggiore (μείζων): *ciò evidentemente in contrapposto alla retta irrazionale detta* minore (ἐλάσσων) *che è la differenza* a — b (*X*, *76*).

Nel terzo caso si ha la non-sommabilità pitagorica e l'area razionale (v. X, 34 e X, 40). La somma è una retta irrazionale a + b, *il quadrato della quale è:*

$$q(a) + q(b) + 2r\,(a, b)$$

Ma la somma q(a) + q(b) *è supposta in questo caso irrazionale (e più precisamente area mediale) mentre* 2r (a, b), *è per ipotesi, razionale. Quindi la retta irrazionale* a + b *ha il suo quadrato che è somma di un'area mediale e di un'area razionale; essa non riceve da Euclide un nome particolare, ma viene indicato per mezzo della proprietà in questione: viene detta cioè:* « retta potenziante un'area razionale più un'area mediale » (ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη). *La differenza* a-b (*anche essa irrazionale*) *viene detta* « retta potenziante la differenza tra un'area mediale e un'area razionale » (ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα; *letteralmente:* « *retta che con un'area razionale forma il tutto area mediale* ») (*X*, *77*).

Nell'ultimo caso abbiamo due rette a, b *che non soddisfano né alla sommabilità pitagorica né alla condizione dell'area razionale: come al solito, Euclide suppone allora che* q(a) + + q(b) *sia area mediale, e sia area mediale anche* r(a, b).

In sostanza, questa limitazione di Euclide, che come area irrazionale, da combinare con altre, considera soltanto quella mediale, significa che egli vuol limitarsi a quelli che in termini moderni chiamiamo radicali quadratici (anche se sovrapposti).

Si comprende dunque l'inevitabile insuccesso *di Leonardo Pisano, il Fibonacci, il quale all'inizio del secolo XIII, nella sua breve opera che porta il titolo* Flos, *ricerca tra le linee irrazionali del libro decimo di Euclide la radice di un'equazione generale di terzo grado. Ma fu forse proprio l'inevitabile* in-

successo *di Leonardo Pisano che, più di due secoli dopo, diresse le ricerche verso i radicali cubici, con i quali, all'inizio del secolo XVI, venne nella scuola bolognese risolta in linea generale l'equazione di terzo grado.*

Tornando al caso della linea da considerare (somma a + b), *con* q(a) + q(b) *area mediale,* e r(a, b) *pure area mediale si ha coi nostri simboli:*

$$a^2 + b^2 = \sqrt{p} \qquad ab = \sqrt{q}$$

quindi:

$$(a + b)^2 = \sqrt{p} + 2\sqrt{q}$$

e pertanto:

$$a + b = \sqrt{\sqrt{p} + 2\sqrt{q}}$$

Si tratta dunque di una irrazionalità che, sotto un segno di radice quadrata, presenta la somma di due radicali quadratici. Perché, però, effettivamente si abbia la somma di due radicali sotto il segno di radice, occorre che non si abbia, ad esempio: $\sqrt{p} = \frac{m}{n}\sqrt{q}$ *altrimenti il radicando-somma verrebbe espresso da un unico radicale:*

$$\sqrt{p} + 2\sqrt{q} = \left(\frac{m}{n} + 2\right)\sqrt{q}$$

Ciò equivale a dire che la somma q(a) + q(b) *e il rettangolo* r(a, b) *(che abbiamo espresso rispettivamente con* $\sqrt{p}$ *e* $\sqrt{q}$*) siano incommensurabili tra loro. Ecco perché Euclide aggiunge proprio questa condizione. Egli non dà neppure in questo caso un nome particolare alla retta irrazionale* a + b, *ma usa la circonlocuzione:* « retta potenziante la somma di due aree mediali » (δύο μέσα δυναμένη) (*X, 41*). *Similmente per la differenza* a — b *sotto le stesse condizioni: si ha così* (*X, 78*) *la retta irrazionale* « potenziante la differenza tra due aree mediali », *ossia retta tale che il suo quadrato, aggiunto ad un'area mediale, dà come somma un'area mediale* (ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα).

Diamo qui di seguito un riassunto:

LE TREDICI RETTE IRRAZIONALI DI EUCLIDE
(irrazionalità euclidee)

1) *mediale; coi nostri simboli:* $\sqrt{a\sqrt{b}}$
2) *binomiale:* $a + \sqrt{b}$
3) *apotome:* $a - \sqrt{b}$
4) *prima bimediale:* $\sqrt{a\sqrt{b}} + \sqrt{c\sqrt{b}}$ } *con* abc *numero quadrato*
5) *prima apotome di mediale:* $\sqrt{a\sqrt{b}} - \sqrt{c\sqrt{b}}$ }
6) *seconda bimediale:* $\sqrt{a\sqrt{b}} + \sqrt{c\sqrt{b}}$ } *con* abc *numero non quadrato*
7) *seconda apotome di mediale:* $\sqrt{a\sqrt{b}} - \sqrt{c\sqrt{b}}$ }
8) *maggiore:* $\sqrt{r + \sqrt{s}}$
9) *minore:* $\sqrt{r - \sqrt{s}}$
10) *retta potenziante un'area mediale più un'area razionale*
11) *retta potenziante un'area mediale meno un'area razionale*
12) *retta potenziante la somma di due aree mediali incommensurabili tra loro*
13) *retta potenziante la differenza di due aree mediali incommensurabili tra loro.*

Per le espressioni in nostri simboli delle rette irrazionali 8-13 (cioè dalla maggiore *in poi) si veda la* Nota alle nove costruzioni di coppie di rette, *che precede la X, 27, e inoltre si vedano le note alle proposizioni singole che introducono quelle rette irrazionali.*

Per completare il quadro, occorre aggiungere che tanto la retta binomiale quanto l'apotome si suddividono ciascuna in sei specie, che vengon distinte tra loro mediante un numero ordinale, da prima a sesta. *Per tale distinzione, rimandiamo il lettore alle note apposite. Ci limitiamo qui a dire che questa distinzione, invero assai sottile, trova il suo vero significato se si considerano le varie specie di binomiali (o di apotomi) come altezze di rettangoli a base razionale. I quadrati equivalenti a detti rettangoli hanno rispettivamente per lato ciascuna delle dodici rette irrazionali (cioè di tutte, ad esclusione della mediale).*

Per esempio: un rettangolo avente per base una retta razionale e per altezza una prima binomiale *è equivalente ad un quadrato avente per lato una generica* binomiale: *se l'altezza è una* seconda binomiale *il quadrato equivalente al rettangolo ha per lato una* prima bimediale, *e così via nell'ordine.*

Accenniamo ancora ad un punto importante: Euclide dimostra l'univocità di generazione delle sue rette irrazionali. Così, per esempio, data una retta binomiale AB, *generata dall'addizione di due rette razionali* AC, CB, *commensurabili solo in potenza, non è possibile che essa venga generata da altre due tali rette diverse da* AC, CB: *la posizione del punto* C *è univocamente fissata. E similmente per tutte le altre rette irrazionali.*

Ma il libro decimo tratta anche, nella prop. 17, di una importante questione che si ricollega al problema dell'applicazione ellittica delle aree, trattato già nel libro secondo (prop. II, 5) e nel libro sesto (prop. VI, 28): cioè, usando il nostro linguaggio, si ricollega alla risoluzione di equazioni di secondo grado. E precisamente la X, 17 dà una condizione necessaria e sufficiente perché un'equazione di secondo grado abbia le sue due radici razionali. Si viene così a completare la trattazione sull'argomento. Si parte da due rette p, q: *su una di esse* (p) *si vuole applicare ellitticamente un'area uguale al quadrato* q^2 *di* q (*cioè si vuole costruire un rettangolo* uguale *al quadrato* q^2 *e avente per base una parte* x *di* p, *l'altra parte* p — x *essendo l'altezza del rettangolo. Si vuole cioè, diciamo noi, risolvere l'equazione di secondo grado:*

$$x(p - x) = q^2$$

Nel libro secondo (II, 5) si è trovato che l'area q^2 *da applicare non può superare il quadrato* $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ *costruito sulla metà della retta data* p: *risultato che viene reso esplicito, e generalizzato, nel libro sesto (VI, 27).*

La II, 5 contiene anche il procedimento risolutivo che viene pure reso esplicito nel libro sesto (VI, 28).

Nel libro decimo, come s'è già detto, il problema è un altro: trovare le condizioni necessarie e sufficienti perché le due parti

x *e* $p - x$ *nelle quali la retta data* p *viene divisa siano commensurabili (in lunghezza) tra loro, ossia perché le due radici* x, $p - x$ *dell'equazione sopra scritta siano numeri razionali.*

È opportuno chiarire che se x *è una delle due radici dell'equazione, l'altra è* $p - x$, *dovendo la somma delle due radici essere uguale a* p. *Cioè le due radici corrispondono alle due parti nelle quali la retta* p *viene divisa dall'applicazione ellittica. Che le due parti siano commensurabili (in lunghezza) equivale a dire che le due radici sono numeri razionali, cioè che i radicali della formula risolutiva sono apparenti, risultando che il discriminante dell'equazione è un quadrato perfetto.*

Ossia, partendo dall'equazione: $x(p - x) = q^2$ *ovvero:*

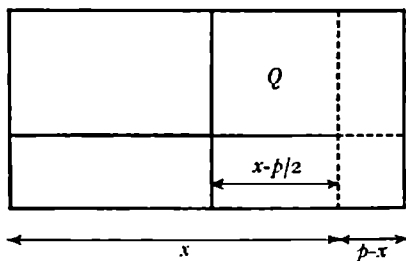
$$x^2 - px + q^2 = 0$$

si ha:

$$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q^2}$$

Perché le due radici dell'equazione siano numeri razionali occorre e basta che il discriminante $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q^2$ *sia un quadrato perfetto.*

Vediamo ora quale è la condizione che trova Euclide nella X, 17.

Supponiamo che il rettangolo $r(x, p - x)$ *disegnato in figura risolva il problema, cioè abbia l'area data. Se* x, $p - x$ *devono essere commensurabili tra loro, con ciascuno di essi risulterà commensurabile anche la loro somma (X, 15), che è* p. *Possiamo anche dire che* x *deve risultare commensurabile (in lunghezza) con* $p/2$. *Osserviamo ora che il lato del quadrato Q è:*

$x - \frac{p}{2}$. *Quindi, essendo* $p/2$ *commensurabile con sé stesso, anche la differenza* $x - p/2$, *cioè il lato del quadrato Q, risulta*

commensurabile con $p/2$ *e pertanto anche con* p. *E inversamente, se il lato* $x - p/2$ *di* Q *è commensurabile con* p *risulta che* x *è commensurabile con* p; *quindi anche con la differenza* $p - x$. *La commensurabilità tra* x *e* $p - x$ *si può esprimere dunque anche dicendo che il lato del quadrato deve essere commensurabile con* p: *le due condizioni risultano equivalenti tra loro. Ma (come si vede dalla II, 5 o anche dal semplice esame della figura) il quadrato* Q *è la differenza tra* $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ *e l'area che è stata applicata. Ci conviene allora (per trovare una relazione semplice tra le due rette date* p, q) *considerare come area da applicare non già il quadrato* q^2, *ma quello* $\left(\frac{q}{2}\right)^2$ *costruito sulla metà di* q: *in altri termini, consideriamo come seconda retta data* q *il doppio di quella finora considerata.*

In tal modo la commensurabilità tra x *e* $p - x$ *si traduce nel fatto che il quadrato della retta* $\frac{p}{2}$ *supera il quadrato della retta* $\frac{q}{2}$ *(cioè l'area applicata) del quadrato* Q *di una retta commensurabile (in lunghezza) con* p *ossia con* $\frac{p}{2}$. *Vale a dire: le due rette* $p/2$ *e* $q/2$ *sono commensurabili pitagoricamente: tali sono, dunque, pure le due rette* p, q *(come si vede quadruplicando i quadrati prima considerati).*

In definitiva: date due rette p, q *(con* $p > q$) *se sulla maggiore* p *si applica ellitticamente un'area uguale al quadrato costruito sulla metà della retta minore* q, *la retta maggiore* p *risulta divisa, per mezzo dell'applicazione, in due parti* x, $p - x$ *tra loro commensurabili in lunghezza se le due rette date* p, q *sono pitagoricamente commensurabili. E si può invertire il risultato.*

Cioè la nostra equazione è divenuta:

$$x(p - x) = \frac{q^2}{4}$$

ossia:

$$x^2 - px + \frac{q^2}{4} = 0$$

ed il risultato della X, 17 è che: $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{q^2}{4}$ *deve essere il quadrato di un numero razionale.*

Una così perfetta rispondenza della trattazione euclidea alle considerazioni aritmetiche relative alle equazioni di secondo grado sta a dimostrare (questo è il parere di Heath e di Enriques-Struick, che condividiamo) che presso i Greci venivano risolte anche numericamente dette equazioni[2].

Invitiamo ora ad iniziare senz'altro la lettura del grande *libro decimo!*

Soltanto consigliamo di fermare l'attenzione, durante la lettura, sulle nostre seguenti note:

1) Nota sull'uso di simboli aritmetici per facilitare la lettura del libro decimo (pp. 587-589).

2) Nota alle nove costruzioni di coppie di rette (X, 27-35), (pp. 652-660).

3) Nota sulla univocità della generazione delle rette irrazionali (pp. 688-691).

4) Nota sulle sei rette binomiali e sulle sei apotomi (pp. 703-712).

5) Nota sulla seconda parte del libro decimo (pp. 763-766).

Le suddette note hanno carattere esplicativo, così come anche quelle a piè di pagina, numerate progressivamente da 1 a 36.

A. F.

[2] Cfr. A. Fraiese, *Algebra araba o algebra greca?*, in « Cultura e scuola », n. 29, gennaio-marzo 1969, pp. 201-206.

NOTA SULL'USO DI SIMBOLI ARITMETICI PER FACILITARE LA LETTURA DEL LIBRO DECIMO

Per distinguere bene l'una dall'altra le tredici rette irrazionali che Euclide introduce nel libro decimo degli *Elementi* può essere opportuno adoperare simboli aritmetici moderni, i quali valgano ad esprimere le *lunghezze* delle singole linee irrazionali, e quindi si servano di numeri, razionali o irrazionali.

Avvertiamo però il lettore che questi simboli vengono da noi qui dati unicamente per facilitare la lettura: ciò porta come conseguenza che useremo simboli quanto più semplici sia possibile, anche a scapito della generalità. Talvolta, cioè, i simboli introdotti si riferiranno soltanto a casi particolari delle rette irrazionali considerate: varranno cioè solo a titolo d'esempio, senza alcuna pretesa di completezza e, ripetiamo, di generalità. Ma tant'è: anche un esempio particolare potrà servire come elemento chiarificatore assai meglio di una formula generale, ma complicata. Perché allora, complicazione per complicazione, tanto varrebbe limitarsi a leggere la trattazione geometrica di Euclide. Saranno quindi estranee al nostro intendimento discussioni del tipo di quella pur sottile, che, nell'edizione in lingua russa degli *Elementi di Euclide*, viene svolta nel senso di critica alla pur complicatissima traduzione simbolica di T. L. Heath (*Gli Elementi di Euclide*, libri VII-X, a cura di D. D. Mordukhai-Boltovski e J. N. Veselovski, Mosca-Leningrado, 1949).

Anzitutto: se *esprimiamo* con numeri la formazione, la costruzione (per dir così) delle rette irrazionali euclidee, ciò vuol dire che ci riferiamo alle *lunghezze* delle rette stesse. Ma « lunghezze » rispetto a quale unità di misura? Sceglieremo come unità di misura una retta comm.le in lunghezza con la retta che si è assunta in partenza come razionale (la ῥητή della definizione terza del libro decimo). Sicché la lunghezza di qualunque retta comm.le in lunghezza con la razionale di partenza sarà un numero razionale. Potremo anzi far di più: scegliendo opportunamente l'unità di misura potremo per tutte le linee comm.li in lunghezza con la razionale di partenza esprimere le lunghezze mediante numeri interi. Ciò, s'intende, per le linee considerate per ciascuna questione. Così se indichiamo con a, b le lunghezze di due linee

comm.li tra loro in lunghezza, e comm.li pure in lunghezza con la razionale di partenza, potremo supporre che a, b siano numeri interi. Ciò non toglie che la lunghezza di una linea comm.le in lunghezza con a venga in generale espressa da $\frac{m}{n} a$, dove m, n sono numeri interi. Avvertiamo poi, per qui e per il séguito, che per brevità parleremo anche di rette a, b, $\frac{m}{n} a$, sottintendendo il riferimento alle « lunghezze ».

Come indicheremo due rette comm.li soltanto in potenza? Potremo indicarle in tre modi:

1) $a, \sqrt{b}$ 2) $\sqrt{a}, b$ 3) $\sqrt{a}, \sqrt{b}$

Infatti, supponendo che i numeri scritti sotto i segni di radice non siano numeri quadrati (e per il terzo caso supponendo che a, b siano primi tra loro), le linee risultano certamente incommensurabili in lunghezza. Ma risultano comm.li in potenza: infatti sono comm.li i quadrati su di esse costruiti (le aree dei quali sono rispettivamente a^2, b; a, b^2; a, b).

Per quel criterio di semplicità al quale abbiamo sopra accennato, noi, sia pure a scapito della generalità, indicheremo la somma di due tali rette (cioè la retta irrazionale detta *binomiale*) col simbolo $a + \sqrt{b}$, tranne che non vi siano ragioni particolari per preferire altra espressione. E così un'area mediale, cioè l'area del rettangolo compreso da due rette razionali comm.li solo in potenza, verrà espressa dal prodotto $a\sqrt{b}$, sicché la *retta mediale* (lato del quadrato equivalente a detto rettangolo, ossia media proporzionale fra i lati del rettangolo stesso) sarà espressa dal radicale doppio $\sqrt{a\sqrt{b}}$.

E poiché gli *ingredienti* usati da Euclide nel libro decimo si riferiscono sempre alla commensurabilità (o incommensurabilità) in lunghezza o in potenza, e la commensurabilità in potenza è la commensurabilità dei quadrati costruiti sulle rette, si vede fin da ora che tutte le nostre espressioni aritmetiche conterranno soltanto radicali quadratici, anche sovrapposti. La trattazione geometrica delle rette irrazionali svolta da Euclide nel libro decimo dei suoi *Elementi* si traduce dunque per noi nella considerazione di espressioni contenenti esclusivamente radicali quadratici.

Leonardo Pisano dimostrerà, agli inizi del secolo XIII, nella sua breve opera intitolata *Flos*, che con le *irrazionalità euclidee* non è possibile risolvere un'equazione generale di terzo grado: si aprirà così la via alla ricerca della soluzione di detta equazione attraverso radicali cubici: ciò che verrà poi compiuto agli inizi del secolo XVI dalla scuola bolognese.

A. F.

DEFINIZIONI

I. Si dicono grandezze commensurabili quelle che sono misurate da una[a] stessa misura, ed incommensurabili quelle di cui non può esistere nessuna misura comune[1].

a. Letteralmente: dalla.

[1] In questa prima definizione Euclide si rivolge a grandezze *in generale*: altrettanto fa in alcune tra le prime proposizioni di questo libro decimo.

Le altre definizioni (cioè dalla seconda alla quarta) e le altre proposizioni (dalla decima fino all'ultima, cioè fino alla centoquindicesima con esclusione soltanto di altre cinque!) si rivolgono ad una particolare classe di grandezze, cioè ai segmenti di retta, che Euclide, come al solito, chiama semplicemente *rette*.

E le grandezze *in generale* sono, per dir così, le stesse del libro quinto: infatti Euclide suppone che per esse valga la definizione quarta di detto libro; si tratta cioè di classi di grandezze omogenee che soddisfano al postulato di Archimede. Ciò si rivela già nella prima proposizione (la X, 1) nella quale detto postulato viene utilizzato. Euclide, quindi, anche nel libro decimo esclude quelle grandezze che ha escluso nel libro quinto, cioè quelle non soddisfacenti al postulato di Archimede: ad esempio gli angoli curvilinei (si vedano le note alla V, def. 4 e alla III, 16).

Naturalmente anche le rette (le quali, s'è detto, costituiscono una particolare classe di grandezze) soddisfano al postulato di Archimede: quindi anche ad esse, così come alle grandezze « in generale » considerate nelle prime proposizioni del libro decimo, sono applicabili i risultati del libro quinto.

Come si vede, dunque, il libro decimo si riannoda immediatamente al libro quinto. Il legame si constata anche attraverso questa prima definizione, che si ricollega alla prima definizione del libro quinto.

In quest'ultima è detto che una grandezza minore è parte della maggiore *quando la misura*. Qui nella X def. 1 si fa appello al concetto di

II. Sono commensurabili in potenza[a] rette tali che i quadrati su esse costruiti possano venir misurati da una stessa[b] area, ed incommensurabili in potenza quando i loro quadrati non ammettono[c] nessuna area come misura comune[2].

a. Letterale; il greco dice δυνάμει σύμμετροι.

b. Come nel caso indicato sopra, def. I, letteralmente è *dalla*; la nostra avvertenza vale pure per tutti i luoghi similari.

c. Letteralmente: quando, rispetto ai quadrati, di esse non può esservi.

misura per distinguere le grandezze commensurabili (ossia che ammettono una misura comune) dalle grandezze incommensurabili (che non ammettono alcuna misura comune).

Nel libro decimo, appunto, si distingue la commensurabilità dall'incommensurabilità, e nel caso delle rette si entra anche in distinzioni di specie diverse di incommensurabilità, come vedremo. Nessuna distinzione del genere si ha invece nel libro quinto, le definizioni e le proposizioni del quale (con l'eccezione delle prime) si riferiscono indifferentemente al caso commensurabile ed a quello incommensurabile insieme, come è tipicamente visibile già dalla famosa definizione quinta (di detto libro quinto) di grandezze che sono a due a due nello stesso rapporto. (V. nota alla V, def. 5).

[2] A partire da questa definizione seconda Euclide si rivolge a quelle particolari grandezze costituite delle rette (cioè dai nostri segmenti di retta) e ne approfondisce il confronto in modo assai raffinato. Un esempio di questa « finezza » si rileva già da questa seconda definizione, nella quale viene distinta, per le rette, l'incommensurabilità in lunghezza dall'incommensurabilità in potenza.

La prima è l'incommensurabilità nel senso comune del termine, cioè l'inesistenza di un segmento (« retta » per Euclide) che misuri entrambe le *rette* date. Il termine usato da Euclide è ἀσύμμετροι (*asýmmetroi*), del quale il termine latino *incommensurabiles* è la traduzione letterale.

La novità della def. II consiste nell'introduzione per le rette del concetto di commensurabilità, o incommensurabilità, in potenza (δυνάμει = *dynàmei*). Due rette sono commensurabili in potenza se i quadrati su di esse costruiti sono commensurabili tra loro: ciò anche se le rette sono incommensurabili in lunghezza. Esempio classico: il lato e la diagonale di qualsiasi quadrato sono, come è noto, incommensurabili tra loro (in lunghezza, cioè nel senso ordinario), ma sono invece commensurabili tra loro in potenza. Infatti il quadrato costruito sulla diagonale è doppio del quadrato di partenza: quindi i due quadrati ammettono una misura comune, cioè sono commensurabili (ad esempio, la massima comune misura tra i due quadrati è costituita dal quadrato minore, il quale misura sé

III. Ciò premesso si dimostra che, rispetto ad una qualunque retta assunta come data [a], esistono in quantità infinita [b] rette commensurabili e rette incommensurabili con essa: queste ultime [c] o incommensurabili soltanto in lunghezza, od anche in potenza. Si chiami dunque razionale la retta che si assume come data in partenza, e razionali le rette con questa commensurabili, sia in lunghezza ed in potenza, sia soltanto in potenza, e si chiamino invece irrazionali quelle che sono incommensurabili con essa [tanto in lunghezza quanto in potenza][3].

a. Letteralmente sarebbe piuttosto « proposta, propostasi » nel senso di *che venne proposta* (προτεθείσῃ); ciò si intende esteso a tutti i casi in cui traduciamo col verbo *assumere* (come data, o dato), di cui abbiamo altrove già fatto uso per equivalente al greco ἐκκεῖσθαι, verbo da Euclide pure adoperato.

b. Letteralmente: esistono rette infinite di numero (πλήθει, di numero complessivo) commensurabili rispetto alla retta proposta ed incommensurabili, le une soltanto in lunghezza, le altre anche in potenza.

c. Il termine è nostro, evidentemente, e lo potremo adoperare altre volte.

stesso e misura anche il quadrato maggiore, nel quale è contenuto esattamente due volte).

L'incommensurabilità in potenza richiede dunque qualcosa di più, oltre l'incommensurabilità in lunghezza; come si vede nella seguente definizione terza, è sull'incommensurabilità in potenza che Euclide si fonda per la sua definizione di rette irrazionali.

Questo *raffinamento*, per le rette, del concetto di incommensurabilità non è opera originale di Euclide: se ne trova traccia, infatti, già nel famoso brano sugli *irrazionali* del dialogo platonico *Teeteto*. Si potrebbe forse attribuire proprio a questo matematico ateniese, Teeteto, contemporaneo di Platone. Ma su tutte le questioni collegate alle possibili interpretazioni del passo del dialogo *Teeteto* si vedano le note alla X, 9.

[3] Nella prima parte di questa definizione si espone quasi un programma per tutto il libro decimo.

Come è stato già detto, il libro decimo è pressoché completamente dedicato a quelle particolari grandezze che son costituite dalle *rette* (= segmenti di retta).

Euclide *promette* qui pertanto di dimostrare che, data una *retta* qualsiasi, ne esistono infinite con essa commensurabili, infinite altre con essa incommensurabili: parte soltanto in lunghezza, parte anche in potenza. Tanto per fissare le idee con un esempio, se sulla retta data si costruisce un quadrato, il perimetro di detto quadrato è commensurabile con essa,

IV. E razionale si chiami il quadrato della retta assunta come data, e pure razionali le aree commensurabili con esso, mentre si chiamino irrazionali quelle con esso incommensurabili, ed irrazionali si chiamino le rette che generano tali aree incommensurabili [a], e cioè, nel caso in cui quest'ultime siano quadrati, i loro stessi lati, se invece sono altre figure rettilinee, le rette che sono lati di quadrati ad esse uguali [4] [b].

a. Letteralmente: le rette che hanno di esse potenza.
b. Letteralmente: che descrivono, che possano descrivere.

mentre la diagonale è con essa incommensurabile soltanto in lunghezza ma commensurabile in potenza. Invece se si divide la retta data in media ed estrema ragione (vedi VI, 30 e II, 11), la maggiore delle due parti (la cosiddetta *sezione aurea*) è incommensurabile con la retta data non soltanto in lunghezza, ma anche in potenza (ciò viene dimostrato da Euclide nella prop. 6 del libro tredicesimo). Che poi esistano *infinite* rette di ciascuna categoria si vede sùbito considerando ad esempio, tutti i possibili multipli delle rette di ciascuna categoria: rispettivamente (tanto per fornire un esempio) multipli del perimetro del quadrato, della diagonale del quadrato, della sezione aurea della retta data.

Ed Euclide chiama *razionale* la retta data, e chiama *razionali* pure tutte le rette che con la data siano commensurabili in potenza, anche se siano con essa incommensurabili in lunghezza. Perché una retta si dica irrazionale (ἄλογος = *àlogos*) occorre che essa sia incommensurabile con la data razionale non soltanto in lunghezza, ma anche in potenza. Per tornare all'esempio dato prima, se sulla retta razionale di partenza si costruisce un quadrato, tanto il perimetro di questo quanto la sua diagonale sono *razionali*. È *irrazionale*, invece la sezione aurea della retta data.

[4] Per analizzare questa complessa definizione, riferiamoci anzitutto a quella sua parte che riguarda esclusivamente i quadrati. Si comincia col considerare la retta data, assunta come *razionale* di partenza. Se su di essa si costruisce il quadrato, questo è detto *razionale* (in sostanza è l'area *razionale* di partenza, con la quale verranno confrontate le altre aree). Ma anche qualunque quadrato che sia commensurabile con quello «*razionale di partenza*» è detto *razionale*.

Invece qualunque quadrato che sia incommensurabile con quello *razionale di partenza* è detto *irrazionale*.

Il lato di un tale quadrato irrazionale è una retta irrazionale: infatti essa è incommensurabile in potenza con la retta *razionale di partenza*. Per estendere la definizione a figure piane qualunque, nessuna difficoltà per quanto riguarda la loro razionalità o irrazionalità: il primo caso si verifica quando la figura è commensurabile col quadrato *razionale di partenza*: il secondo caso quando la figura è con essa incommensurabile.

L'unica difficoltà sorge quando si considera l'ultima parte della defi-

nizione euclidea. Si tratta di questo: una figura piana qualsiasi sia irrazionale, e si costruisca il quadrato ad esso equivalente (v. nota alla II, 14).

Euclide dice che il lato di un tal *quadrato equivalente* è una linea irrazionale. Ciò vuol dire, in base a quanto già contenuto nella definizione, che quel tal *quadrato equivalente* è esso stesso irrazionale.

Ora ciò comporta un'ammissione che da Euclide è taciuta: che una trasformazione per equivalenza ammetta come invariante l'incommensurabilità con una figura data.

Del resto, ciò risponde all'intuizione (chiara in Euclide) che nella relazione di uguaglianza (= *equivalenza*) per le figure piane e solide c'è qualcosa che non varia e che è collegata alla *quantità* (πηλικότης): quella quantità alla quale (secondo la definizione terza del libro quinto) si riferisce il rapporto tra due grandezze. Ed al rapporto, a sua volta, si riferisce la relazione di commensurabilità o di incommensurabilità, a seconda che le due grandezze stiano, o non stiano, tra loro, come un numero (intero) ad un altro numero (intero), come è mostrato nelle proposizioni 5, 6, 7, 8 di questo libro decimo.

PROPOSIZIONI

PROPOSIZIONE I.

[Assumendosi come] date due grandezze disuguali, se si sottrae dalla maggiore una grandezza maggiore della metà, dalla parte restante un'altra grandezza maggiore della metà, e così si procede successivamente[a], *rimarrà una grandezza che sarà minore della grandezza minore [inizialmente] assunta*[1].

Siano AB, C due grandezze disuguali, e di esse AB sia maggiore; dico che, se da AB si sottrae una grandezza mag-

a. Letteralmente: e questo procede sempre di séguito.

[1] Questa prima proposizione del libro decimo (così come alcune proposizioni seguenti) si rivolge a grandezze qualunque nel senso del libro quinto, nel quale si considerano classi di grandezze omogenee che soddisfano al postulato di Archimede. La rappresentazione di tali grandezze vien fatta, nel disegno, mediante segmenti di retta, ma essa è semplicemente simbolica. Va osservato pure che talvolta Euclide indica una grandezza con una sola lettera maiuscola; talvolta, invece, con riferimento alla rappresentazione simbolica mediante *rette*, la grandezza viene indicata con due lettere maiuscole, estremi del segmento di retta rappresentatore.

In questa proposizione son date due grandezze disuguali AB, C (inutile dire che si tratta di grandezze omogenee, tra le quali quindi possono stabilirsi relazioni di uguaglianza o di disuguaglianza in senso determinato).

Il teorema afferma che operando convenientemente sulla grandezza maggiore AB si può determinare (in certo senso estrarre da essa) una grandezza minore della minore C. Dato che possiamo fissare C *piccola* quanto ci piace, ciò significa che essa non può essere grandezza *minima* tra quelle della sua classe: che cioè esiste sempre il più piccolo del piccolo.

In questo senso la X, I può riannodarsi al terzo frammento di Anassagora (il filosofo e matematico vissuto all'incirca tra il 500 e il 425 a. C.): *Rispetto al piccolo, non c'è un minimo, ma c'è sempre un ancor più piccolo. Ma anche rispetto al grande c'è sempre un ancor più grande* (cfr. A. FRAJESE, *Attraverso*, ecc. *op. cit.*, p. 199).

Come procede la dimostrazione? Si costruisce un multiplo DE della grandezza *minore* C tale che sia maggiore della grandezza maggiore AB.

È possibile far ciò perché le grandezze considerate soddisfano appunto al postulato di Archimede.

Naturalmente il multiplo DE si ottiene, nella rappresentazione simbolica, riportando più volte di séguito il segmento C: nel disegno s'è

giore della metà, dalla parte restante un'altra grandezza maggiore della metà, e così si procede successivamente, rimarrà una grandezza che sarà minore della grandezza *C*.

Infatti, venendo *C* moltiplicata (cioè, riportata più volte di séguito), finirà per essere maggiore di *AB* (V, def. IV). Si moltiplichi [appunto] *C*, e sia *DE* multipla di *C*, e maggiore di *AB*. Si divida *DE* nelle parti uguali a *C*, cioè *DF*, *FG*, *GE*, si sottragga da *AB* la grandezza *BH* maggiore della metà, da *AH* la grandezza *HK* maggiore della metà, e così si proceda successivamente, fino a che le parti (disuguali) di *AB* siano uguali in numero alle parti di *DE* [a].

Siano dunque *AK*, *KH*, *HB* parti (disuguali) in ugual numero delle parti *DF*, *FG*, *GE*; e poiché *DE* è maggiore di *AB*, da *DE* si è sottratta *EG* minore della metà, e da *AB* si è sottratta *BH* maggiore della metà, la grandezza rimanente *GD* è maggiore della rimanente *HA*. Ora, poiché *GD* è maggiore di *HA*, da *GD* si è sottratta la metà *GF*, e da *HA* la grandezza *HK* maggiore della metà, la grandezza rimanente *DF* è maggiore della rimanente *AK*. Ma *DF* è uguale a *C*; perciò anche *C* è maggiore di *AK*. Si ha quindi che *AK* è minore di *C*.

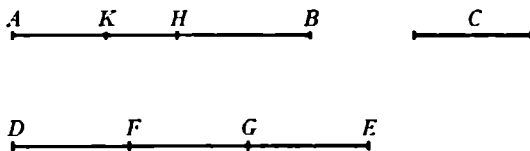
Dunque, della grandezza *AB* viene a rimanere la grandezza *AK* che è minore della grandezza minore *C* assunta come data: il che si doveva dimostrare. E ciò similmente si

a. Letteralmente: fino a che le divisioni (cioè, le parti divise) in *AB* vengano ad essere uguali per numero (il solito *numero complessivo*, τὸ πλῆθος) alle divisioni in *DE*.

supposto che basti riportarlo tre volte (in *DF*, *FG*, *GE*) perché *DE* superi *AB*.

Si procede, poi, su *AB* all'operazione indicata nell'enunciato: cioè si sottrae dapprima da *AB* metà o più della metà, cioè si sottrae *HB*. Dal segmento residuo *AH* si sottrae ancora metà o più della metà, cioè si sottrae *KH*: il residuo è *AK*. Ci si ferma a questo punto, perché *AB* è stata divisa in tante parti (*AK*, *KH*, *HB*: tre parti nel nostro caso) quante sono le volte che abbiamo dovuto riportare *C* per ottenere *DE*.

A questo punto si è ottenuto *AK* minore di *C*: infatti già *AB* è minore di *DE*, e mentre *DE* è divisa in tre parti uguali, *AB* è divisa in tre parti disuguali, la minore delle quali è *AK*; dunque $AK < DF$ ossia $AK < C$.

potrà dimostrare, anche se si sottraggono dalle grandezze le loro metà [a].

APPLICA: V, def. IV.

È APPLICATA IN: X, 2; XII, 2, 5, 10, 12, 16.

PROPOSIZIONE 2.

Se di due grandezze disuguali veniamo a sottrarre, sempre e vicendevolmente, la minore dalla maggiore [quante volte sia possibile], e quella [ogni volta] restante non misura mai la grandezza ad essa precedente, le grandezze saranno incommensurabili [2].

Infatti, siano date due grandezze disuguali *AB*, *CD*, sia *AB* la minore, e venendosi a sottrarre, sempre e vicende-

a. Letteralmente: anche se le parti sottratte siano metà.

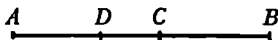
[2] Questa proposizione offre un mezzo per riconoscere che due grandezze sono incommensurabili. Si tratta del cosiddetto *algoritmo euclideo* del massimo comune divisore (cfr. la prop. 2 del libro settimo), applicato alle grandezze. Il procedimento consiste nel riportare quante volte possibile la grandezza minore sulla maggiore, il resto sulla minore, il secondo resto sul primo resto, e così via. Nella seguente proposizione X, 3 Euclide mostra che per le grandezze commensurabili (per le quali il procedimento ha termine) l'ultimo resto (cioè quello contenuto esattamente nel resto precedente) è la *massima comune misura* tra le due grandezze considerate.

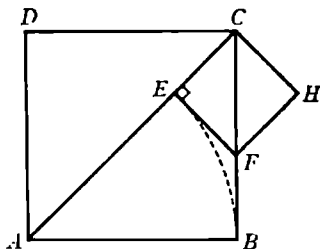
In questa proposizione X, 2, invece, si suppone che il procedimento non abbia mai termine: la tesi è che le due grandezze sono incommensurabili. La dimostrazione di questo teorema costituisce una immediata applicazione del teorema precedente X, 1: il procedimento che si segue nell'algoritmo euclideo risponde infatti alle condizioni della X, 1: cioè ogni volta che si riporta una grandezza minore (quante volte possibile) su una maggiore si viene a sottrarre dalla maggiore più della metà.

Il teorema X, 2 si rivolge dunque a grandezze che soddisfano al postulato di Archimede, applicato nella X, 1. Ma c'è un'altra caratteristica che le grandezze considerate presentano. Il fatto che il procedimento non

volmente, la minore dalla maggiore [quante volte sia possibile], la grandezza ogni volta rimanente non misuri mai quella che la precede; dico che le grandezze *AB*, *CD* sono

abbia mai termine, e che possa quindi essere spinto innanzi quanto si vuole, richiede che le grandezze siano *inesauribili per sottrazione*: ciò nel senso che sottraendo da una delle grandezze metà o più della metà, e ancora metà o più di metà dal resto, e così via, si possa continuare *quanto si vuole*: che vi sia sempre possibilità *di sottrarre ancora*.

Se consideriamo il caso particolare delle *rette*, questa *inesauribilità alla sottrazione* si esprime con una semplicissima proposizione: *Tra due punti di una retta è sempre possibile inserire almeno un punto intermedio*. Questa proposizione corrisponde alla *inesauribilità* della retta, cioè alla proprietà che un segmento di retta, per quanto piccolo, contiene infiniti punti (se tra *A* e *B* esiste almeno un punto intermedio *C*, tra *A* e *C* esiste almeno un punto intermedio *D*, e così via).

Quindi i punti, dovendo essere contenuti in numero infinito in un segmento finito, sono privi di dimensioni; in particolare privi di lunghezza. Siamo, quindi, alla concezione degli enti geometrici idealizzati. Ciò va dunque tenuto presente, se si vuole applicare la X, 2 alle *rette*.

Così, per esempio, volendo applicare la X, 2 alla dimostrazione della incommensurabilità del lato e della diagonale del quadrato, si riporta *AB* su *AC* in *AE*, poi il resto *EC* su *BC*. Ma siccome $EC = EF = BF$, già è stato riportato una volta *EC* mediante *BF*: occorre ora riportare ancora *EC* su quel che resta di *BC*, cioè su *FC*. Ma riportare *EC* su *CF* significa ancora riportare il lato sulla diagonale di un altro quadrato *EFHC*: il procedimento non ha quindi mai fine e pertanto, in base alla X, 2, lato e diagonale sono incommensurabili.

Ma il procedimento richiede che quei quadrati si possano andar impiccolendo sempre più, senza mai arrivare ad un *ultimo* quadrato: richiede cioè, che tra due punti (come *B*, *C*) di una *retta* si possa inserire sempre un punto intermedio (come *F*), cioè, in ultima analisi, richiede che la retta venga concepita come contenente infiniti punti privi di dimensioni. Se, quindi, l'introduzione degli enti idealizzati ebbe luogo come conseguenza della scoperta della prima coppia di linee incommensurabili (lato e diagonale del quadrato), la dimostrazione di tale incommensurabilità non poteva esser compiuta col metodo della X, 2 (fondato sugli enti idealizzati) senza commettere una specie di petizione di principio.

Questa potrebbe essere la spiegazione di uno strano fatto: che né presso Euclide, né presso altri matematici greci (almeno per quanto ce

incommensurabili. Se fossero commensurabili, difatti, una grandezza le misurerebbe. Le misuri, se possibile, e sia essa *E*; ora, *AB* misurando *FD* lasci *CF* minore di *AB* (cioè, di

ne è giunto) si trova la facile dimostrazione della incommensurabilità del lato e della diagonale del quadrato secondo il metodo dell'algoritmo euclideo della X, 2.

Eppure il metodo è esposto, in linea generale, nella X, 2 stessa, e fuorché per un'applicazione indiretta nella seguente X, 3, non viene mai più usato negli *Elementi*.

La dimostrazione della X, 2 è assai semplice. Secondo il Clavio, essa richiede alcune *assunzioni* che sono presupposte anche nel libro settimo per quelle particolari grandezze che son costituite dai numeri.

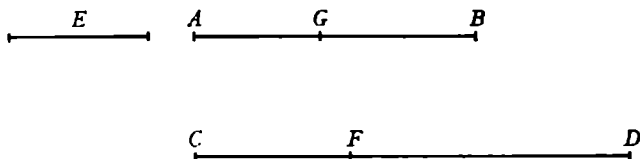
Rimandiamo per questo il lettore alla nota introduttiva al libro settimo, nella quale abbiamo mostrato che le suddette assunzioni sono, in realtà, applicazioni (sia pure senza un esplicito riferimento) di alcune proposizioni iniziali del libro quinto, che si rivolgono al caso del rapporto intero, cioè a quello nel quale, di due grandezze date, la minore *misura* la maggiore. Per la X, 2 le due cosiddette « assunzioni » sono le seguenti: 1) se a misura b ed inoltre misura c, segue che a misura c (una specie di proprietà transitiva della « relazione di *misura* ») – 2) Se a misura b, c (con $b > c$) segue che a misura anche la differenza $b - c$.

La dimostrazione della X, 2 procede così: date le due grandezze *AB*, *CD* si riporta la minore *AB* sulla maggiore *CD* quante volte sia possibile in *FD*, dando luogo al resto *CF*.

Si riporta poi *CF* su *AB* quante volte possibile in *GB*, con resto *AG*, e così via. Poiché per ipotesi il procedimento non ha mai termine, possiamo spingerlo avanti quanto vogliamo, e ad esso possiamo applicare il teorema precedente X, 1, dato che si va continuamente togliendo più della metà da ciascun segmento. Possiamo quindi giungere ad un resto (supponiamo che sia *AG*) minore di una qualunque grandezza assegnata; minore, ad esempio, di una grandezza *E* che (nell'intento di dimostrare per assurdo l'incommensurabilità di *AB*, *CD*) si sia supposto essere, se possibile, una misura comune di *AB*, *CD*. Ma è appunto impossibile che una tal misura comune *E* esista. Infatti se *E* misurasse *AB*, siccome *AB* misura *FD*, si ricaverebbe (per quella specie di proprietà transitiva sopra veduta) che *E* misurerebbe *FD*. Ma se (come si è supposto) *E* misura anche *CD*, segue che *E* misurerebbe anche la differenza $CD - FD = CF$ (ciò per la seconda proprietà sopra menzionata).

Dunque *E* misurerebbe *CF*, e siccome *CF* misura *GB*, la *E* dovrebbe misurare anche *GB*. Inoltre si è supposto che *E* misuri anche *AB*, quindi essa misurerebbe pure la differenza $AB - GB$ ossia *AG*. Ma il procedimento è stato spinto fino ad ottenere un resto (*AG* o altro che sia) minore di *E*, quindi *E* misurerebbe *AG* che è minore di essa: cosa assurda perché una grandezza maggiore non può misurarne una minore, non potendo essere contenuta in essa neppure una volta. È quindi impossibile che, se son verificate le condizioni dell'enunciato (cioè se è indefinitamente prolungabile il procedimento del cosiddetto algoritmo euclideo) le due grandezze

sé stessa)[a], e CF misurando BG lasci AG minore di CF (cioè, di sé stessa), e così si proceda di séguito, fino a che rimanga una grandezza la quale sia minore di E. Si sia ciò effettuato, e resti AG minore di E (X, 1). Poiché dunque E misura AB, ma AB misura DF, anche E misurerà DF. Ma E misura pure tutta quanta CD; misurerà quindi anche la rimanente CF. Ma CF misura BG; anche E misura perciò BG. Ma E misura pure tutta quanta AB; misurerà quindi anche la rimanente AG, ossia la grandezza maggiore misurerà la minore: il che è impossibile. Perciò un'altra grandezza non può misurare le grandezze AB, CD; le grandezze AB, CD sono quindi incommensurabili (X, def. I).

Dunque, se di due grandezze disuguali, eccetera.

APPLICA: X, 1.

È APPLICATA IN: X, 3.

a. Letteralmente sarebbe proprio *di sé stessa*, senza AB.

date AB, CD ammettano una qualsiasi misura comune E: le due grandezze son pertanto incommensurabili, come si doveva dimostrare. Concludiamo facendo osservare al lettore che il metodo dell'algoritmo euclideo della X, 2 viene presentato in forma generale, ma che per applicarlo a casi concreti (come s'è visto ad esempio, per il lato e la diagonale del quadrato), occorrono particolari accorgimenti, che evidentemente variano caso per caso.

Rimandiamo, per l'origine stessa della X, 2, alla nota alla X, 9: tuttavia fin d'ora diremo che con grande probabilità il metodo è quello seguito dal matematico Teodoro di Cirene, contemporaneo di Socrate. Ciò in relazione ad un celebre passo (147*c*-148*b*) del Dialogo *Teeteto*.

PROPOSIZIONE 3.

Date due grandezze commensurabili, trovare la loro massima misura comune[3].

Siano *AB*, *CD* le due grandezze commensurabili date, di cui *AB* sia la minore; si deve dunque trovare la massima misura comune di *AB*, *CD*.

Infatti, la grandezza *AB* o misura *CD* o non la misura. Se dunque la misura, mentre d'altra parte misura anche sé stessa, *AB* è misura comune di *AB*, *CD*; ed è evidente che è pure la massima. Difatti, una grandezza maggiore di *AB* non potrebbe misurare *AB*.

[3] In questa terza proposizione è contenuta la sola applicazione della precedente X, 2 che sia dato di trovare negli *Elementi*. Son date due grandezze commensurabili per ipotesi, e si applica ad esse il procedimento del cosiddetto algoritmo euclideo. Nella precedente X, 2 è stato dimostrato che se un tal procedimento non ha mai termine le due grandezze sono incommensurabili. In questa X, 3, nella quale si parte dall'ipotesi della commensurabilità, il procedimento ha certamente termine, perché se non l'avesse, le grandezze risulterebbero incommensurabili, contro l'ipotesi.

Euclide dimostra poi che l'ultimo resto (quello che misura il resto precedente) è la massima comune misura cercata. Si tratta della classica operazione di ricerca che per i numeri conduce al massimo comune divisore, come è dimostrato nella seconda proposizione del libro settimo.

Tornando al caso delle grandezze trattato in questo libro decimo, abbiamo dunque due proposizioni, una delle quali possiamo assumere come *diretta* (la X, 2), l'altra come *contronominale* (quella contenuta nel processo dimostrativo della X, 3).

Prop. diretta (X, 2): Se l'algoritmo euclideo non ha termine, le grandezze sono incommensurabili.

Prop. contronominale (in X, 3): Se le grandezze sono commensurabili, l'algoritmo euclideo ha termine.

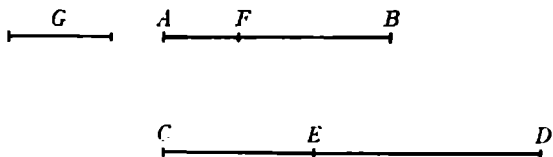
Ma valgono anche le altre due proposizioni (*inversa* e *contraria*), sicché si ha il *quadrilatero* completo (v. nota alla I, 17).

Infatti se l'algoritmo euclideo ha termine, esso conduce a trovare (con l'ultimo resto) la massima comune misura delle due grandezze, le quali pertanto risultano commensurabili (*contraria* della X, 2). E finalmente, se le due grandezze sono incommensurabili, il procedimento dell'algoritmo euclideo non ha mai termine (altrimenti le grandezze sarebbero commensurabili). È questa l'inversa della X, 2.

La X, 3 è seguita da un corollario (così come la X, 4) che trova applicazione altrove: esso risulta dalla ripetizione (in senso inverso, per dir così) del procedimento dimostrativo del teorema.

Sia adesso il caso in cui *AB* non misura *CD*. Ora, venendosi a sottrarre sempre e vicendevolmente la minore dalla maggiore, la grandezza restante finirà col misurare quella ad essa precedente, dato che *AB*, *CD* non sono incommensurabili (X, 2); sia allora *AB* che, misurando *ED*, lasci [il resto] *EC* minore di *AB* (cioè di sé stessa), mentre *EC*, misurando *FB*, lasci [il resto] *AF* minore di *EC* (cioè di sé stessa], ed *AF* misuri *CE*.

Poiché dunque *AF* misura *CE*, ma *CE* misura *FB*, anche *AF* misurerà *FB*. Ma *AF* misura anche sé stessa, per cui misurerà pure tutta quanta *AB*. Ma *AB* misura *ED*; anche *AF* quindi misurerà *ED*. Ma *AF* misura pure *CE*; misurerà perciò anche tutta quanta *CD*; quindi *AF* è misura comune di *AB*, *CD*. Dico ora che è pure la massima. Infatti, se non lo fosse, vi sarebbe una grandezza maggiore di *AF*, che misurerebbe *AB*, *CD*. Sia essa *G*. Poiché dunque *G* misura *AB*, ma *AB* misura *ED*, anche *G* misurerà *ED*. Ma *G* misura pure tutta quanta *CD*; quindi *G* misurerà anche la rimanente *CE*. Ma *CE* misura *FB*; pure *G* quindi misurerà *FB*. Ma *G* misura anche tutta quanta *AB*, e [perciò] misurerà la rimanente *AF*, ossia la grandezza maggiore misurerà la minore: il che è impossibile. Perciò una grandezza, che sia maggiore di *AF*, non può misurare *AB*, *CD*; quindi *AF* è la massima misura comune di *AB*, *CD*.

Dunque, date le due grandezze commensurabili *AB*, *CD*, è stata trovata la loro massima misura comune. – C.D.D.[a]

APPLICA: X, 2.

È APPLICATA IN: X, 4.

a. Qui la clausola C.D.D. non risulta posta dopo il corollario.

Corollario.

È da ciò evidente che, se una grandezza misura due altre grandezze, misurerà anche la loro massima misura comune.

È applicato in: X, 4.

Proposizione 4.

Date tre grandezze commensurabili, trovare la loro massima misura comune.

Siano *A*, *B*, *C* le tre grandezze commensurabili date; si deve dunque trovare la massima misura comune di *A*, *B*, *C*.

Infatti, si prenda la massima misura comune delle due grandezze *A*, *B*, e sia essa *D* (X, 3); ora, *D* misura *C* o non la misura. Dapprima, la misuri. Poiché dunque *D* misura *C*, ma misura pure *A*, *B*, si ha che *D* misura *A*, *B*, *C*; quindi *D* è misura comune di *A*, *B*, *C*. Ed è evidente che è anche la massima. Difatti, una grandezza maggiore di *D* non può misurare le grandezze *A*, *B*.

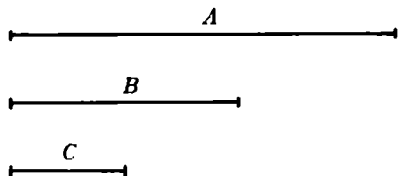
Sia adesso il caso in cui *D* non misura *C*. Dico in primo luogo che *C*, *D* sono commensurabili. Infatti, poiché *A*, *B*, *C* sono commensurabili, le misurerà un'altra grandezza, che misurerà evidentemente pure *A*, *B*; cosicché misurerà anche la massima misura comune di *A*, *B*, cioè *D* (X, 3, coroll.). Ma misura pure *C*, cosicché la detta grandezza misurerà *C*, *D*; quindi *C*, *D* sono commensurabili. Si prenda dunque la loro massima misura comune, e sia essa *E* (X, 3). Dunque, poiché *E* misura *D*, ma *D* misura *A*, *B*, anche *E* misura *A*, *B*. Ma essa misura pure *C*. Quindi *E* misura *A*, *B*, *C*, per cui *E* è misura comune di *A*, *B*, *C*. Dico ora che è anche la massima. Supponiamo infatti, se possibile, che vi sia una grandezza maggiore di *E*, cioè *F*, e che misuri *A*, *B*, *C*. E poiché *F* misura *A*, *B*, *C*, misurerà pure *A*, *B* e misurerà la massima misura comune di *A*, *B* (X, 3, coroll.). Ma *D* è la massima misura comune di *A*, *B*; perciò *F* misura *D*.

Ma F misura anche C, per cui F misura C, D; quindi F misurerà anche la massima misura comune di C, D (X, 3, coroll.). Ma essa è E; quindi F misurebbe E, ossia la grandezza maggiore misurerebbe la minore: il che è impossibile. Perciò una grandezza che sia maggiore della grandezza E non può misurare A, B, C, per cui E è la massima misura comune di A, B, C, se D non misura C, e se poi D la misura, lo è D stessa.

Dunque, date tre grandezze commensurabili, è stata trovata la loro massima misura comune.

A

B

C

APPLICA: X, 3, 3 coroll.

D E F

COROLLARIO.

È da ciò evidente che, se una grandezza misura tre [altre] grandezze, misurerà anche la loro massima misura comune.

Similmente allora, pure nel caso di più [di tre] grandezze, si troverà la massima misura comune, ed il corollario verrà ad estendersi. – C.D.D.

PROPOSIZIONE 5.

Le grandezze commensurabili hanno fra loro il rapporto che un numero ha con un numero.

Siano A, B grandezze commensurabili; dico che A ha con B il rapporto che un numero ha con un numero[4].

[4] Le proposizioni 5, 6, 7, 8, del libro decimo costituiscono uno di quei *quadrilateri* di proposizioni che abbiamo già visto, nel libro primo e altrove, esser tanto cari ad Euclide. Se assumiamo come proposizione *diretta* la X, 5, *l'inversa* è la X, 6, la *contraria* è la X, 7, la *contronominale* è la X, 8. Euclide dimostra le prime due, e ricava poi per assurdo la validità delle altre due, secondo il consueto procedimento di questi *quadrilateri* (si veda ad es. la nota alla prop. I, 17).

Nella *diretta* X, 5 Euclide mostra che se due grandezze sono com-

Infatti, poiché A, B sono commensurabili, una certa grandezza le misurerà. Le misuri, e sia essa C. E per quante

mensurabili, esse hanno tra loro il rapporto che un numero ha con un numero.

Come al solito, s'intende trattarsi di numeri interi: quindi, in nostro linguaggio, il teorema dice che il rapporto tra due grandezze commensurabili è un numero razionale (cioè il rapporto di due numeri interi).

Siano date le due grandezze A, B (sulle quali non si fa alcuna particolare ipotesi, oltre a quelle che sono contenute nelle prime definizioni del libro quinto), e si sappia che esse sono commensurabili. Esiste quindi una terza grandezza C, con esse omogenea, che le misura entrambe. E supponiamo che C sia contenuta d volte in A, ed e volte in B. A questo punto Euclide scrive la proporzione:

$$C : A = 1 : d$$

Infatti, egli dice, C è contenuta in A tante volte quante l'unità è contenuta nel numero d. Ma di quale proporzione si tratta? Di una proporzione del libro quinto (V, def. V) o del libro settimo (VII, def. XX)? Ma nel libro quinto si tratta di proporzioni tra grandezze (soddisfacenti a determinate condizioni, espresse dalle def. III e IV), mentre nel libro settimo si tratta di proporzioni tra numeri.

Ora, siccome è impossibile considerare le grandezze come numeri, non resta altra via d'uscita se non quella di considerare i numeri (interi) come particolari grandezze *del libro quinto*.

Ciò non presenta nessuna difficoltà, dal momento che i numeri interi possono esser considerati come *omogenei*, nel senso della def. III del libro quinto, e come soddisfacenti al postulato di Archimede (V, def. IV).

Si vede allora che se *invertiamo*, la proporzione:

$$A : C = d : 1$$

è una di quelle che vengon considerate nelle prime proposizioni del libro quinto; ossia quelle che considerano il caso del rapporto intero:

$$ma : a = mb : b$$

(Si veda a questo proposito la nota alla prop. V, 4). E che la proporzione:

$$A : C = d : 1$$

sia valida agli effetti della definizione del libro quinto, si è già veduto nella nota suddetta, a proposito della proporzione

$$ma : a = mb : b$$

la validità della quale viene sùbito dimostrata in base alla V, 4 (*equimultipli di equimultipli sono equimultipli*).

Si giunge ora facilmente in porto, scrivendo, accanto alla proporzione:

$$A : C = d : 1$$

l'altra:

$$C : B = 1 : e$$

volte C misura A, altrettante unità siano nel numero d, e per quante volte C misura B, altrettante unità siano nel numero e[a].

a. Euclide usa lo stesso tipo di lettere sia per le grandezze che per i numeri; per chiarezza noi distinguiamo, usando per i numeri lettere minuscole.

(la grandezza C è contenuta e volte in B). Dalle due proporzioni scritte, si deduce *ex aequo* (V, 22) la proporzione: $A : B = d : e$.

Risulta cioè dimostrato che il rapporto tra le due grandezze commensurabili A, B, è uguale al rapporto che un numero (intero) d ha con un numero (intero) e.

Nella X, 6, come s'è detto, Euclide dà il teorema inverso. Cioè questa volta l'ipotesi è che due grandezze A, B abbiano tra loro il rapporto che un numero (intero) d ha con un numero (intero) e: si deve dimostrare che le due grandezze sono commensurabili, cioè che ammettono una misura comune.

Per trovare detta misura comune C, dato che è: $A : B = d : e$ sorge spontanea l'idea che se C fosse contenuta d volte in A, essa dovrebbe essere contenuta e volte in B.

Partiamo quindi da una grandezza C che sia contenuta esattamente d volte in A: ciò equivale a dividere la grandezza A in d parti uguali: viene cioè ammesso un postulato di divisibilità. Non si saprebbe in linea generale *costruire* la d.esima parte di A; così per esempio non si saprebbe eseguire la costruzione della terza parte di un angolo mediante riga e compasso (impossibilità di risolvere con le costruzioni elementari il problema della trisezione dell'angolo).

E poiché il postulato della divisibilità rientra in quello più vasto della continuità, si vede che qui si fa appunto appello ad una intuizione di continuità, così come detta intuizione è contenuta anche nel postulato di Archimede, introdotto nella definizione quarta del libro quinto (cfr. nota a detta definizione).

Partendo, dunque, da $C = \frac{A}{d}$ cioè da una grandezza C contenuta d volte in A, facciamo vedere che la stessa C è contenuta e volte in B, e che quindi C è comune misura di A, B, le quali pertanto sono commensurabili. Costruiamo allora la grandezza $F = e\frac{A}{d} = e\,C$ e mostriamo che è $F = B$.

Infatti è $C : A = 1 : d$.

(C è contenuta d volte in A) da cui, invertendo:

$$A : C = d : 1$$

Inoltre:

$$C : F = 1 : e$$

(C è contenuta e volte in F).

Poiché dunque C misura A secondo le unità che sono in d, ma pure l'unità misura d secondo le unità che sono in esso, l'unità misura il numero d le stesse volte che la grandezza C misura la grandezza A; quindi C sta ad A come l'unità sta a d ($C : A = 1 : d$), e si ha, *invertendo* (V, 7, coroll.), che A sta a C come d sta all'unità ($A : C = d : 1$). Di nuovo, poiché C misura B secondo le unità che sono in e, ma pure l'unità misura e secondo le unità che sono in esso, l'unità misura e le stesse volte che C misura B; quindi C

Dalle due ultime proporzioni si ricava *ex aequo*:

$$A : F = d : e$$

Ma per ipotesi è:

$$A : B = d : e$$

quindi, per la proprietà transitiva:

$$A : F = A : B$$

da cui (per la V, 9) si ricava: $F = B$.

Risulta così dimostrato che A, B ammettono la comune misura C, e che quindi sono commensurabili; come si voleva dimostrare. Seguono subito, col metodo di riduzione all'assurdo, le altre due proposizioni del *quadrilatero* X, 7 e X, 8.

Assai importante è il corollario che fa séguito alla X, 6. Son dati due numeri (interi) d, e ed una grandezza A.

Il corollario stabilisce due cose:

1) Risulta determinata una grandezza F tale che: $A : F = d : e$

Infatti dal teorema X, 6 risulta $F = e\dfrac{A}{d}$.

2) Risulta determinata una grandezza B tale che:

$$q\,(A) : q\,(B) = d : e$$

(il quadrato della retta A sta al quadrato della retta B come il numero d sta al numero e). La grandezza B risulta infatti determinata come media proporzionale tra A e F, ossia: $A : B = B : F$. Per dimostrar ciò occorre applicare un importante risultato del libro sesto (prop. 19, corollario, cfr. ivi nota): « Se tre rette sono in proporzione continua, la prima sta alla terza come una figura costruita sulla prima sta alla figura simile e similmente disposta costruita sulla seconda ». Se le due figure simili sono in particolare due quadrati, segue appunto:

$$A : F = q\,(A) : q\,(B)$$

ma per ipotesi:

$$A : F = d : e.$$

Pertanto si conclude:

$$q\,(A) : q\,(B) = d : e$$

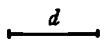
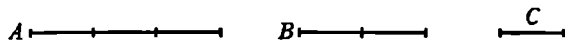
Per trovare B basta dunque determinare F come quarto proporzionale dopo d, e, A, poi la media proporzionale tra A, F.

sta a B come l'unità sta ad e ($C : B = 1 : e$). Ma fu anche dimostrato che A sta a C come d sta all'unità; si ha perciò, *ex aequo*, che A sta a B come il numero d sta al numero e (V, 22).

Dunque, le grandezze commensurabili A, B hanno fra loro il rapporto che il numero d ha col numero e. – C.D.D.

A B C

d

e

APPLICA: V, 7 coroll., 22.

È APPLICATA IN: X, 8, 9, 11, 12.

PROPOSIZIONE 6.

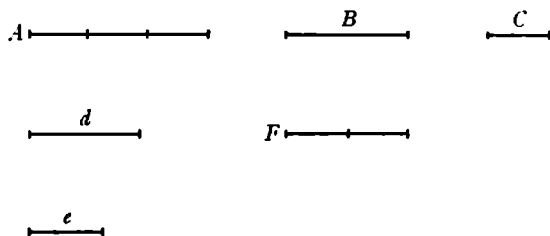
Se due grandezze hanno fra loro il rapporto che un numero ha con un numero, le grandezze saranno commensurabili.

Infatti, le due grandezze A, B abbiano fra loro il rapporto che il numero d ha col numero e; dico che le grandezze A, B sono commensurabili.

Per quante unità difatti sono in d, si divida A in altrettante parti uguali, e la grandezza C sia uguale ad una di esse; si componga poi la grandezza F di tante grandezze uguali a C per quante unità sono in e $\left(C = \frac{A}{d}\,;\ F = e \cdot \frac{A}{d}\right)$.

Poiché dunque sono in A tante grandezze uguali a C per quante unità sono in d, la stessa parte che l'unità è di d lo è anche C di A; quindi C sta ad A come l'unità sta a d ($C : A = 1 : d$). Ma l'unità misura il numero d; perciò anche C misura A. E poiché C sta ad A come l'unità sta a d, si ha, *invertendo*, che A sta a C come il numero d sta all'unità ($A : C = d : 1$; V, 7, coroll.). Di nuovo, poiché sono anche in F tante grandezze uguali a C per quante unità sono in e, si ha che C sta a F come l'unità sta ad e ($C : F = 1 : e$). Ma fu pure dimostrato che A sta a C come d sta all'unità; quindi, *ex aequo*, A sta a F come d sta ad e (V, 22). Ma d

sta ad *e* come *A* sta a *B*; quindi anche, *A* sta a *B* come sta pure a *F* ($A : B = A : F$; V, 11). Perciò la grandezza *A* ha lo stesso rapporto con ciascuna delle due grandezze *B*, *F*, per cui *B* è uguale a *F* (V, 9). Ma *C* misura *F*; quindi misura anche *B*. Ma misura pure *A*, per cui *C* misura *A*, *B*. Quindi *A* è commensurabile con *B*.

Dunque, se due grandezze sono fra loro, eccetera.

APPLICA: V, 7 coroll., 9, 11, 22; X, 6.

È APPLICATA IN: X, 7, 9, 11, 12, 18, 26, 29, 34, 36, 38, 39, 40, 44, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 57, 75, 85, 86, 87, 89, 90; XIII, 6.

COROLLARIO.

È da ciò evidente che, se si dànno due numeri, ad esempio [a], *d*, *e*, ed una retta, ad esempio *A*, è possibile determinare una seconda retta *F* in modo che la retta *A* stia a *F* come il numero *d* sta al numero *e* ($A : F = d : e$) [b]. Ed è pure evidente che, se si prende una grandezza media proporzionale *B* fra *A*, *F* (cioè, $A : B = B : F$) [c], si avrà che *A* sta a *F* come il quadrato di *A* sta al quadrato di *B*, vale a dire che la prima grandezza sta alla terza come una figura descritta sulla prima sta ad una figura simile e similmente

a. Letteralmente: se vi sono due numeri, come *D*, *E*, ed una retta, come *A*.

b. Letteralmente: è possibile far in modo che, come il numero *D* sta al numero *E*, così stia la retta ad una retta.

c. Letteralmente: una grandezza media proporzionale fra *A*, *F*, come *B*.

descritta sulla seconda (VI, 19, coroll.). Ma *A* sta a *F* come il numero *d* sta al numero *e*; dunque, risulta pure che il numero *d* sta al numero *e* come il quadrato della retta *A* sta a quello della retta *B* [a]. – C.D.D.

APPLICA: VI, 13, 20 coroll.

È APPLICATO IN: X, 10, 29, 30, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 86, 87, 88.

PROPOSIZIONE 7.

Le grandezze incommensurabili non hanno fra loro il rapporto che un numero ha con un numero.

Siano *A*, *B* grandezze incommensurabili; dico che *A* non ha con *B* il rapporto che un numero ha con un numero.

Infatti, se *A* avesse con *B* il rapporto che un numero ha con un numero, *A* sarebbe commensurabile con *B*. Ma non è tale; quindi *A* non può avere con *B* il rapporto che un numero ha con un numero.

Dunque, grandezze incommensurabili non hanno fra loro, eccetera.

APPLICA: X, 6.

È APPLICATA IN: X, 11.

PROPOSIZIONE 8.

Se due grandezze non hanno fra loro il rapporto che un numero ha con un numero, le grandezze saranno incommensurabili.

Infatti, le due grandezze *A*, *B* non abbiano fra loro il rapporto che un numero ha con un numero; dico che le grandezze *A*, *B* sono incommensurabili.

a. Letteralmente: risulta pure che, come il numero *D* sta al numero *E*, così la figura descritta sulla retta *A* sta alla figura descritta sulla retta *E*.

Se fossero difatti commensurabili, A avrebbe con B il rapporto che un numero ha con un numero. Ma non lo ha. Quindi le grandezze A, B sono incommensurabili.

Dunque, se due grandezze non hanno fra loro, eccetera.

APPLICA: X, 5.

È APPLICATA IN: X, 11.

PROPOSIZIONE 9.

Quadrati di rette commensurabili in lunghezza hanno fra loro il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato; ed i quadrati che abbiano fra loro il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato, avranno anche i lati commensurabili in lunghezza. Invece, i quadrati di rette incommensurabili in lunghezza non hanno fra loro il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato; ed i quadrati che non abbiano fra loro il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato, non avranno neppure i lati commensurabili in lunghezza[5].

Infatti, siano A, B commensurabili in lunghezza; dico che il quadrato di A ha con quello di B il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato.

[5] In questa proposizione 9 (e in quasi tutte le seguenti) Euclide si rivolge esclusivamente alle rette, e non più alle grandezze in generale. In base alla distinzione delle definizioni II e III di questo libro, vengono nel séguito trovate e classificate varie specie di rette irrazionali.

In questa prop. 9 Euclide dà un criterio per riconoscere se due rette sono o non sono commensurabili in lunghezza. Anzi la proposizione contiene un completo *quadrilatero* di teoremi: diretto, inverso, contrario, contronominale. Come al solito, si dimostrano il diretto e l'inverso: seguono, poi, subito le dimostrazioni per *assurdo* del contrario e del contronominale.

Nel teorema diretto si parte dall'ipotesi che due rette A, B siano commensurabili in lunghezza, e si dimostra che esse stanno tra loro come un numero quadrato ad un numero quadrato. Data l'ipotesi, A sta a B come un numero c sta a un numero d (X, 5). Se si costruiscono i quadrati $q(A)$, $q(B)$ aventi per lato rispettivamente A, B il rapporto $q(A) : q(B)$ è *duplicato* di quello $A : B$ (infatti i quadrati sono poligoni simili e quindi stanno tra loro in ragione duplicata dei lati omologhi; VI, 20, corollario: per il concetto di *ragione duplicata*, o *rapporto duplicato*, si veda la nota

Poiché A è commensurabile in lunghezza con B, si ha difatti che A ha con B il rapporto che un numero ha con

alla definizione IX del libro quinto). Similmente dai libri aritmetici (VIII, 11) sappiamo che due numeri quadrati hanno tra loro rapporto duplicato di quello delle relative basi. Adattando i simboli introdotti nella nota alla def. IX del libro quinto abbiamo cioè:

$$q(A) : q(B) = \text{dupl.}\ (A : B)$$
$$c^2 : d^2 = \text{dupl.}\ (c : d).$$

Euclide assume ora che se due rapporti sono uguali tra loro siano uguali anche i rapporti duplicati (per quest'assunzione, e quella inversa che segue, cfr. nota alla citata def. IX del libro quinto).

Quindi essendo:

$$A : B = c : d$$

si ricava:

$$q(A) : q(B) = c^2 : d^2$$

Similmente si dimostra il teorema inverso, per dimostrare il quale Euclide assume che se due rapporti duplicati sono uguali, sono uguali anche i rapporti semplici. Dall'insieme dei due teoremi si ricava che:

« Condizione necessaria e sufficiente affinché due *rette* siano commensurabili in lunghezza è che esse stiano tra loro come un numero quadrato ad un numero quadrato ».

Se ne può vedere subito una immediata applicazione: ad esempio al lato e alla diagonale di qualunque quadrato. I quadrati su di essi costruiti stanno tra loro come 2 : 1 (cioè il quadrato costruito sulla diagonale è doppio del quadrato di partenza). Ma mentre 1 è un numero quadrato, 2 non lo è, sicché i quadrati (del lato e della diagonale) non stanno tra loro come un numero quadrato a un numero quadrato, e quindi, per la X, 9, non sono commensurabili in lunghezza. Ricordiamo che quei quadrati stanno però tra loro come un numero (intero) 2 sta ad un numero (intero) 1, quindi (X, 6) i due quadrati sono commensurabili tra loro e pertanto lato e diagonale di qualunque quadrato sono commensurabili in potenza (X, def. II). Se si assume come retta razionale di partenza il lato di un quadrato, la diagonale è dunque ancora retta razionale (X, def. III).

Un antico scolio attribuisce al matematico ateniese Teeteto, contemporaneo di Platone, il quadruplice teorema X, 9. E detta attribuzione trova il suo fondamento in un celebre passo del dialogo che appunto Platone intitolò all'amico Teeteto, da poco scomparso.

Riassumiamo pertanto il brano in questione (147 *c* - 148*b*) che ha dato luogo a studi e discussioni in gran quantità; e senza entrare in particolari troppo minuti, limitiamoci all'interpretazione di carattere generale che ci sembra maggiormente plausibile. Nel dialogo *Teeteto* si assiste ad un colloquio che avrebbe avuto luogo ad Atene tra Socrate, il matematico Teodoro di Cirene, e il giovinetto Teeteto. Quest'ultimo è presentato da Teodoro come estremamente intelligente e precoce, e Socrate vuol metterlo alla prova, chiedendogli di definire che cosa sia la scienza (*epistème*). Teeteto comincia con l'enumerare alcune scienze, ma Socrate insiste: egli

un numero (X, 5). Abbia quello che il numero c ha col numero d. Dunque A sta a B come c sta a d ($A : B = c : d$).

non vuole conoscere quali siano alcune scienze particolari, ma che cosa sia *la scienza*. Teeteto risponde allora che questo modo di porre la questione è simile a quello che si è presentato a lui e al suo compagno Socrate il giovane.

A loro Teodoro aveva presentato alcune costruzioni geometriche dimostrando che il lato del quadrato di area 3 (piedi quadrati) e quello del quadrato di area 5 non sono commensurabili col lato del quadrato di area 1 (cioè col segmento lungo 1 piede, assunto come unità di misura).

Col nostro linguaggio, esprimeremmo la cosa dicendo che Teodoro aveva dimostrato l'irrazionalità della radice quadrata di 3 e della radice quadrata di 5, cioè aveva dimostrato, in sostanza, l'impossibilità di trovare un numero razionale (intero o frazionario) che moltiplicato per sé stesso desse come prodotto 3, o 5.

Ma Teodoro non si era limitato ai quadrati di area 3 e 5: anzi, continuando a considerare, uno per uno, i quadrati di area 6, di area 7, e via dicendo, era arrivato con le sue costruzioni e dimostrazioni fino al quadrato di area 17, e qui (come che sia) si era fermato.

Cioè Teodoro, secondo lo spirito del racconto di Teeteto, aveva fornito tante separate dimostrazioni della irrazionalità (diremmo noi) delle radici quadrate di 3, 5, 6, 7 ecc. fino alla radice quadrata di 17: senza fornire una dimostrazione generale, che valesse a stabilire l'irrazionalità, o meno, di qualunque radice.

Così Teeteto, nel rispondere a Socrate, aveva enumerato tante scienze particolari, senza dare una definizione generale di *scienza*.

Ma Teeteto prosegue informando Socrate degli studi da lui (e dal collega) compiuti per riconoscere in linea generale se un quadrato avente l'area espressa da qualsiasi numero intero (quindi anche oltre 17) abbia il lato commensurabile con l'unità di misura delle lunghezze. In altri termini: Socrate chiedeva la definizione generale di *scienza*, e Teeteto trova tale esigenza somigliante a quella che ha mosso lui a ricercare una regola generale per stabilire la commensurabilità, o l'incommensurabilità, del lato di un quadrato con l'unità di misura delle lunghezze.

Teeteto narra appunto che egli (col collega) divise tutti i numeri (interi) in due gruppi: quello dei numeri quadrati e quello dei numeri non quadrati, che chiamò *rettangolari*.

Stabilita una unità di misura per le lunghezze, egli distinse i quadrati (geometrici) aventi per area un numero quadrato, da quelli aventi per area un numero rettangolare.

I lati dei primi risultano commensurabili con l'unità di lunghezza, e furono da lui chiamati *lunghezze*: i lati dei secondi risultano incommensurabili con l'unità di lunghezza (e con tutte le *lunghezze*) e furono detti *potenze* (= radici).

In altri termini, usando il nostro linguaggio, si potrebbe dire che Teeteto abbia riconosciuto l'irrazionalità di tutte le radici quadrate dei numeri che non siano quadrati perfetti. Con un colpo solo, in tal modo, si riconosce l'irrazionalità della radice di 2, di 3, di 5 e via dicendo,

Ma poiché[a] il rapporto che il quadrato di *A* ha col quadrato di *B* è duplicato di quello di *A* con *B* – difatti figure simili hanno fra loro rapporto duplicato di quello dei lati

a. Per facilitare la lettura modifichiamo un po' il testo « Poiché dunque *A* sta a *B* come *C* sta a *D* (al solito, ***Poiché dunque come*** A ***sta a*** B, ***così*** C ***sta a*** D), ma poiché il rapporto... ».

escludendo soltanto le radici di 4, di 9 e così via, cioè le radici quadrate dei numeri quadrati.

Su questo celebre passo platonico, che abbiamo cercato di riassumere nel modo più aderente al testo, è sorta tutta una letteratura, che fa invero onore agli storici della matematica. Ci limiteremo a citare H. Vogt, H.G. Zeuthen, Eva Sachs, K. von Fritz, B. L. van der Waerden, oltre a J. N. Anderhub (per un punto particolare), P. H. Michel (per una chiara esposizione d'insieme) e Arpad Szabò per una originale interpretazione filologica.

Perché tante discussioni? Perché il passo del *Teeteto* fornisce, è vero, notizie preziose, ma lascia anche adito a possibilità di interpretazioni diverse e contrastanti, che mettono in gioco anche la questione forse più ardua della storia della matematica greca: la datazione della scoperta della prima coppia di linee incommensurabili (lato e diagonale del quadrato).

Ma su un punto sembra che non vi sia divergenza di opinioni, e cioè sul fatto che il metodo escogitato ed esposto da Teeteto sia quello che si ritrova negli *Elementi* di Euclide, alla nona proposizione del libro decimo. Vi sono, è vero alcune differenze che un'indagine minuziosa può rilevare, ma essenzialmente il metodo del *Teeteto* platonico corrisponde a quello della X, 9 di Euclide: proposizione quest'ultima, che potremmo chiamare del *Teeteto euclideo*.

Dice infatti la X, 9 di Euclide che due linee sono commensurabili (in lunghezza: cioè nel senso nostro ordinario) quando, e solo quando, i quadrati (geometrici) costruiti su di esse stanno tra loro come un numero quadrato sta ad un numero quadrato.

Basta considerare come seconda linea del confronto l'unità di misura delle lunghezze perché i due metodi vengano, per dir così, estremamente ravvicinati.

Così per esempio, il *Teeteto platonico* riconoscerebbe l'irrazionalità della radice quadrata di 2 dal fatto che 2 non è un numero quadrato, mentre il *Teeteto euclideo* riconoscerebbe l'incommensurabilità della diagonale e del lato di ogni quadrato (ciò che è lo stesso), dal fatto che i quadrati costruiti sui due segmenti stanno tra loro come 2 a 1, e quindi non come un numero quadrato a un numero quadrato.

Questa è in sostanza l'opinione del grande Zeuthen. Per quanto riguarda, poi, il metodo usato da Teodoro, lo Zeuthen (e noi non sapremmo dissentire) lo ritrova nel procedimento dell'algoritmo euclideo, che Euclide presenta nella X, 2. Si tratta infatti di un procedimento che va applicato differentemente caso per caso, appunto come fa il *Teodoro* del dialogo platonico. Chi desideri maggiori notizie sul celebre brano potrà vedere.

omologhi (VI, 20, coroll.) –, e d'altra parte il numero quadrato c^2 di c ha col numero quadrato d^2 di d rapporto duplicato di quello di c con d – fra due numeri quadrati v'è difatti un numero medio proporzionale, ed un numero quadrato ha con un numero quadrato rapporto duplicato di quello dei lati rispettivi (VIII, 11) –, si ha pure che il quadrato di A sta al quadrato di B come il numero quadrato di c sta al numero quadrato di d [$q(A) : q(B) = c^2 : d^2$, come si voleva dimostrare].

[Inversamente,] sia adesso il caso in cui il quadrato di A stia al quadrato di B come il numero quadrato di c sta al numero quadrato di d; dico che A è commensurabile in lunghezza con B.

Infatti, poiché il quadrato di A sta [per ipotesi] a quello di B come il numero quadrato di c sta a quello di d [$q(A) :$ $: q(B) = c^2 : d^2$], ma il rapporto del quadrato di A col quadrato di B è duplicato di quello di A con B, mentre il rapporto del numero quadrato di c col numero quadrato di d è duplicato di quello di c con d, [dall'uguaglianza dei rapporti duplicati si ricava l'uguaglianza dei rapporti semplici, cioè] si ha pure che A sta a B come c sta a d ($A : B = c : d$). Quindi A ha con B il rapporto che il numero c ha col numero d; dunque A è commensurabile in lunghezza con B (X, 6).

Supponiamo ora, invece, che A sia incommensurabile in lunghezza con B; dico che il quadrato di A non ha con quello di B il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato.

Infatti, se il quadrato di A avesse col quadrato di B il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato, A sarebbe commensurabile con B. Ma non lo è; dunque il quadrato di A non ha con quello di B il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato.

A. FRAJESE, *Perché Teodoro di Cirene tralasciò la radice di due?* (in: « Periodico di Matematiche », dicembre 1966, pp. 419-431).

Concludiamo, richiamando l'attenzione sul corollario di questa X, 9: in esso si dice che rette commensurabili in lunghezza sono anche tali in potenza, ma non inversamente. Ciò segue senz'altro dal teorema.

Supponiamo infine che[a] il quadrato di *A* non abbia con quello di *B* il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato; dico che *A* è incommensurabile in lunghezza con *B*.

Infatti, se *A* fosse commensurabile [in lunghezza] con *B*, il quadrato di *A* avrebbe con quello di *B* il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato. Ma non non lo ha; dunque *A* non è commensurabile in lunghezza con *B*.

Dunque, quadrati di rette commensurabili in lunghezza, eccetera.

APPLICA: VI, 20; VIII, 11; X, 5, 6.

È APPLICATA IN: X, 10, 29, 30, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 114; XIII, 6.

COROLLARIO.

Sarà evidente da quanto dimostrato che rette commensurabili in lunghezza lo sono generalmente anche in potenza, ma che quelle commensurabili in potenza non lo sono generalmente sempre anche in lunghezza[b].

LEMMA[6].

È stato dimostrato nei libri aritmetici che numeri piani simili hanno fra loro il rapporto che un numero quadrato

a. Letteralmente: Di nuovo, non abbia adesso il quadrato di *A*.

b. Abbiamo in séguito nel testo un passo piuttosto lungo, che Heiberg ha espunto: si tratta dapprima di una dimostrazione del corollario, superflua in sé e distantissima poi dall'uso euclideo, che non dà dimostrazioni di corollari, e successivamente di un'altra dimostrazione che andrebbe oltre a quanto ci si era proposto di dimostrare.

[6] Questo *lemma* (così è chiamata una proposizione introduttiva sulla quale si fonda un teorema immediatamente seguente) e la proposizione

ha con un numero quadrato (VIII, 26), e che, se due numeri hanno fra loro il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato, essi sono piani simili. Ed è chiaro da queste proposizioni che numeri piani non simili, vale a dire quelli che non abbiano i lati proporzionali fra loro (VII, def. XXII), non hanno fra loro il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato. Se difatti potessero averlo, sarebbero numeri piani simili: il che è contro l'ipotesi. Dunque, numeri piani non simili non hanno fra loro il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato.

APPLICA: VIII, 26.

È APPLICATO IN: X, 10.

decima (che lo applica) sono da Heiberg ritenuti non essere opera genuina di Euclide, ma aggiunta posteriore. Infatti nel lemma si fa appello ad una certa proposizione inversa della VIII, 26 (inversa che Euclide non ha mai dimostrato): inoltre nella X, 10 si utilizza la proposizione seguente X, 11, cosa contraria allo spirito ordinatore degli *Elementi*. La X, 10, che sembra volere tener fede ad una promessa contenuta nella terza definizione del libro decimo, è in sostanza inutile, essendo già (sia pur implicitamente) contenuta in proposizioni precedenti. Qualche motivo contro la *genuinità* si ricava anche dall'esame di un manoscritto e da quello di una certa particolarità stilistica.

Va tuttavia richiamata l'attenzione, sia pure a titolo di semplice riassunto, sul contenuto di questa *dubbia* X, 10.

È data una retta A, e si prendono due numeri interi b, c tali che *non* stiano tra loro come un numero quadrato ad un numero quadrato. Dal corollario della X, 6 si sa trovare una retta D tale che

$$q(A) : q(D) = b : c$$

Sicché, data la scelta di b, c si ha che D è incommensurabile in lunghezza con A (ma commensurabile in potenza).

Se poi si considera la retta E, media proporzionale tra A, D, cioè tale che sia:

$$A : E = E : D \quad \text{si ha:} \quad A : D = q(A) : q(E).$$

Ma A è incommensurabile in lunghezza con D, quindi sono incommensurabili i due quadrati $q(A)$, $q(E)$, e pertanto A, E sono incommensurabili anche in potenza.

PROPOSIZIONE 10.

Trovare due rette incommensurabili con una retta data[a], *una incommensurabile soltanto in lunghezza, e l'altra anche in potenza.*

Sia *A* la retta data; si devono dunque trovare due rette incommensurabili con *A*, l'una soltanto in lunghezza e l'altra anche in potenza.

Infatti, si assumano i due numeri *b*, *c* che non abbiano fra loro il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato, vale a dire che non siano numeri piani simili (X, 9, lemma), e si ottenga che *b* stia a *c* come il quadrato della retta *A* sta al quadrato della retta *D* – abbiamo appreso difatti ad ottenerlo (X, 6, coroll.) –; il quadrato di *A* è perciò commensurabile con quello di *D* (X, 6). E poiché *b* non ha con *c* il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato, neppure il quadrato di *A* ha con quello di *D* il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato; quindi *A* è incommensurabile in lunghezza[, ma commensurabile in potenza,] con *D*. Si prenda la media proporzionale *E* fra *A*, *D*. Perciò *A* sta a *D* come il quadrato di *A* sta al quadrato di *E* (V, def. IX). Ma *A* è incommensurabile in lunghezza con *D*, per cui anche il quadrato di *A* è incommensurabile con quello di *E* (X, 11); quindi *A* è incommensurabile in potenza con *E*.

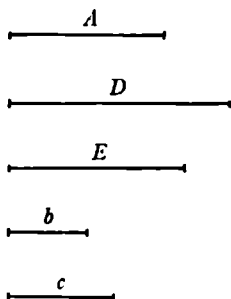
Dunque, sono state trovate le due rette *D*, *E* incommensurabili con la retta *A* data, la retta *D* soltanto in lunghezza, ed *E* in potenza ed evidentemente anche in lunghezza. – C.D.D.

A

D

E

b

c

APPLICA: VI, 13, 20; X, 6 coroll., 9, 11 (!).

a. Traduciamo qui con *data*, e pure sotto: *Sia* A *la retta data*, il verbo greco (προτεθείσῃ nell'enunciato, e dopo προτεθεῖσα) significante piuttosto « che sia stata proposta ».

PROPOSIZIONE 11.

Se quattro grandezze sono proporzionali, e la prima è commensurabile con la seconda, anche la terza sarà commensurabile con la quarta; e se la prima è incommensurabile con la seconda, anche la terza sarà incommensurabile con la quarta [7].

Siano A, B, C, D quattro grandezze proporzionali, in modo che A stia a B come C sta a D, ed A sia commensurabile con B; dico che anche C sarà commensurabile con D.

Infatti, poiché A è commensurabile con B, si ha che A ha con B il rapporto che un numero ha con un numero (X, 5). Ora, A sta a B come C sta a D; quindi anche C ha con D il rapporto che un numero ha con un numero (V, 11); dunque C è commensurabile con D (X, 6).

Supponiamo ora che A sia [a] incommensurabile con B; dico che pure C sarà incommensurabile con D. Infatti, poiché A è incommensurabile con B, si ha che A non ha con B il rapporto che un numero ha con un numero (X, 7). Ma A sta a B come C sta a D; neppure C ha quindi con D il rapporto che ha un numero con un numero (V, 11), per cui C è incommensurabile con D (X, 8).

a. Più esattamente sarebbe « Ma sia adesso il caso in cui A è »; l'espressione adottata lo sarà sempre quando opportuno, come è stato fatto altre volte.

[7] Questa X, 11 è una proposizione assai importante, che viene frequentemente applicata nel séguito.

Con essa, e taluna delle seguenti, si torna alla considerazione di grandezze *in generale*.

Se $A : B = C : D$, ed A è commensurabile con B, anche C lo è con D: similmente nel caso della incommensurabilità. Per noi i rapporti tra grandezze omogenee sono numeri: razionali se le grandezze sono commensurabili, irrazionali se esse sono incommensurabili. Dato che i due rapporti sono uguali tra loro, è evidente che o sono ambedue razionali o ambedue irrazionali.

Qui nella X, 11 abbiamo la distinzione tra il rapporto nel caso commensurabile e il rapporto nel caso incommensurabile: nessuna distinzione si ha invece nel libro quinto, che nella sua celebre definizione 5 unisce insieme i due casi (cfr. nota a detta definizione).

Dunque, se quattro grandezze, eccetera.

APPLICA: V, 11; X, 5, 6, 7, 8.

È APPLICATA IN: X, 10 (!); X, 12, 14, 19, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 31, 32, 33, 34, 35, 38, 41, 44, 47, 54, 55, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 65, 66, 67, 68, 71, 72, 73, 75, 78, 81, 84, 91, 92, 93, 94, 97, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 110, 112, 113, 114.

PROPOSIZIONE 12.

Grandezze commensurabili con una stessa grandezza sono commensurabili anche fra loro [8].

Infatti, ciascuna delle due grandezze A, B sia commensurabile con la grandezza C; dico che A è anche commensurabile con B [a].

Poiché difatti A è commensurabile con C, si ha che A ha con C il rapporto che un numero ha con un numero

a. Letteralmente: che anche A, B sono commensurabili.

[8] Questa proposizione X, 12 ci dà quella che potremmo chiamare la proprietà transitiva *della commensurabilità* (essendo A commensurabile con C, ed essendo C commensurabile con B, si ricava che A è commensurabile con B).

La dimostrazione si fonda principalmente su una proposizione aritmetica (VIII, 4): si trasformano infatti due rapporti tra numeri ($d : e$ ed $f : g$) in altri due rapporti rispettivamente uguali ($h : k$ e $k : l$) aventi il conseguente (k) del primo uguale all'antecedente (k) del secondo.

Si può così operare la deduzione *ex aequo* (V, 22):

$$A : C = h : k$$
$$C : B = k : l$$
$$A : B = h : l$$

segue quindi la commensurabilità di A con B.

E siccome la commensurabilità gode evidentemente tanto della proprietà simmetrica quanto di quella riflessiva, può dirsi senz'altro che la commensurabilità è una di quelle relazioni che modernamente si dicono *relazioni di equivalenza*.

Non altrettanto può dirsi per la *incommensurabilità*, relazione per la quale non valgono né la proprietà riflessiva né quella transitiva, ma soltanto la simmetrica. Per esempio, tanto il lato quanto il perimetro di un quadrato sono incommensurabili con la diagonale, eppure lato e perimetro evidentemente non sono incommensurabili tra loro.

(X, 5). Abbia A con C il rapporto che il numero d ha col numero e[, cioè sia: $A : C = d : e$]. Di nuovo, poiché C è commensurabile con B, si ha che C ha con B il rapporto che un numero ha con un numero (X, 5). Abbia C con B il rapporto che il numero f ha col numero g[, cioè sia: $C : B = f : g$]. Ora, dati così quantisivoglia rapporti, cioè quello che d ha con e e quello che f ha con g, si prendano i numeri h, k, l che stiano fra loro di séguito nei rapporti dati (VIII, 4)[a], cosicché d stia ad e come h sta a k, e f stia a g come k sta a l[, cioè sia: $\begin{matrix} d : e = h : k \\ f : g = k : l \end{matrix}$].

Poiché dunque A sta a C come d sta ad e, ma d sta ad e come h sta a k, si ha pure che A sta a C come h sta a k [$A : C = h : k$] (V, 11). Di nuovo, poiché C sta a B come f sta a g, ma f sta a g come k sta a l, si ha pure che C sta a B come k sta a l [$C : B = k : l$] (V, 11). Ma si ha anche che A sta a C come h sta a k; quindi, *ex aequo*, A sta a B come h sta a l [$A : B = h : l$] (V, 22). Perciò A ha con B il rapporto che il numero h ha col numero l; quindi A è commensurabile con B.

Dunque, grandezze commensurabili con una stessa grandezza... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: V, 11, 22; VIII, 4; X, 5, 6.

È APPLICATA IN: X, 13, 17, 54, 58, 66, 91, 103, 111, 112, 113, 114.

PROPOSIZIONE 13.

Se due grandezze sono commensurabili, ed una di esse è incommensurabile con un'altra grandezza, anche la rimanente [delle due prese inizialmente] sarà incommensurabile con quella stessa.

Siano A, B due grandezze commensurabili, ed una di esse, cioè A, sia incommensurabile con un'altra C; dico che anche la rimanente B è incommensurabile con C.

a. Letteralmente: risultino presi i numeri H, K, L (cioè, i nostri h, k, l) continuatamente (vale a dire, i numeri... si prendano di séguito) nei rapporti dati.

Infatti, se B fosse commensurabile con C, mentre anche A è commensurabile con B, si avrebbe che pure A sarebbe commensurabile con C (X, 12). Ma [per ipotesi] A è anche incommensurabile con C: il che è impossibile. Perciò B non è commensurabile con C, e quindi è incommensurabile.

Dunque, se due grandezze sono commensurabili, eccetera.

APPLICA: X, 12.

È APPLICATA IN: X, 18, 22, 23, 26, 35, 36, 38, 44, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 63, 64, 66, 68, 75, 81, 92, 93, 99, 103, 104, 105, 108, 109, 111, 113.

LEMMA.

Date due rette disuguali, trovare di quanto il quadrato della maggiore superi quello della minore [a].

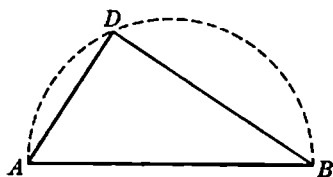
Siano AB, C le due rette disuguali date, di cui AB sia la maggiore; si deve dunque trovare di quanto il quadrato di AB superi quello di C.

Si descriva su AB il semicerchio ADB, si adatti in esso la retta AD uguale alla retta C (IV, 1), e si tracci la congiungente DB. È evidente allora che l'angolo ADB è retto (III, 31), e che il quadrato di AB supera quello di AD, vale a dire di C, del quadrato di DB (I, 47) [$q(AB) = q(AD) +$ $+ q(DB)$].

E pure similmente, date due rette, si trova nel seguente modo [b] la retta il cui quadrato sia uguale alla somma dei quadrati rispettivi.

a. Letteralmente è: « trovare di quanto la maggiore *possa* (= potenzii) di più della minore »; così pure si dirà dopo: « AB *può* (cioè, potenzia) di più che AD, vale a dire di C, del quadrato di DB », ed ugualmente: « E pure similmente, date due rette, si trova a questo modo la retta che *può* le stesse (cioè, il cui quadrato sia uguale alla somma dei quadrati rispettivi) », e così negli altri casi simili.

b. Sarebbe, alla lettera, « a questo modo ».

Siano AD, DB le due rette date, e si debba trovare quella il cui quadrato sia uguale alla somma dei loro quadrati. Si pongano esse in maniera da comprendere difatti un angolo retto, cioè quello compreso da AD, DB, e si tracci la congiungente AB; è evidente di nuovo che AB è una retta il cui quadrato è uguale alla somma dei quadrati di AD, DB (I, 47). - C.D.D.

APPLICA: I, 47; III, 31; IV, 1.

È APPLICATO IN: X, 85, 86, 87, 88, 89, 90.

PROPOSIZIONE 14.

Se quattro rette sono proporzionali, ed il quadrato della prima supera quello della seconda del quadrato di una retta commensurabile con la prima[a], *anche il quadrato della terza supererà quello della quarta del quadrato di una retta commensurabile con la terza. E se il quadrato della prima supera quello della seconda del quadrato di una retta incommensurabile con la prima, anche il quadrato della terza supererà quello della quarta del quadrato di una retta incommensurabile con la terza*[9].

Siano A, B, C, D quattro rette proporzionali, in modo che A stia a B come C sta a D, ed il quadrato di A superi

a. Euclide dice: « Se quattro rette sono proporzionali, ed il quadrato della prima supera quello della seconda (cioè: *la prima può di più* – nel suo linguaggio – *che la seconda*) del quadrato di una retta *a sé* commensurabile »; noi traduciamo *commensurabile con la prima*, e poi, a seconda del bisogno, con la terza, con la prima, ecc., normalmente, per ovvie ragioni di chiarezza.

[9] La prop. X, 14 parte dall'ipotesi che quattro rette siano in proporzione:

$$A : B = C : D$$

quello di B del quadrato di una retta E, e quello di C superi quello di D del quadrato di una retta F; dico che

e che il quadrato di A superi il quadrato di B del quadrato di una retta commensurabile in lunghezza con A, ossia:

$$q(A) - q(B) = q(E)$$

dove la retta E è commensurabile in lunghezza con A.

La tesi è che un simile fatto si verifichi anche per C, D, ossia che:

$$q(C) - q(D) = q(F)$$

dove la retta F è commensurabile in lunghezza con C.

Se vogliamo servirci della nomenclatura che abbiamo stabilito nella Nota introduttiva al libro decimo, diremo che la X, 14 afferma che se quattro rette sono in proporzione e la prima è comm.le pitagoricamente con la seconda, anche la terza è comm.le pit.nte con la quarta.

La X, 14 aggiunge che se invece E è incomm.le in lunghezza con A, anche F è incomm.le in lunghezza con C. Può anche dirsi, nell'insieme, che la commensurabilità (o l'incommensurabilità) pitagorica si mantiene attraverso l'uguaglianza dei rapporti: cioè se ad una coppia di grandezze si sostituisce una coppia di altre due grandezze che stiano nello stesso rapporto delle prime due.

La dimostrazione si fonda principalmente sulla X, 11 (relativa alle grandezze in generale), secondo la quale anche la normale commensurabilità, o incommensurabilità, si mantiene attraverso l'uguaglianza dei rapporti. Cioè se vale la proporzione:

$$A : B = C : D$$

a seconda che A sia, o non sia, comm.le con B, anche C lo è (o non è) con D.

Ecco lo schema della dimostrazione della X, 14:

Ipotesi:

$$A : B = C : D$$

Si ricava:

$$q(A) : q(B) = q(C) : q(D) \qquad \text{(VI, 22)}$$

e scomponendo:

$$[q(A) - q(B)] : q(B) = [q(C) - q(D)] : q(D) \qquad \text{(V, 17)}$$

ossia:

$$q(E) : q(B) = q(F) : q(D)$$

da cui:

$$E : B = F : D \qquad \text{(VI, 22)}$$

e invertendo:

$$B : E = D : F \qquad \text{(V, 7, coroll.)}$$

Ma è anche:

$$A : B = C : D$$

quindi, *ex aequo*:

$$A : E = C : F$$

Basta ora applicare la X, 11: a seconda che A sia comm.le o incomm.le con E, altrettanto si ha per C con F.

Il lemma che precede la X, 14 permette di *costruire*, applicando il teorema di Pitagora, le rette E, F.

se A è commensurabile con E, anche C è commensurabile con F, e che invece, se A è incommensurabile con E, anche C è incommensurabile con F.

Infatti, poiché A sta a B come C sta a D, si ha pure che il quadrato di A sta a quello di B come il quadrato di C sta a quello di D (VI, 22). Ma la somma dei quadrati di E, B è uguale al quadrato di A, mentre al quadrato di C è uguale la somma dei quadrati di D, F. Perciò la somma dei quadrati di E, B sta al quadrato di B come la somma dei quadrati di D, F sta al quadrato di D; quindi, *scomponendo*, il quadrato di E sta a quello di B come il quadrato di F sta a quello di D (V, 17); si ha anche, perciò, che E sta a B come F sta a D (VI, 22), per cui, *invertendo*, B sta ad E come D sta a F (V, 7, coroll.). Ma si ha pure che A sta a B come C sta a D; quindi, *ex aequo*, A sta ad E come C sta a F (V, 22). Se perciò A è commensurabile con E, anche C è commensurabile con F, e se A è incommensurabile con E, anche C è incommensurabile con F (X, 11).

Dunque se, eccetera.

APPLICA: V, 7 coroll., 17, 22; VI, 22; X, 11.

È APPLICATA IN: X, 31, 32, 66, 103, 112, 113.

PROPOSIZIONE 15.

Se si sommano due grandezze commensurabili, anche la loro somma[a] *sarà commensurabile con ciascuna di esse; e se la somma [di due grandezze] è commensurabile con una di esse, anche le grandezze prese inizialmente*[b] *saranno commensurabili*[10].

a. Letteralmente è « l'intiero », cioè la totalità delle grandezze sommate, il tutto quanto di esse, la loro somma.

b. Letterale nel testo.

[10] Se due grandezze mA, nA ammettono la misura comune A, anche la somma $mA + nA$ la ammette. Ci si riannoda quindi alle prime propo-

Infatti, si sommino le due grandezze commensurabili *AB*, *BC*; dico che anche la loro somma *AC* è commensurabile con ciascuna delle due grandezze *AB*, *BC*.

Poiché *AB*, *BC* sono difatti commensurabili, le misurerà una certa grandezza. Le misuri, e sia essa *D*. Poiché dunque *D* misura *AB*, *BC*, misurerà anche la loro somma *AC*. Ma misura pure *AB*, *BC*; quindi *D* misura *AB*, *BC*, *AC*; dunque *AC* è commensurabile con ciascuna delle due grandezze *AB*, *BC* (X, def. I).

Supponiamo ora, invece, che *AC* sia commensurabile con *AB*; dico dunque che anche *AB*, *BC* sono commensurabili.

Infatti, poiché *AC*, *AB* sono commensurabili, le misurerà una certa grandezza. Le misuri, e sia essa *D*. Poiché dunque *D* misura *CA*, *AB*, misurerà pure la loro differenza [a] *BC*. Ma *D* misura anche *AB*; quindi *D* misurerà *AB*, *BC*, per cui *AB*, *BC* sono commensurabili (X, def. I).

Dunque, se due grandezze, eccetera.

È APPLICATA IN: X, 17, 36, 38, 54, 55, 60, 61, 62, 73, 75, 91, 92, 93, 98, 99, 111, 112, 113.

PROPOSIZIONE 16.

Se si sommano due grandezze incommensurabili, anche la loro somma sarà incommensurabile con ciascuna di esse; e se la somma di due grandezze è incommensurabile con una di

a. Alla lettera è « *BC* che rimane », evidentemente sottraendo *AB* da *CA*.

sizioni del libro quinto, dalle quali possono ricavarsi le necessarie *assunzioni* del libro settimo (per questa X, 15: se una grandezza misura altre due, ne misura anche la somma e la differenza). Per tali « assunzioni » si veda l'apposita nota all'inizio del libro settimo.

esse, anche le grandezze prese inizialmente saranno incommensurabili [11].

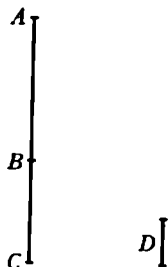
Infatti, si sommino le due grandezze incommensurabili *AB*, *BC*; dico che la loro somma *AC* è incommensurabile con ciascuna delle due grandezze *AB*, *BC*.

Se *AC* ed *AB* [a] non fossero difatti incommensurabili, una certa grandezza le misurerebbe. Le misuri, se possibile, e sia essa *D*. Poiché dunque *D* misura *AC* e *AB*, misurerà anche *BC* che è la loro differenza. Ma *D* misura pure *AB*; misura quindi *AB* e *BC*. Perciò *AB*, *BC* risulterebbero commensurabili; ma erano anche, per ipotesi, incommensurabili: il che è impossibile. Non può quindi darsi che una grandezza misuri *AC* ed *AB*, per cui *AC*, *AB* sono incommensurabili. Similmente potremo dimostrare che pure *AC*, *CB* sono incommensurabili.

Sia adesso invece il caso in cui [la somma] *AC* è incommensurabile con una delle grandezze *AB*, *BC*. Lo sia dapprima con *AB*; dico che anche *AB*, *BC* sono incommensurabili. Infatti, se fossero commensurabili, una certa grandezza le misurerebbe. Le misuri, e sia essa *D*. Poiché dunque *D* misura *AB* e *BC*, misurerà anche la loro somma *AC*. Ma *D* misura pure *AB*; quindi *D* misurerebbe *AC* ed *AB*. Perciò *AC*, *AB* risulterebbero commensurabili; ma per ipotesi erano anche incommensurabili: il che è impossibile. Non può quindi darsi che una grandezza misuri *AB* e *BC*, per cui *AB*, *BC* sono incommensurabili.

a. Letteralmente sarebbe «*CA*, *AB*», e *CA* è quasi sempre qui ripetuto da Euclide; la formula da noi adottata, qui ed altrove, e dove è adottata, serve a miglior comprensione.

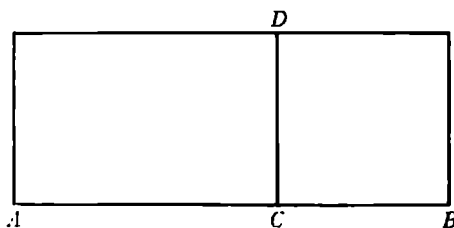
[11] Come viene osservato nell'edizione degli *Elementi* di Enriques (vol. III, p. 9) le due proposizioni 15 e 16 «esprimono la proprietà fondamentale dell'addizione di grandezze commensurabili e incommensurabili; dalla commensurabilità o meno di due delle grandezze *a*, *b* ($a + b$) si può concludere che tutte e tre sono o non sono commensurabili».

Dunque, se due grandezze, eccetera.

È APPLICATA IN: X, 18, 26, 36, 37, 39, 40, 73, 74, 76, 77.

LEMMA [12].

Se si applica ad una retta un parallelogrammo che manchi di un quadrato [a], il parallelogrammo applicato è uguale al rettangolo che è compreso dalle parti in cui la retta è stata divisa dall'applicazione [b].

Infatti, si applichi alla retta *AB* il parallelogrammo *AD*, mancante del quadrato *DB*; dico che *AD* è uguale al rettangolo di *AC*, *CB*.

Ed è evidente di per sé; poiché difatti *DB* è un quadrato, *DC* è uguale a *CB*, ed *AD* è il rettangolo avente per dimensioni *AC*, *CD* [c], vale a dire il rettangolo di *AC*, *CB*.

Dunque, se si applica ad una retta, eccetera.

È APPLICATO IN: X, 17, 18.

a. Letteralmente: di una figura quadrata.
b. Letteralmente: risultanti dall'applicazione.
c. Letteralmente: il rettangolo di *AC*, *CD*.

[12] Questo lemma, così come altri lemmi del libro decimo, non è di per sé necessario. Esso rappresenta soltanto una concessione didattica di Euclide, cioè serve per richiamare alla mente nozioni riguardanti l'applicazione ellittica delle aree, delle quali è stato già trattato nei libri secondo e sesto: nozioni che ora servono per la seguente prop. X, 17. Del resto, il lemma è *evidente di per sé* (αὐτόθεν φανερόν) come è detto nel testo.

Che poi questo, ed altri lemmi del libro decimo, siano effettivamente opera di Euclide, o aggiunta esplicativa di commentatori, è questione dubbia.

Proposizione 17.

Se si dànno due rette disuguali, e si applica alla maggiore un parallelogrammo uguale alla quarta parte del quadrato della minore e mancante di un quadrato, ed esso divide la retta in parti commensurabili in lunghezza, il quadrato della maggiore supererà quello della minore del quadrato di una retta commensurabile con la maggiore[a]. *E se il quadrato di una retta maggiore supera quello di una minore del quadrato di una retta commensurabile con la maggiore, ed a questa si applica un parallelogrammo uguale alla quarta parte del quadrato della minore e mancante di un quadrato, esso divide la retta in parti commensurabili in lunghezza*[13].

Siano A, BC due rette disuguali, di cui BC sia la maggiore, e si applichi a BC un parallelogrammo uguale alla quarta parte del quadrato della minore A, vale a dire uguale al quadrato della metà di A, e mancante di un quadrato: sia esso il rettangolo di BD, DC (X, 16, lemma), e BD sia commensurabile in lunghezza con DC; dico che il quadrato di BC è maggiore di quello di A del quadrato di una retta commensurabile con BC.

Infatti, si divida BC per metà nel punto E, e si ponga EF uguale a DE. La parte DC che rimane è quindi uguale all'altra parte rimanente BF[b]. E poiché si è divisa la retta BC in parti uguali in E, ed in parti disuguali in D, la somma del rettangolo compreso da BD, DC e del quadrato di ED[c]

a. Naturalmente il greco dice: « la retta maggiore potrà di più che la minore del quadrato di una retta a sé commensurabile ».
b. Letteralmente: La rimanente DC è quindi uguale a BF.
c. Letteralmente: « il rettangolo compreso da BD, DC insieme col quadrato di ED »; è dizione nota e la ricordiamo soltanto, come l'altra posteriore: « per cui il rettangolo compreso quattro volte da BD, DC insieme col quadruplo del quadrato di DE ».

[13] In questa proposizione X, 17 Euclide fornisce la condizione perché quelle che noi oggi chiamiamo equazioni di secondo grado abbiano come radici due numeri razionali. Per un commento alla proposizione stessa si veda la parte finale della nota introduttiva al libro decimo.

è uguale al quadrato di *EC* (II, 5); ed ugualmente accade per i loro quadrupli, per cui il quadruplo del rettangolo di *BD*, *DC* sommato col quadruplo del quadrato di *DE* è uguale al quadruplo del quadrato di *EC*. Ma il quadrato di *A* è uguale al quadruplo del rettangolo di *BD*, *DC*, mentre al quadruplo del quadrato di *DE* è uguale il quadrato di *DF* – difatti *DF* è doppia di *DE*. Inoltre il quadrato di *BC* è uguale al quadruplo del quadrato di *EC* – difatti, nuovamente, *BC* è doppia di *CE*. La somma dei quadrati di *A*, *DF* è quindi uguale al quadrato di *BC*, per cui il quadrato di *BC* supera quello di *A* del quadrato di *DF*; dunque *BC* è la retta il cui quadrato supera il quadrato di *A* del quadrato di *DF* [a]. Si deve dimostrare inoltre che *BC* è commensurabile con *DF*. Infatti, poiché *BD* è [per ipotesi] commensurabile in lunghezza con *DC*, pure *BC* è commensurabile in lunghezza con *DC* (X, 15). Ma *DC* è commensurabile in lunghezza con *DC* e *BF* – difatti *BF* è uguale a *DC*. Anche *BC* è quindi commensurabile in lunghezza con *BF*, *DC* (X, 12), cosicché *BC* è commensurabile in lunghezza pure con la retta rimanente *FD* (X, 15); dunque il quadrato di *BC* supera quello di *A* del quadrato di una retta commensurabile con *BC*.

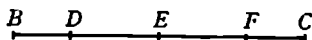
[Inversamente,] supponiamo ora che il quadrato di *BC* superi quello di *A* del quadrato di una retta commensurabile con *BC*: si applichi a *BC* un parallelogrammo uguale alla quarta parte del quadrato di *A* e mancante di un quadrato, e sia esso il rettangolo di *BD*, *DC*. Si deve dimostrare che *BD* è commensurabile in lunghezza con *DC*.

Infatti, eseguita la medesima costruzione, potremo similmente dimostrare che il quadrato di *BC* supera quello di *A* del quadrato di *FD*. Ma il quadrato di *BC* supera quello di *A* del quadrato di una retta commensurabile con *BC*.

a. Euclide dice prima letteralmente: « il quadrato di *BC* è maggiore del quadrato di *A* del quadrato di *DF* », poi con la solita espressione tecnica: « *BC* può dunque di più che *A* di *DF* (cioè, della retta *DF*, del quadrato – vale a dire – che abbia per lato *DF*) ».

Quindi BC è commensurabile in lunghezza con FD, cosicché BC è commensurabile in lunghezza pure con la somma delle due parti rimanenti BF, DC. Ma la retta risultante dalla somma di BF, DC [a] è commensurabile con DC (X, 6). Cosicché pure BC è commensurabile in lunghezza con DC (X, 12); quindi anche, la differenza fra BC e DC, cioè BD [b], è commensurabile in lunghezza con DC (X, 15).

Dunque, se vi sono due rette disuguali, eccetera.

Applica: II, 5; VI, 28; X, 12, 15 e lemma.

È applicata in: X, 54, 55, 60, 61, 62, 91, 92, 93, 97, 98.

Proposizione 18.

Se si dànno due rette disuguali, ed alla maggiore si applica un parallelogrammo uguale alla quarta parte del quadrato della minore e mancante di un quadrato, ed il parallelogrammo divide la retta in parti incommensurabili, il quadrato della maggiore supererà quello della minore del quadrato di una retta incommensurabile con la maggiore. E se il quadrato di una retta maggiore verrà a superare quello di una minore del quadrato di una retta incommensurabile con la maggiore, e si applica alla maggiore un parallelogrammo uguale alla quarta parte del quadrato della minore e mancante di un quadrato, il parallelogrammo divide la retta in parti incommensurabili.

Siano A, BC due rette disuguali, di cui BC sia la maggiore, e si applichi a BC un parallelogrammo uguale alla quarta parte del quadrato della minore A e mancante di un

a. Sarebbe piuttosto « ambedue le rette BF, DC, prese insieme, sono commensurabili ».

b. « la differenza fra BC e DC, cioè BD » corrisponde nel testo a διελόντι, termine della teoria delle proporzioni (*scomponendo*).

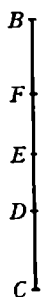
quadrato; sia esso il rettangolo di *BD*, *DC* (X, 16, lemma) [a], e *BD* sia incommensurabile in lunghezza con *DC*; dico che il quadrato di *BC* supera quello di *A* del quadrato di una retta incommensurabile con *BC*.

Infatti, eseguita la medesima costruzione, potremo similmente dimostrare che il quadrato di *BC* supera quello di *A* del quadrato di *FD*. Si deve dimostrare che *BC* è incommensurabile in lunghezza con *FD*. Poiché *BD* è difatti incommensurabile in lunghezza con *DC*, pure *BC* è incommensurabile in lunghezza con *DC* (X, 16). Ma *DC* è commensurabile con la somma delle due parti *BF*, *DC* (X, 6); quindi si ha anche che *BC* è incommensurabile con la somma di *BF*, *DC* (X, 13). Cosicché *BC* è incommensurabile in lunghezza pure con la parte rimanente *FD* (X, 16). Ed il quadrato di *BC* supera quello di *A* del quadrato di *FD*; dunque il quadrato di *BC* supera quello di *A* del quadrato di una retta incommensurabile con *BC*.

Supponiamo ora, di nuovo [ed inversamente], che il quadrato di *BC* superi quello di *A* del quadrato di una retta incommensurabile con *BC*; si applichi a *BC* un parallelogrammo uguale alla quarta parte del quadrato di *A* e mancante di un quadrato, e sia esso il rettangolo di *BD*, *DC*. Si deve dimostrare che *BD* è incommensurabile in lunghezza con *DC*.

Infatti, eseguita la medesima costruzione, potremo similmente dimostrare che il quadrato di *BC* supera quello di *A* del quadrato di *FD*. Ma [per ipotesi] il quadrato di *BC* supera quello di *A* del quadrato di una retta incommensurabile con *BC*. Quindi *BC* è incommensurabile in lunghezza con *FD*, cosicché *BC* è incommensurabile pure con la somma delle rimanenti due parti *BF*, *DC* (X, 16). Ma la somma di *BF*, *DC* è commensurabile in lunghezza con *DC* (X, 6); perciò si ha anche che *BC* è incommensurabile in

a. Letteralmente, con simbologia che si troverà anche in séguito, *il rettangolo di BDC*. Cfr. per questo nota a II, def. I.

lunghezza con DC, cosicché pure la differenza[a] BD è incommensurabile in lunghezza con DC (X, 16).

Dunque, se vi sono due rette, eccetera.

APPLICA: X, 6, 13, 16.

È APPLICATA IN: X, 33, 34, 57, 58, 63, 64, 65, 94, 95, 96, 100, 101, 102.

LEMMA[b].

Poiché si è dimostrato (X, 9, coroll.) che rette commensurabili in lunghezza sono commensurabili sempre anche in potenza, mentre quelle commensurabili in potenza non sempre lo sono anche in lunghezza, ma possono invece essere sia commensurabili in lunghezza che incommensurabili, è evidente che, se una retta è commensurabile in lunghezza con una retta assunta come razionale[c], si dice che la prima è razionale e commensurabile con la seconda[d] non soltanto in lunghezza, ma anche in potenza, poiché rette commensurabili in lunghezza lo sono sempre anche in potenza. Se invece una retta è commensurabile in potenza con una retta assunta come razionale, qualora lo sia anche in lunghezza si dice pure in questo caso che è razionale e commensurabile con quella in lunghezza ed in potenza; ma se una retta, commensurabile in potenza con una retta che si sia assunta nuovamente come razionale, è incommensurabile con essa in lunghezza, si dice che è razionale pure in questo caso, ma

a. Vale la nota *b* di X, 17.

b. Per questo lemma, cfr. nota *a*, alla prop. 19.

c. Letteralmente: con una retta razionale che si sia assunta.

d. Letteralmente: « essa è detta razionale e commensurabile con quella »; come generalmente si è fatto, adottiamo ***prima***, ***seconda***, ecc., quando sia opportuno.

commensurabile soltanto in potenza [con la retta assunta come razionale][14].

APPLICA: X, 9 coroll.

PROPOSIZIONE 19.

Un rettangolo, compreso da rette razionali commensurabili in lunghezza, è razionale[a][15].

Infatti, il rettangolo AC sia compreso dalle rette razionali commensurabili in lunghezza AB, BC; dico che AC è razionale.

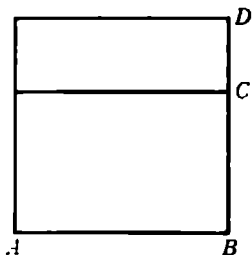
a. Il testo dice « rette razionali commensurabili in lunghezza *secondo uno dei modi predetti* » (con riferimento al lemma precedente, cioè al caso della commensurabilità in lunghezza): ora, v'è *un solo* modo di essere commensurabili in lunghezza. Sembrerebbe non vi fosse altro da fare che espungere le parole « secondo uno dei modi predetti », più che sospette, e siccome esse si riferiscono al lemma relativo a X, 18, di forma prolissa, non strettamente euclidea, di contenuto non necessario e, a quanto sembra, a sua volta in rapporto con un'aggiunta indubitabilmente spuria e da Heiberg riposta in Appendice, anche tale lemma a X, 18 parrebbe da respingere. È quello almeno che hanno fatto August e Heath (*op. cit.*, vol. III, p. 48), oltre che espungere le parole incriminabili dell'enunciato di X, 19 da noi stessi eliminate. In tal caso, eliminando il lemma a X, 18, il procedimento deve valere pure per il lemma (ma che non porta la dizione lemma) di X, 23, che inizia in modo similare per la forma al lemma di X, 19: « Analogamente a quanto si è detto per le rette razionali », e quanto al contenuto, di per sé esatto, rimanda appunto al lemma di X, 18; e vale ad ogni modo, una volta tolte le parole che eliminiamo dall'enunciato di X, 19, per le parole dell'enunciato di X, 24, tali e quali pur se applicate al caso delle mediali: « rette mediali commensurabili in lunghezza, *secondo uno dei modi predetti* ».

[14] Questo lemma, così come quello precedente la prop. X, 10, è prolisso e sostanzialmente inutile; esso viene giudicato di assai dubbia autenticità.

[15] Queste due proposizioni 19 e 20 sono corrispondenti alla 15: quest'ultima si riferisce alla somma di grandezze commensurabili qualunque, mentre la 19 e la 20 si riferiscono al prodotto (= rettangolo) di due rette commensurabili (in lunghezza).

La prop. 15 dice che se due delle tre grandezze a, b, $a+b$ sono commensurabili, tali sono tutt'e tre fra loro. Le propp. 19 e 20 affermano cosa

Su AB difatti si descriva il quadrato AD; quindi AD è razionale (X, def. IV). E poiché AB è commensurabile in lunghezza con BC, ma AB è uguale a BD, si ha che BD è commensurabile in lunghezza con BC. Ma BD sta a BC come DA sta ad AC (VI, 1). Quindi DA è commensurabile con AC (X, 11). Ma DA è razionale, per cui anche AC è razionale (X, def. IV).

Dunque, un rettangolo compreso da rette razionali commensurabili in lunghezza, eccetera.

APPLICA: I, 46; VI, 1; X, 11.

È APPLICATA IN: X, 25, 54, 55, 57, 71, 91, 92, 94.

PROPOSIZIONE 20.

Se un'area razionale viene applicata [parabolicamente] ad una retta razionale, ha[a] *una larghezza razionale e commensurabile in lunghezza con la retta a cui è applicata.*

Infatti, si applichi alla retta AB, anch'essa razionale secondo uno dei modi predetti[b] l'area razionale AC che venga ad avere la larghezza BC; dico che BC è razionale e commensurabile in lunghezza con BA.

a. Letteralmente: produce, forma una larghezza razionale.

b. Qui l'espressione *secondo uno dei modi predetti* va bene; cfr. lemma a X, 18.

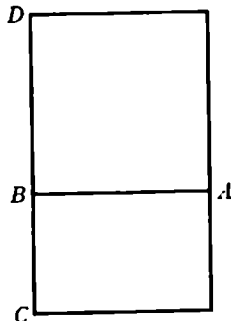
analoga per il prodotto (= rettangolo) di due linee commensurabili (in lunghezza) a, b. Basta che delle tre grandezze a, b, ab (rettangolo avente a, b per lati) due siano razionali, perché siano razionali tutt'e tre (cfr. ENRIQUES, vol. III, p. 9).

Invece, come si vedrà nella seguente prop. 21, se anche le due linee a, b sono razionali, ma incommensurabili in lunghezza (ossia commensurabili soltanto in potenza) il loro rettangolo è irrazionale.

Su AB difatti si descriva il quadrato AD; quindi AD è razionale (X, def. IV). Ma pure AC è razionale; quindi DA è commensurabile con AC. Ma DA sta ad AC come DB sta a BC (VI, 1); perciò anche DB è commensurabile con BC (X, 11). Ma DB è uguale a BA; pure AB è quindi commensurabile con BC. Ma AB è razionale, per cui anche BC è razionale e commensurabile in lunghezza con AB (X, def. III).

Dunque, se un'area razionale viene applicata [parabolicamente] ad una retta razionale, eccetera.

APPLICA: I, 46; VI, 1; X, 11.

È APPLICATA IN: X, 26, 38, 60, 61, 63, 64, 75, 78, 97, 100, 101, 108, 112, 113, 115.

PROPOSIZIONE 21.

Un rettangolo compreso da rette razionali commensurabili soltanto in potenza è irrazionale, e la retta, il cui quadrato sia ad esso uguale[a], *è irrazionale: si chiami* mediale.

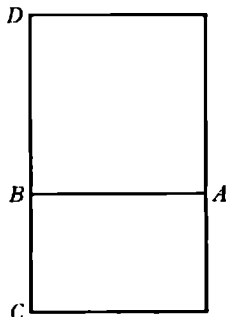
Infatti, il rettangolo AC sia compreso dalle rette razionali AB, BC commensurabili soltanto in potenza; dico che AC è irrazionale, e che la retta, il cui quadrato sia uguale ad esso, è irrazionale: si chiami *mediale*[16].

a. Letteralmente: la retta che lo può, che lo potenzia.

[16] Questa, la « mediale » (μέση), è la prima retta irrazionale che Euclide introduce nel libro decimo. Si parte da due rette razionali commensurabili tra loro soltanto in potenza e con esse si costruisce il rettangolo. Euclide dimostra anzitutto che detto rettangolo è irrazionale, cioè incommensurabile col quadrato (razionale) avente per lato una delle due rette razionali di partenza.

Si costruisce poi il quadrato *uguale* al rettangolo (ciò che si sa fare in base alla II, 14): anche tale quadrato è irrazionale, e quindi (X, def. IV) anche il suo lato è irrazionale: si tratta appunto della *mediale*.

In altri termini: si costruisce la retta media proporzionale tra due rette razionali, commensurabili tra loro soltanto in potenza, dalle quali si parte: è quella media proporzionale che si chiama retta *mediale*, ed è

Su AB difatti si descriva il quadrato AD; quindi AD è razionale per ipotesi (X, def. IV). E poiché AB è incommensurabile in lunghezza con BC – difatti per ipotesi sono commensurabili soltanto in potenza –, e poiché AB è uguale a BD, anche DB è incommensurabile in lunghezza con BC. Ora, DB sta a BC come AD sta ad AC (VI, 1); perciò DA è incommensurabile con AC (X, 11). Ma DA è razionale, per cui AC è irrazionale (X, def. IV); cosicché anche la retta, il cui quadrato sia uguale ad AC[a], è irrazionale (X, def. IV), e sia chiamata *mediale*. – C.D.D.

APPLICA: I, 46; VI, 1.

È APPLICATA IN: X, 22, 23, 25, 27, 28, 31, 32, 33, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 79, 81, 91, 93, 96, 97.

a. Heiberg espunge le parole, che egli ritiene non genuine e che non spiegano nulla, rinvenibili dopo questa espressione: « vale

irrazionale. Il termine greco per retta (irrazionale) mediale (μέση) è appunto lo stesso che viene adoperato per la media proporzionale (μέση ἀνάλογον).

Nei nostri simboli, se indichiamo con a, b due numeri razionali qualunque, il secondo dei quali non sia un quadrato (perfetto) di altro numero razionale, possiamo denotare con a e $\sqrt{b}$ le due rette di partenza (riferendoci, s'intende, alle loro lunghezze, rispetto ad una certa unità di misura). Infatti in tal modo le *rette* misurate da a, $\sqrt{b}$ (o più brevemente, le rette a, $\sqrt{b}$) sono incommensurabili in lunghezza (poiché b non è un quadrato perfetto) ma commensurabili in potenza (i loro quadrati, infatti, hanno le aree a^2, b: sono quindi commensurabili). Il rettangolo delle due rette a, $\sqrt{b}$ ha per area il prodotto $a\sqrt{b}$.

Il quadrato ad esso equivalente (ossia la *retta* media proporzionale tra a, $\sqrt{b}$) ha dunque il lato espresso da $\sqrt{a\sqrt{b}}$. Ecco in qual modo noi esprimiamo la retta *mediale*.

Si tratta dunque di due radicali quadratici sovrapposti, ossia di una radice quarta.

Si osservi che la lunghezza della mediale è radice di una particolare equazione biquadratica, nella quale manchi il termine di secondo grado:

$$x^4 - a^2b = 0$$
$$x = \sqrt{a\sqrt{b}}$$

(prescindendo dai doppi segni).

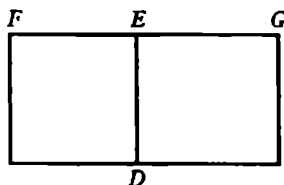
LEMMA.

Date due rette[a], la prima sta alla seconda come il quadrato della prima sta al rettangolo compreso dalle due rette[17].

Siano *FE*, *EG* due rette. Dico che *FE* sta ad *EG* come il quadrato di *FE* sta al rettangolo di *FE*, *EG*.

Infatti, si descriva su *FE* il quadrato *DF*, e si completi *GD*. Poiché dunque *FE* sta ad *EG* come *FD* sta a *DG* (VI, 1), e *FD* è il quadrato di *FE*, mentre *DG* è il rettangolo di *DE*, *EG*, vale a dire il rettangolo di *FE*, *EG*, si ha che *FE* sta ad *EG* come il quadrato di *FE* sta al rettangolo di *FE*, *EG*. Similmente anche, il rettangolo di *GE*, *EF* sta al quadrato di *EF*, vale a dire *GD* sta a *FD*, come *GE* sta ad *EF*. – C.D.D.

APPLICA: VI, 1.

È APPLICATO IN: X, 22, 26, 31, 32, 35, 36, 38, 44, 47, 60, 62, 67, 71, 73, 97, 102, 104.

PROPOSIZIONE 22.

Il quadrato di una mediale, applicato ad una retta razionale, forma [un rettangolo avente] per larghezza (cioè, per

a dire quella retta che potenzii (ἡ... δυναμένη) un quadrato uguale ad *AC* ». Da notare che nel codice P, prima della clausola *come si doveva dimostrare*, si ritrova: « dato che la retta che potenzii un quadrato uguale all'area *AC*, e che egli (cioè, Euclide) chiama retta mediale (è evidente quindi trattarsi di aggiunta al codice P), è media proporzionale fra *AB*, *BC* »; è chiaro allora, nota Heiberg, che l'aggiunta di simile argomento ritrovabile nei codici teonini ed insistente nella spiegazione: « dato che il quadrato di essa è uguale al rettangolo di *AB*, *BC* e che essa viene ad essere media proporzionale fra *AB*, *BC* », va attribuita a Teone e non ad Euclide.

a. Letteralmente: Se vi sono due rette.

[17] Questo lemma non è altro che una ricapitolazione della parte essenziale della prima proposizione del libro sesto.

Esso non porta quindi nessun elemento nuovo di conoscenza.

altezza) una retta razionale ed incommensurabile in lunghezza con quella a cui è applicato[18].

Siano A una mediale e CB una retta razionale: si applichi a CB un rettangolo BD[a], uguale al quadrato di A e che

a. Letteralmente: un'area rettangolare.

[18] Questa proposizione è parzialmente l'inversa della precedente X, 21. Infatti nella precedente si parte da due rette razionali incommensurabili tra loro in lunghezza e si costruisce dapprima il loro rettangolo, poi il quadrato ad esso equivalente: il lato del quadrato è la *mediale*.

In questa proposizione si procede in senso inverso: si parte da una retta *mediale* (definita dalla X, 21), se ne costruisce il quadrato, poi si *applica* (parabolicamente) detto quadrato ad una retta razionale data. In altri termini, si costruisce il rettangolo equivalente al quadrato e avente per base la retta razionale data. Il teorema afferma che l'altezza di detto rettangolo è una retta razionale incommensurabile in lunghezza con la base, cioè con la retta data.

Ciò significa, in sostanza, che una retta mediale può sempre esser concepita come media proporzionale tra due rette razionali, incommensurabili tra loro in lunghezza, anche quando una delle due rette sia scelta ad arbitrio.

Il lettore che preferisce rivedere la dimostrazione, di lettura piuttosto complicata, in modo più semplice con l'uso dei nostri simboli, può leggere quanto segue.

Ci riferiamo, naturalmente, a lunghezze e ad aree.

Sia data dunque una retta mediale $\sqrt{h\sqrt{k}}$, dove h, k, sono numeri razionali, e k non è quadrato di alcun numero razionale. Il quadrato della linea mediale data ha l'area: $h\sqrt{k}$. Diciamo che se applichiamo parabolicamente tale area ad una retta razionale data a, ossia se costruiamo un rettangolo avente detta area ed una base razionale data a, l'altezza del rettangolo è una retta x, la quale è commensurabile con a soltanto in potenza, cioè: 1) è razionale, 2) è incommensurabile in lunghezza con a.

1) Intanto dovrà aversi:

$$h\sqrt{k} = ax$$

Ciò vale quanto dire:

$$a : h = \sqrt{k} : x$$

(VI, 14 oppure: vale la proporzione perché il rettangolo dei medi è *uguale* a quello degli estremi).

Ma dalla proporzione delle *rette* può risalirsi a quella dei quadrati (VI, 22), cioè:

$$a^2 : h^2 = k : x^2$$

E siccome a^2 è commensurabile con h^2 (essendo a, h razionali, quindi

Mosaico dei sette sapienti, proveniente da Boscoreale

(Napoli, Museo Nazionale).

abbia per altezza[a] *CD*; dico che *CD* è razionale ed incommensurabile in lunghezza con *CB*.

Infatti, poiché *A* è una mediale, il suo quadrato è uguale ad un'area compresa[b] da rette razionali commensurabili soltanto in potenza (X, 21). Sia il quadrato di *A* uguale a *GF*. Ma il quadrato in questione è pure uguale a *BD*, per cui *BD* è uguale a *GF*. Ma rispetto a *GF* il parallelogrammo *BD* è pure equiangolo; ed in parallelogrammi uguali ed equiangoli i lati che comprendono angoli uguali risultano inversamente proporzionali (VI, 14); si ha perciò, in proporzione, che *BC* sta ad *EG* come *EF* sta a *CD* ($BC : EG = EF : CD$). Quindi anche, il quadrato di *BC* sta al quadrato di *EG* come il quadrato di *EF* sta al quadrato di *CD* (VI, 22). Ma il quadrato di *BC* è commensurabile con quello di *EG* –

a. Traduciamo a questo modo ciò che, naturalmente, è sempre « che produce, forma come larghezza ».

b. È letteralmente: « essa può un'area compresa, uno spazio compreso », e subito dopo « Possa essa *GF* (per *Sia il quadrato A uguale a GF*). Ma può anche *BD* »; useremo di norma queste e simili traduzioni.

commensurabili almeno in potenza) risulta (X, 11) che k è commensurabile con x^2.

Ma k è razionale, quindi anche x^2 è razionale, e quindi la retta x è razionale. Termina così la prima parte della dimostrazione.

2) Per definizione di mediale (X, 21) è $\sqrt{k}$ incommensurabile in lunghezza con h. Inoltre è:

$$\sqrt{k} : h = k : h\sqrt{k}$$

(rettangoli di uguale altezza $\sqrt{k}$ stanno tra loro come le basi). Quindi k è incommensurabile con $h\sqrt{k}$ ossia con ax (che è uguale ad $h\sqrt{k}$).

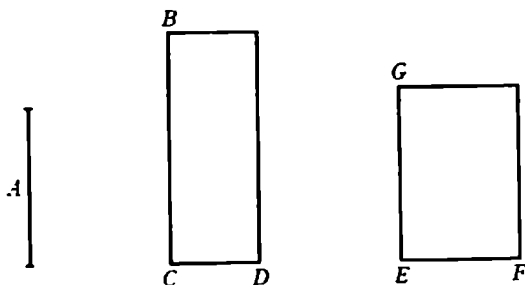
Ma k è commensurabile con x^2 (poiché x e $\sqrt{k}$ sono ambedue razionali), quindi x^2 è incommensurabile con ax. Simbolicamente:

k inc. $h\sqrt{k}$	ossia: ax inc. k
$h\sqrt{k} = ax$	ma: k comm. x^2
k inc. ax	si deduce: ax inc. x^2 (X, 13)

Ma:

$$ax : x^2 = a : x$$

(due rettangoli di uguale altezza x stanno tra loro come le basi). Essendo ax incommensurabile con x^2 si deduce (X, 11) che a è incommensurabile (in lunghezza) con x (c.v.d.).

ciascuna delle due rette è difatti razionale; pure il quadrato di *EF* è perciò commensurabile con quello di *CD* (X, 11). Ma il quadrato di *EF* è razionale [essendo *EF* razionale], per cui anche quello di *CD* è razionale (X, def. IV); dunque *CD* è razionale. E poiché *EF* è incommensurabile in lunghezza con *EG* – difatti sono commensurabili soltanto in potenza –, e poiché *EF* sta ad *EG* come il quadrato di *EF* sta al rettangolo di *EF*, *EG* (X, 21, lemma), il quadrato di *EF* è incommensurabile col rettangolo di *EF*, *EG* (X, 11). Ma il quadrato di *CD* è commensurabile col quadrato di *EF* – le rette *CD*, *EF* sono difatti commensurabili in potenza essendo ambedue razionali[a] –, mentre il rettangolo di *CD*, *CB* è commensurabile col rettangolo di *EF*, *EG* – essi difatti sono uguali al quadrato di *A* –; perciò anche, il quadrato di *CD* è incommensurabile col rettangolo di *CD*, *CB* (X, 13). Ma il quadrato di *CD* sta al rettangolo di *CD*, *CB* come *CD* sta a *CB* (cfr. X, 21, lemma); quindi *CD* è incommensurabile in lunghezza con *CB* (X, 11). Dunque *CD* è una retta razionale ed incommensurabile in lunghezza con *CB*. – C.D.D.

Applica: VI, 14, 22; X, 11, 13, 21.

È applicata in: X, 23, 25, 26, 38, 41, 44, 47, 61, 62, 63, 64, 65, 72 (scolio), 75, 78, 81, 84, 97, 99, 100, 101, 102, 108, 110, 111 (scolio).

a. Letteralmente: « tali rette sono difatti razionali in potenza »; adoperiamo formule opportune.

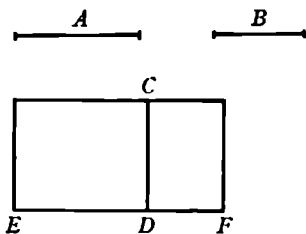
PROPOSIZIONE 23.

Una retta commensurabile con una mediale è una mediale [19].

Sia *A* una mediale, e *B* sia commensurabile con *A*; dico che anche *B* è una mediale.

Infatti, si assuma come retta razionale data la *CD*, e si applichi a *CD* l'area rettangolare *CE*, uguale al quadrato di *A* ed avente per larghezza [= altezza] *ED*; quindi *ED* è razionale ed incommensurabile in lunghezza con *CD* (X, 22). Si applichi poi a *CD* l'area rettangolare *CF*, uguale al quadrato di *B* ed avente per larghezza [= altezza][a] *DF*. Poiché dunque *A* è commensurabile con *B*, pure il quadrato di *A* è commensurabile col quadrato di *B*. Ma *EC* è uguale al quadrato di *A*, mentre al quadrato di *B* è uguale *CF*; quindi *EC* è commensurabile con *CF*. Ora, *EC* sta a *CF* come *ED* sta a *DF* (VI, 1), per cui *ED* è commensurabile in lunghezza con *DF* (X, 11). Ma *ED* è razionale ed incommensurabile in lunghezza con *DC*; quindi anche *DF* è razionale (X, def. III) ed incommensurabile in lunghezza con *DC* (X, 13), per cui *CD*, *DF* sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza. Ma una retta il cui quadrato sia uguale ad un'area compresa da rette razionali commensurabili soltanto in potenza, è una mediale (X, 21). Perciò la retta, il cui quadrato sia uguale al rettangolo di *CD*, *DF*, è una mediale; ma il quadrato di *B* è uguale al rettangolo di *CD*, *DF*, e dunque *B* è una mediale.

APPLICA I, 44-45; VI, 1; X, 11, 13, 21, 22.

È APPLICATA IN: X, 28, 31, 32, 67, 97, 104.

a. Alla lettera è sempre « che forma per larghezza », adesso come prima. D'ora innanzi, senza più indicazioni, potremo usare il termine *altezza*.

[19] La retta commensurabile con la mediale, che si dimostra esser mediale essa stessa, può anche essere commensurabile soltanto in potenza. Infatti la commensurabilità tra retta e mediale viene utilizzata solo per stabilire che sono commensurabili i quadrati su di esse costruiti.

COROLLARIO.

È da ciò evidente che un'area commensurabile con un'area mediale è mediale [20].

È APPLICATO IN: X, 24, 33, 39, 61, 62, 67, 68, 75, 81, 98, 99, 104, 105.

LEMMA [a].

Analogamente a quanto si è detto per le rette razionali, consegue pure per le mediali che una retta commensurabile in lunghezza con una mediale si dica mediale e commensurabile ad essa non soltanto in lunghezza, ma anche in potenza, poiché tutte le rette commensurabili in lunghezza lo sono sempre anche in potenza. Se invece una retta è commensurabile in potenza con una mediale, qualora lo sia anche in lunghezza si dice pure in questo caso che è mediale e commensurabile con la prima mediale [b] in lunghezza ed in potenza, se poi lo è soltanto in potenza, le rette si dicono mediali commensurabili in potenza [21].

È APPLICATO IN: X, 27.

a. V. nota *a*. a X, 19. Il termine lemma non è nel testo. Abbiamo poi alla fine delle parole che non riportiamo, perché – come dice Heiberg – oscure in sé e senza dubbio non autentiche.

b. Letteralmente: le rette pure in questo caso si dicono mediali e commensurabili.

[20] Qui Euclide introduce *l'area mediale*: essa è l'area del quadrato avente per lato la retta mediale, ossia è l'area del rettangolo avente i lati razionali, ma commensurabili tra loro soltanto in potenza. Nei nostri simboli, un'area mediale è espressa da $a\sqrt{b}$, dove a, b son numeri razionali, il secondo dei quali non è il quadrato di alcun numero razionale.

[21] Lemma pressoché insignificante, che in sostanza nulla aggiunge al teorema precedente.

Esistono cioè rette mediali tra loro commensurabili in lunghezza, o anche tra loro commensurabili soltanto in potenza. Stiefel porta anche

PROPOSIZIONE 24.

Un rettangolo, compreso da rette mediali commensurabili in lunghezza, è area mediale [a].

Infatti, il rettangolo AC $[R = AC]$ [b] sia compreso dalle rette mediali commensurabili in lunghezza AB, BC; dico che $R = AC$ è area mediale.

Su AB difatti si descriva il quadrato AD $[Q = AD]$; quindi AD è area mediale. E poiché AB è commensurabile in lunghezza con BC, anche DB è commensurabile in lun-

a. Espungiamo il séguito: « secondo uno dei modi predetti », perché lo riteniamo da espungere d'accordo con Heath (v. nota *a*. a X, 19). Da notare che si dice solo, letteralmente: *Un rettangolo... è mediale*, ma l'aggiunta di *area* è legittima, e la faremo di norma.

b. Per quanto riguarda i simboli, ci comporteremo nel modo seguente: porremo dapprima in parentesi quadre i simboli per noi corrispondenti alle indicazioni euclidee, dandoci la libertà di usare tali simboli, posteriormente, tutte le volte lo riteniamo opportuno.

esempi di rette mediali tra loro incommensurabili sia in lunghezza sia in potenza.

Ecco i tre esempi di Stiefel (cfr. ed. ENRIQUES, vol. III, p. 81):

Data la mediale $\sqrt{\sqrt{6}} = \sqrt[4]{6}$ (ci riferiamo sempre alla *lunghezza* delle linee rispetto ad una unità di misura), la mediale

$$2\sqrt{\sqrt{6}} = 2\sqrt[4]{6} = \sqrt[4]{16.6} = \sqrt[4]{96}$$

è commensurabile con la prima anche in lunghezza (sta ad essa come $2:1$).

La mediale:

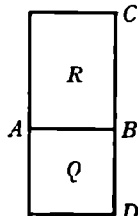
$$\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{6}} = \sqrt[4]{4}\sqrt[4]{6} = \sqrt[4]{24}$$

è commensurabile con la prima soltanto in potenza. Infatti:

$$(\sqrt[4]{24})^2 = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}\,; \quad (\sqrt[4]{6})^2 = \sqrt{6}$$

quindi le aree dei quadrati costruiti sulle due mediali stanno tra loro come $2:1$ (mentre le linee stanno invece tra loro come $\sqrt{2}$ sta ad 1).

Finalmente la mediale $\sqrt[4]{12}$ non è commensurabile con $\sqrt[4]{6}$ (né in lunghezza né) in potenza: infatti i due loro quadrati hanno le aree $\sqrt{12}$, $\sqrt{6}$, che sono incommensurabili (stanno tra loro come $\sqrt{2}$ ad 1, essendo $\sqrt{12} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{6}$).

ghezza con BC; [ma $DB : BC = Q : R$ (VI, 1)] cosicché pure $Q = AD$ è commensurabile con $R = AC$ (X, 11). Ma $Q = AD$ è area mediale; dunque anche $R = AC$ è area mediale (X, 23, coroll.). – C.D.D.

APPLICA: I, 46; VI, 1; X, 11, 23 coroll.

È APPLICATA IN: X, 80.

PROPOSIZIONE 25.

Un rettangolo, compreso da rette mediali commensurabili soltanto in potenza, o è razionale od è area mediale[22].

Infatti, il rettangolo AC [$R = AC$] sia compreso dalle

[22] Nella prop. 24 si è considerato il rettangolo avente per dimensioni due rette mediali commensurabili tra loro in lunghezza: detto rettangolo risulta essere un'area mediale. Coi nostri simboli, dovendo le due rette mediali stare tra loro come un numero (intero) ad un numero (intero), le loro lunghezze risultano così espresse:

$$p\sqrt{a\sqrt{b}} \ : \ q\sqrt{a\sqrt{b}}$$

(p, q, a, b, numeri razionali, dei quali b non è quadrato di alcun numero razionale). Il loro rettangolo ha l'area:

$$pqa\sqrt{b} = c\sqrt{b}$$

ossia è un'area mediale.

Vi sono invece due possibilità nell'ipotesi della prop. 25: cioè se le due rette mediali sono commensurabili tra loro soltanto in potenza.

Il loro rettangolo, in questa ipotesi, ha l'area:

$$p\sqrt{a\sqrt{b}} \cdot q\sqrt{c\sqrt{b}}$$

Infatti i quadrati costruiti sulle due rette mediali debbono stare tra loro come un numero (intero) ad un numero e le loro aree sono appunto:

$$p^2 \cdot a\sqrt{b} \ : \ q^2c\sqrt{b}$$

ossia stanno tra loro come p^2a sta a q^2c, rapporto che è un numero razionale, ossia può condursi ad essere il rapporto di due numeri interi. Operando la moltiplicazione dei due radicali, l'area del rettangolo è:

$$pq\sqrt{acb}$$

Ora possono darsi due casi: o il prodotto acb è il quadrato di un numero razionale, e allora l'area è razionale perché si elimina il segno di

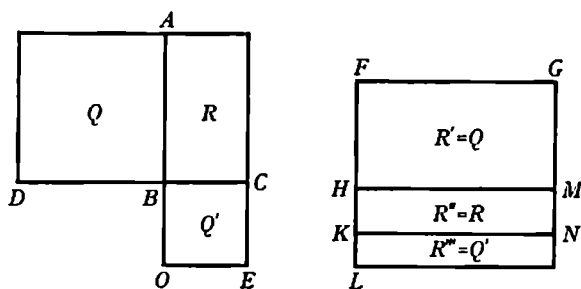
rette mediali AB, BC commensurabili soltanto in potenza; dico che $R = AC$ o è razionale od è area mediale.

Si descrivano difatti su AB, BC i quadrati AD, BE [$Q = AD$, $Q' = BE$]; ciascuno dei due quadrati Q, Q' è quindi area mediale. E si prenda a piacere[a] la retta razionale FG, si applichi a FG [parabolicamente] il rettangolo[b] GH [$R' = GH$], uguale a $Q = AD$ e che abbia FH per altezza, a HM si applichi il rettangolo MK [$R'' = MK$], uguale a $R = AC$ e che abbia per altezza HK, ed infine si applichi similmente a KN il rettangolo NL [$R''' = NL$], uguale a $Q' = BE$ e che abbia KL per altezza; perciò FH, HK, KL sono in linea retta fra loro. Poiché dunque ciascuno dei due quadrati Q, Q' è area mediale, ma $Q = AD$ è uguale a $R' = GH$, mentre $Q' = BE$ è uguale a $R''' = NL$, pure ognuno dei due rettangoli R', R''' è area mediale. E sono ambedue applicati alla [base] razionale FG; quindi ciascuna delle due altezze FH, KL è razionale ed incommensurabile in lunghezza con FG (X, 22). E poiché Q è commensurabile con Q', anche R' è commensurabile con R'''. Ma R' sta a R''' come FH sta a KL (VI, 1), per cui FH è commensurabile in lunghezza con KL (X, 11). Perciò FH, KL sono rette razionali commensurabili in lunghezza; quindi il rettangolo avente per dimensioni FH, KL è razionale (X, 19). Ora, poiché DB è uguale a BA, ed OB è uguale a BC, si ha che $DB : BC = AB : BO$. Ma $DB : BC = Q : R$ (VI, 1), ed $AB : BO = R : Q'$ (id.); quindi $Q : R = R : Q'$. Ma $Q = R'$; $R = R''$; $Q' = R'''$, per cui si ha che $R' : R'' = R'' : R'''$; quindi anche, $FH : HK = HK : KL$ (VI, 1); perciò il rettangolo avente per dimensioni FH, KL è uguale al quadrato di HK (VI, 17). Ma il rettangolo di FH, KL è razionale [essendo razionali i suoi lati]; anche il quadrato di HK è

a. Letteralmente: si assuma.
b. Letteralmente: il parallelogrammo rettangolare.

radice, o il prodotto *acb* non è un quadrato perfetto e allora l'area del rettangolo è del tipo $r\sqrt{s}$ e quindi è area mediale. La dimostrazione di Euclide segue appunto questa strada, ma per via geometrica.

quindi razionale, e HK è razionale. Ora, se HK è commensurabile in lunghezza con FG, il rettangolo $R'' = HN$ è razionale (X, 19); se invece è incommensurabile in lunghezza con FG, le rette KH, HM sono razionali commensurabili soltanto in potenza, per cui $R'' = HN$ è area mediale (X, 21). Quindi $R'' = HN$ o è razionale od è area mediale. Ma $R'' = HN$ è uguale a $R = AC$; quindi $R = AC$ o è razionale od è area mediale.

Dunque, un rettangolo compreso da rette mediali commensurabili soltanto in potenza, eccetera.

APPLICA: I, 14, 44-45, 46; V, 11; VI, 1, 17; X, 19, 21, 22.

PROPOSIZIONE 26.

Un'area mediale non eccede di un'area razionale un'area mediale [a] [23].

Infatti, se possibile, l'area mediale AB [$AB = M$] ecceda dell'area razionale DB [$DB = R$] l'area mediale AC [$AC =$

a. L'enunciato in lingua greca è così ammirevole nella sua stringatezza che mette conto di riportarlo: Μέσον μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ.

[23] Se possibile, la differenza tra due aree mediali M, M' sia un'area razionale R.

Applichiamo le tre aree M, M', R parabolicamente ad una retta razionale qualsiasi r. Fra le tre altezze h, h', h'' dei rettangoli applicati intercorre la relazione $h'' = h - h'$. Ma per la X, 22, h, h' sono razionali

$= M'$]; si prenda la retta razionale [qualunque] EF, si applichi ad EF il rettangolo FH, uguale ad $AB = M$ e che abbia EH per altezza, e se ne sottragga FG uguale ad $AC = M'$: l'area rimanente BD [$BD = R$] dell'area $AB = M$ è perciò uguale alla KH che rimane di FH. Ma l'area $BD = R$ è razionale [per ipotesi]; quindi è razionale anche l'area KH [ad essa uguale]. Poiché dunque ciascuna delle due aree $AB = M$, $AC = M'$ è [per ipotesi] mediale, pure ciascuna delle due aree ad esse rispettivamente uguali $FH = M$, $FG = M'$ [a] è mediale. E sono ambedue applicate alla retta razionale EF, per cui ciascuna delle due rette HE, EG è

a. Letteralmente: e poiché AB è uguale a FH, mentre AC è uguale a FG, pure ciascuna delle due aree FH, FG è mediale.

incommensurabili in lunghezza con r, mentre per la X, 20 h'' è pure razionale, ma commensurabile in lunghezza con r.

Abbiamo dunque due *grandezze* r, h'' razionali e commensurabili tra loro: la prima di esse (r) è incommensurabile con una terza h'; segue per la X, 13 che anche la seconda, cioè h'', è incommensurabile con la terza h'. Ma si ha la proporzione:

$$h' : h'' = q\,(h') : r\,(h', h'')$$

(VI, 1: quadrato e rettangolo hanno eguale altezza h', quindi stanno tra loro come le basi). E siccome h', h'' (come si è visto or ora) sono incommensurabili, tali sono (per la X, 13) anche $q\,(h')$ e $r\,(h', h'')$.

Ma $q\,(h')$ è commensurabile con la somma di quadrati $q\,(h') + q\,(h'')$ (infatti h', h'' sono ambedue razionali, quindi i loro quadrati sono commensurabili tra loro, sicché ciascuno di essi è commensurabile con la somma di ambedue) (X, 15). Inoltre il rettangolo $r\,(h, h')$ è commensurabile col suo doppio $2\,r\,(h, h')$ (X, 15). Quindi dal fatto che è:

$$q\,(h') \text{ incomm.le con } r\,(h', h'')$$

si deduce che è: $q\,(h') + q\,(h'')$ incomm.le con $2\,r\,(h', h'')$ (X, 16).

E inoltre:

$$q\,(h') + q\,(h'') \text{ incomm.le con } q\,(h') + q\,(h'') + 2r\,(h', h'')$$

ossia:

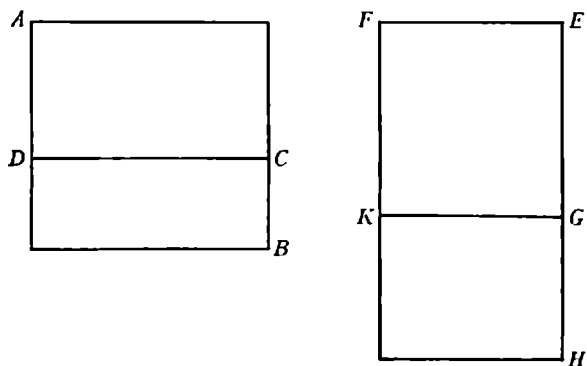
$$q\,(h') + q\,(h'') \text{ incomm.le con } q\,(h' + h'') = q\,(h)$$

Ma $q\,(h') + q\,(h'')$ è razionale, dunque $q\,(h)$, con esso incommensurabile, è irrazionale, e pertanto è irrazionale anche il suo lato h. Si era invece trovato che h è razionale (per la X, 22): di qui l'assurdo, causato dalla supposizione fatta che h'' fosse commensurabile in lunghezza con r.

razionale ed incommensurabile in lunghezza con *EF* (X, 22). E poiché $DB = R$ è razionale ed è uguale a *KH*, pure *KH* è razionale[a]. E $KH = R$ è applicata alla retta razionale [$KG =$] *EF*; quindi *GH* è una retta razionale e commensurabile in lunghezza con *EF* (X, 20). Ma anche *EG* è razionale, ed incommensurabile in lunghezza con *EF*; abbiamo quindi due grandezze commensurabili *EF*, *GH* e la prima di esse, *EF*, è incommensurabile con una terza grandezza *EG*, per cui si ha che pure la seconda grandezza, *GH*, è incommensurabile con la terza *EG* (X, 13)[b]. Ora, *EG* sta a *GH* come il quadrato di *EG*[, cioè *M'*,] sta al rettangolo di *EG*, *GH*[, cioè $M = M' + R$] (X, 21, lemma); perciò il quadrato di *EG* è incommensurabile col rettangolo di *EG*, *GH* (X, 11). Ma la somma dei quadrati di *EG*, *GH* è commensurabile col quadrato di *EG* – ambedue, *EG*, *GH*, sono difatti rette razionali –, mentre col rettangolo di *EG*, *GH* è commensurabile il doppio del rettangolo di *EG*, *GH* – difatti si tratta del doppio di quello (X, 6) –; quindi la somma dei quadrati di *EG*, *GH* è incommensurabile col doppio del rettangolo di *EG*, *GH* (X, 13), e la somma dei quadrati di *EG*, *GH* e del doppio del rettangolo di *EG*, *GH*, il che equivale al quadrato di *EH* (II, 4), è incommensurabile con la somma dei quadrati di *EG*, *GH* (X, 16). Ma la somma dei quadrati di *EG*, *GH* è razionale; il quadrato di *EH* è perciò irrazionale (X, def. IV). Quindi *EH* è in tal caso retta irrazionale (id.). Ma è pure razionale: il che è impossibile.

a. Heiberg rileva che tutte queste parole, dopo che già prima è stato detto che l'area $BD = R$ è razionale per ipotesi e che è perciò razionale anche l'area *KH* ad essa uguale, sono inutili o sovrabbondanti, e forse interpolate.

b. Letteralmente è soltanto: « perciò *EG* è incommensurabile in lunghezza con *GH* ». Come già al caso della nota *a* e sempre più spesso avanti, dovremo impiegare clausole opportune alla comprensione.

Dunque, un'area mediale non eccede... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 44-45; II, 4; X, 6, 11, 13, 16, 20, 22.

È APPLICATA IN: X, 42, 43, 45, 46, 79, 80, 82.

NOTA ALLE NOVE COSTRUZIONI DI COPPIE DI RETTE (X, 27-35).

In questo gruppo di proposizioni Euclide si prepara, per dir così, le armi per introdurre le sue rette irrazionali. Soltanto una di queste è stata già introdotta, la retta mediale (X, 21).

Essa è stata definita attraverso l'esame del rettangolo avente per lati due rette date (precisamente è area mediale quella del rettangolo compreso da due rette razionali comm.li soltanto in potenza, e retta mediale è il lato del quadrato equivalente al rettangolo, ossia la retta media proporzionale tra i lati del rettangolo stesso). Inoltre nella X, 36 Euclide introdurrà una seconda retta irrazionale (la cosiddetta *binomiale*) addizionando due rette razionali comm.li soltanto in potenza. E nella X, 73 introdurrà simmetricamente una nuova retta irrazionale (la cosiddetta *apotome*) come differenza tra due rette razionali comm.li solo in potenza. Ma ora anche le rette mediali vengono impiegate accanto alle rette razionali come « ingredienti » per generare, con loro combinazioni, nuove linee irrazionali. E tali combinazioni si compiono ora per addizione e per sottrazione.

Cominciamo con le due costruzioni di X, 27 e X, 28. Come s'è detto, Euclide aveva dimostrato nelle proposizioni X, 23 e X, 24 che mentre il rettangolo compreso da due rette mediali comm.li in lunghezza è area mediale, il rettangolo compreso da due rette mediali comm.li solo in potenza può essere area razionale o area mediale. Ora le due prime costruzioni sciolgono questa riserva di possibilità alternativa: si costruiscono, infatti, due rette mediali (comm.li soltanto in potenza) o ad area razionale (X, 27) o ad area mediale (X, 28).

E precisamente la prima costruzione parte da due rette razionali A, B comm.li solo in potenza (X, 10). Si costruisce la media proporzionale C tra A e B:

$$A : C = C : B$$

e poi la quarta proporzionale D dopo A, B, C:

$$A : B = C : D$$

C e D sono le due rette richieste: Infatti $q\,(C) = r\,(A, B)$ è area mediale (X, 21), e perciò C è retta mediale. Inoltre,

essendo A comm.le (in potenza) con B, e valendo la proporzione $A : B = C : D$ anche D è comm.le (in potenza) con C (X, 11) e quindi anche D è retta mediale (X, 23).

Per mostrare che il rettangolo $r\ (C, D)$ è area razionale (come è richiesto) si permutano i medi nella proporzione: $A : B = C : D$ ottenendo: $A : C = B : D$. Confrontando con la proporzione che ha introdotto C si ha: $C : B = B : D$ da cui: $r\ (C, D) = q\ (B)$. Ma la retta B è razionale, quindi è razionale $q\ (B)$: tale è dunque pure $r\ (C, D)$.

Per costruire (X, 28) due rette mediali comm.li solo in potenza e ad area mediale, si parte da tre rette razionali A, B, C, comm.li solo in potenza, e si costruiscono le rette D, E in base alle proporzioni:

$$A : D = D : B$$
$$B : C = D : E$$

Le rette richieste sono D, E. Infatti $q\ (D) = r\ (A, B)$, quindi D è retta mediale. Tale è anche E che è comm.le con D, dal momento che C lo è per ipotesi con B. Dalla seconda proporzione si ha poi permutando:

$$B : D = C : E$$

e dalla prima invertendo:

$$D : A = B : D$$

Si ricava:

$$D : A = C : E$$

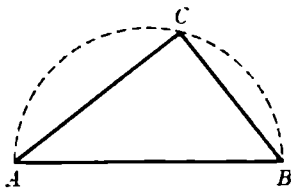
ossia:

$$r\ (D, E) = r\ (A, C)$$

Si tratta dunque proprio delle rette richieste, poiché il loro rettangolo $r\ (D, E)$ è area mediale (come quella del rettangolo di A e C).

Queste due coppie di rette mediali della X, 27 e della X, 28 dànno luogo, per addizione e sottrazione, a nuove rette irrazionali: la *prima bimediale* è la somma delle due prime (X, 37), mentre la *seconda bimediale* è la somma delle altre due (X, 38): così per le differenze, che dànno rispettivamente la *prima apotome di mediale* (X, 74) e la *seconda apotome di mediale* (X, 75).

Si torna ora, con le X, 29-30, alla costruzione di coppie di rette razionali. Si richiede che esse siano comm.li solo in potenza: fin qui basta la X, 10. Ma si aggiunge un'altra condizione: per

la X, 29 essa è che le due rette siano pitagoricamente comm.li, per la X, 30 è che non lo siano (cioè la differenza tra il quadrato della retta maggiore e quello della retta minore deve essere il quadrato di una retta commensurabile, o rispettivamente non comm.le, in lunghezza con la retta maggiore).

Nella X, 29 si parte da una retta razionale AB, e si prendono due numeri quadrati h^2, k^2 tali che la loro differenza $h^2 - k^2$ *non sia* un numero quadrato.

Si determina poi la retta AC in modo che si abbia:

$$q\,(AB) : q\,(AC) = h^2 : (h^2 - k^2)$$

Ciò in base al corollario della X, 6: anzitutto si determina la retta X soddisfacente alla proporzione:

$$AB : X = h^2 : (h^2 - k^2)$$

poi si prende AC media proporzionale ha AB, X, ossia:

$$AB : AC = AC : X$$

Allora è:

$$q\,(AB) : q\,(AC) = AB : X \qquad \text{(VI, 20, coroll.)}$$

e quindi:

$$q\,(AB) : q\,(AC) = h^2 : (h^2 - k^2)$$

Siccome $q\,(AB)$ è razionale, tale è anche $q\,(AC)$ che è comm.le con $q\,(AB)$ (i due quadrati stanno infatti tra loro come un numero sta ad un numero). Ma d'altra parte i due quadrati non stanno tra loro come un numero quadrato sta ad un numero quadrato (essendosi scelti h, k in modo che $h^2 - k^2$ non sia numero quadrato), quindi AC è razionale, ma incommensurabile in lunghezza con AB, ossia AB, AC sono rette razionali commensurabili solo in potenza. Esse sono le rette richieste; sono infatti anche pitagoricamente commensurabili. Ciò si ricava dall'ultima proporzione scritta, scomponendo:

$$[q\,(AB) - q\,(AC)] : q\,(AB) = k^2 : h^2$$

cioè la differenza tra i due quadrati di AB, AC è un quadrato il lato del quale è commensurabile in lunghezza con AB (cfr. nota introduttiva al libro X per la commensurabilità pitagorica).

In modo del tutto simile Euclide procede nella X, 30: si scelgono però due numeri quadrati h^2, k^2 tali che sia la loro *somma* a non essere un numero quadrato.

Si determina allora AC in modo che sia:

$$q\,(AB) : q\,(AC) = (h^2 + k^2) : h^2$$

Le due rette AB, AC sono quelle richieste, poiché (in modo simile a quanto è stato fatto nella X, 29) si dimostra che esse sono razionali comm.li solo in potenza, e non comm.li pitagoricamente.

È da osservare che le due coppie di rette razionali delle X, 29-30 non dànno luogo direttamente a nuove rette irrazionali, ma servono per la costruzione delle rette mediali particolari richieste dalla X, 31 e dalla X, 32.

E tali rette, a loro volta, vengono impiegate nelle tre ultime costruzioni (X, 33-34-35), dando coppie di rette che, combinate per addizione e sottrazione, conducono a nuove rette irrazionali.

In che consistono i due problemi, X, 31 e X, 32 preliminari, come s'è detto, dei seguenti? Si tratta, in ciascun problema, di costruire due rette mediali comm.li solo in potenza e ad area razionale (X, 31) o mediale (X, 32).

Fin qui i problemi sono gli stessi già trattati nelle X, 27-28. Ma si aggiunge una ulteriore precisazione: che le due rette mediali che vengono costruite siano, o non siano, pitagoricamente comm.li.

Nella X, 31, dunque, si chiede di costruire due rette mediali comm.li solo in potenza, ad area razionale e comm.li (oppure non comm.li) pitagoricamente.

Si parte da due rette razionali A, B, comm.li solo in potenza, e comm.li pitagoricamente (X, 29).

Si trovano le rette richieste C, D, comm.li pitagoricamente mediante le proporzioni:

$$A : C = C : B$$
$$C : B = B : D$$

da cui, *ex aequo*:

$$A : B = C : D$$

Se, invece, si parte da due rette razionali A, B, comm.li solo in potenza e non comm.li pitagoricamente (X, 30) anche C, D risultano non comm.li pitagoricamente.

Similmente si procede nella X, 32, partendo da tre rette razionali, A, B, C, comm.li solo in potenza, e assumendo D, E tali che sia:

$$A : D = D : B$$
$$D : C = B : E$$

Le due rette D, E son quelle richieste (tra l'altro, il loro rettangolo è area mediale).

Ed eccoci, finalmente, alle tre costruzioni più importanti (X, 33, 34, 35). In tutte e tre si tratta di costruire una coppia di rette *incommensurabili tra loro anche in potenza*, ma con le seguenti differenti condizioni aggiuntive:

X, 33: pitagoricamente sommabili; area mediale.
X, 34: pitagoricamente sommabili; area razionale.
X, 35: pitagoricamente *non* sommabili; area mediale.

(Ricordiamo che due rette si dicono pitagoricamente sommabili se la somma dei loro quadrati è un'area razionale).

Come si vede, le tre coppie di rette da costruire devono avere un carattere comune: quello di essere (le rette di ciascuna coppia) incommensurabili anche in potenza. Ciò porta ad escludere che le rette di ciascuna coppia siano ambedue razionali, altrimenti sarebbero comm.li almeno in potenza.

Ed anzi, per i due primi problemi (X, 33, 34) la sommabilità pitagorica, o l'area razionale, porta alla conseguenza che le due rette di ciascuna coppia sono ambedue irrazionali. E lo stesso, in altro modo, può vedersi anche per le rette della terza coppia (X, 35).

Occorre ora avvertire che delle rette di ciascuna coppia Euclide si serve per generare altre rette irrazionali: addizionando, ad esempio, le due rette di cui alla X, 33 (cioè due rette incommensurabili in potenza, pitagoricamente sommabili e ad area mediale) ottiene l'irrazionale detta *maggiore* (X, 39), mentre sottraendo l'una dall'altra ottiene un'altra retta irrazionale, detta *minore* (X, 76).

Ma è strano che Euclide non si occupi delle rette di ciascuna coppia: si tratta di rette che, sommate o sottratte, dànno luogo a rette irrazionali che Euclide denomina e classifica (così, ad esempio, la *maggiore* e la *minore*): ma quale specie di linee irrazionali sono le rette di ciascuna coppia? Euclide, ripetiamo, non considera tale questione. Vediamo ora a quali risultati in proposito si giunge, utilizzando il nostro simbolismo algebrico.

Ci limitiamo alla prima coppia di rette, cioè a quelle della X, 33. Se indichiamo con x, y le due rette, abbiamo le due equazioni:

$$x^2 + y^2 = p$$
$$2xy = \sqrt{q}$$

dove p è un numero razionale (data la *sommabilità pitagorica*) mentre q è un numero non quadrato (poiché l'area xy deve essere mediale). Il coefficiente 2 è stato introdotto per pura comodità di calcolo.

Risolviamo rispetto a x^2, y^2 il sistema:

$$x^2 + y^2 = p$$
$$x^2y^2 = \frac{q}{4}$$

da cui:

$$z^2 - pz + \frac{q}{4} = 0 \qquad z = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - q}}{2}$$

quindi:

$$x = \sqrt{\frac{p + \sqrt{p^2 - q}}{2}} \qquad y = \sqrt{\frac{p - \sqrt{p^2 - q}}{2}}$$

Questi radicali doppi non possono esser ridotti a somme di radicali semplici. Perché, infatti, possa avvenire la trasformazione:

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{m} + \sqrt{n}$$

occorre che $a^2 - b$ sia un numero quadrato.

Nel nostro caso:

$$a^2 - b = p^2 - (p^2 - q) = q$$

che per l'ipotesi della medialità dell'area non è un numero quadrato. Tralasciando il divisore $\sqrt{2}$ possiamo dunque dire che le due rette richieste vengono espresse da:

$$x = \sqrt{p + \sqrt{p^2 - q}} \qquad y = \sqrt{p - \sqrt{p^2 - q}}$$

Naturalmente occorre che $p^2 - q$ non sia un numero quadrato. Questa relazione tra i coefficienti delle equazioni sopra scritte viene espressa da Euclide in forma equivalente prescrivendo che le due rette debbano essere incommensurabili in potenza (condi-

zione della quale non abbiamo tenuto conto finora). Se, infatti, $p^2 - q$ fosse il quadrato t^2 di un numero t le espressioni di x^2, y^2 diverrebbero:

$$x^2 = \frac{p+t}{2} \qquad y^2 = \frac{p-t}{2}$$

e le due rette x, y risulterebbero comm.li in potenza (e inversamente).

Come è stato già detto, Euclide utilizza le due rette x, y della X, 33 (e similmente per quelle delle X, 34, 35) per ottenere altre linee irrazionali. Fermiamo la nostra attenzione, come s'è prima detto, sulla X, 33. La somma $x + y$ ci dà la irrazionale *maggiore* (X, 39) mentre la differenza $x - y$ ci dà la irrazionale *minore* (X, 76). Sicché le espressioni, coi nostri simboli, delle rette *maggiore* e *minore* sono:

$$\sqrt{p + \sqrt{p^2 - q}} \pm \sqrt{p - \sqrt{p^2 - q}}$$

Ma non è questa l'espressione definitiva. Infatti la somma (o differenza) di due radicali doppi che differiscono soltanto per il segno intermedio è riducibile ad un unico radicale doppio. Cioè:

$$\sqrt{p + \sqrt{p^2 - q}} \pm \sqrt{p - \sqrt{p^2 - q}} = \sqrt{2p \pm 2\sqrt{q}}$$

come subito si verifica elevando a quadrato i due membri. E poiché il coefficiente 2 di p e del radicale non ha nessun rilievo effettivo, si conclude che le espressioni della retta maggiore e della retta minore sono:

$$\sqrt{r + \sqrt{s}} \quad \text{e} \quad \sqrt{r - \sqrt{s}}$$

(dove s e $r^2 - s$ non sono numeri quadrati).

D'altra parte, le espressioni delle due rette x, y della X, 33 sono in definitiva le stesse di quelle or ora scritte, poiché nessuna particolarità rappresenta il fatto che sotto il radicale interno sia la differenza $p^2 - q$ sotto condizione che quest'ultima non sia un quadrato perfetto.

Si giunge pertanto alla conclusione che le due rette x, y sono proprio le due rette irrazionali che più tardi Euclide chiamerà *maggiore* e *minore*.

Ma se consideriamo di nuovo la formula di riduzione sopra scritta, presentandola nel modo seguente:

$$\sqrt{r \pm \sqrt{s}} = \sqrt{\frac{r}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{r^2 - s}} \pm \sqrt{\frac{r}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{r^2 - s}}$$

vediamo che le nostre due rette x, y che ritroviamo nel primo membro, si presentano rispettivamente come somma e come differenza d'una retta maggiore (indichiamola qui con M) e di una retta minore (indichiamola con m). Ossia:

$$x = M + m$$
$$y = M - m$$

Si comprende che addizionando x, y Euclide ottenga $2M$, cioè una retta *maggiore*, mentre sottraendole ottenga $2m$, cioè una retta *minore*.

Ma noi, col nostro simbolismo, vediamo ciò che Euclide non ha esposto, cioè:

1) che le due rette x, y richieste dalla X, 33 sono a loro volta rispettivamente l'irrazionale *maggiore* e la *minore*;

2) che le due rette x, y si presentano pure come somma (o rispettivamente differenza) di una *maggiore* e di una *minore*, sicché sommandole, o sottraendole, si ottiene ancora una *maggiore*, o rispettivamente una *minore*.

In sostanza, Euclide (forse senza essersene reso conto) definisce M e m partendo da $M + m$ e da $M - m$, dove poi $M + m$ e $M - m$ sono della stessa *natura* di M (rispettivamente di m). Analoghe considerazioni potrebbero svolgersi per le coppie di rette richieste dalle X, 34-35, in relazione alle rette irrazionali da esse generate per addizione e sottrazione.

Ci limitiamo ad aggiungere che le costruzioni relative alle tre proposizioni X, 33, 34, 35 si fondano su una notevolissima relazione riguardante un triangolo rettangolo ABC, del quale CH sia l'altezza sull'ipotenusa. Si ha:

$$AH : HB = r\,(AH, AB) : r\,(HB, AB) \qquad \text{(VI, 1)}$$

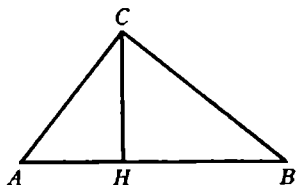
ma:

$$r\,(AH, AB) = q\,(AC) \ ; \ r\,(HB, AB) = q\,(CB)$$

quindi:

$$AH : HB = q\,(AC) : q\,(CB)$$

Ossia in ogni triangolo rettangolo i quadrati dei cateti stanno tra loro come le rispettive proiezioni sull'ipotenusa.

Sicché, se AH, HB sono le radici di un'equazione di secondo grado (in relazione all'applicazione ellittica eseguita nelle suddette proposizioni), AC, CB sono radici di un'equazione biquadratica (cfr. edizione degli *Elementi* di Enriques, vol. III, pp. 112 e seguenti).

Chiudiamo questa nota facendo presente che la regola sopra veduta per trasformare la somma (o la differenza) di due radicali quadratici doppi in un unico radicale si trova nel *Liber abbaci* di Leonardo Pisano, detto il Fibonacci: esposta naturalmente a parole, ed anche con esempi numerici (ediz. Baldassarre Boncompagni, Roma, 1857, pp. 376-377).

A. F.

PROPOSIZIONE 27.

Trovare due rette mediali[a] *commensurabili soltanto in potenza e che comprendano un'area razionale*[24].

Si assumano come date[b] le due rette razionali A, B commensurabili soltanto in potenza, si prenda la retta C media proporzionale fra A, B (VI, 13), e si determini la retta D quarta proporzionale dopo A, B, C (VI, 12)[c] [– sia cioè: $A : C = C : B$, ed inoltre $A : B = C : D$]. Ora, poiché A, B sono razionali commensurabili soltanto in potenza, il rettangolo di A, B, vale a dire il quadrato di C (VI, 17), è area mediale (X, 21). Quindi C è una retta mediale (X, 21). E poiché A sta a B come C sta a D, ma A, B sono commensurabili soltanto in potenza, anche C, D sono commensurabili soltanto in potenza (X, 11). E la retta C è una mediale; quindi anche D è una retta mediale (X, 23). Dunque C, D sono rette mediali commensurabili soltanto in potenza. Dico inoltre che comprendono un'area razionale. Infatti, poiché A sta a B come C sta a D [$A : B = C : D$], si ha, *permutando*, che A sta a C come B sta a D [$A : C = B : D$] (V, 16). Ma A sta a C come C sta a B [$A : C = C : B$]; quindi anche, C sta a B come B sta a D [$C : B = B : D$] (V, 11); perciò il rettangolo di C, D è uguale al quadrato di B (VI, 17). Ma il quadrato di B è razionale, [dato che B

a. Letteralmente: (rette) mediali.

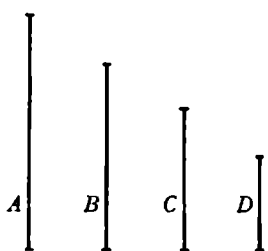
b. *Si assumano come date* qui, e le variazioni del caso, saranno usate normalmente per il semplice greco *Si assumano* ('Εκκείσθωσαν), come già abbiamo visto.

c. Letteralmente: e risulti essere in modo (o: risulti fatto in modo) che A stia a B come C sta a D.

[24] Nella prop. 25 Euclide ha dimostrato che il rettangolo avente per lati due rette mediali commensurabili soltanto in potenza può essere area razionale o area mediale.

In queste due prop. 27, 28 Euclide mostra come si possa procedere per costruire due rette mediali commensurabili soltanto in potenza che diano luogo o ad un caso (area razionale, prop. 27) o all'altro (area mediale, prop. 28).

è una retta razionale,] per cui è razionale pure il rettangolo di C, D.

Dunque, sono state trovate due rette mediali [C, D] commensurabili soltanto in potenza e comprendenti un'area razionale. - C.D.D.

APPLICA: V, 11, 16; VI, 12, 13, 17; X, 11, 21.

È APPLICATA IN: X, 37.

PROPOSIZIONE 28.

Trovare due rette mediali commensurabili soltanto in potenza e che comprendano un'area mediale.

Si assumano come date le tre rette razionali A, B, C commensurabili soltanto in potenza, si prenda la retta D media proporzionale fra A, B (VI, 13), e si costruisca la retta E quarta proporzionale dopo B, C, D (VI, 12) [- sia cioè: $A : D = D : B$, ed inoltre $B : C = D : E$].

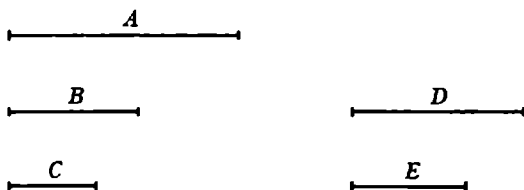
Poiché le rette A, B sono razionali commensurabili soltanto in potenza, il rettangolo di A, B, vale a dire il quadrato di D [che è uguale a quel rettangolo], è un'area mediale (X, 21). Quindi D è una retta mediale (X, 21). Poiché inoltre B, C sono commensurabili soltanto in potenza, e B sta a C come D sta ad E [$B : C = D : E$], pure D, E sono commensurabili soltanto in potenza (X, 11). Ma D è una retta mediale; perciò anche E è una retta mediale (X, 23); dunque D, E sono due rette mediali commensurabili soltanto in potenza. Dico adesso che comprendono inoltre un'area mediale. Infatti, poiché B sta a C come D sta ad E [$B : C =$ $= D : E$], si ha, *permutando*, che B sta a D come C sta ad E [$B : D = C : E$] (V, 16). Ma B sta a D come D sta ad A [$B : D = D : A$, come si ottiene, *invertendo*, da: $A : D =$ $= D : B$]; quindi anche, D sta ad A come C sta ad E [$D : A = C : E$] (V, 11). Quindi il rettangolo di A, C è uguale

al rettangolo di *D*, *E* (VI, 16). Ma il rettangolo di *A*, *C* è area mediale [essendo *A*, *C* rette razionali commensurabili soltanto in potenza], per cui è mediale anche il rettangolo di *D*, *E*.

Dunque, sono state trovate due rette mediali *D*, *E* commensurabili soltanto in potenza e comprendenti un'area mediale. – C.D.D.

A

B D

C E

APPLICA: V, 11, 16; VI, 12, 13, 16, 17; X, 11, 21, 23.

LEMMA [I].

Trovare due numeri quadrati tali che anche la loro somma[a] *sia un quadrato*[25].

Si prendano due numeri *AB*, *CB*[b], ed essi siano o ambedue pari od ambedue dispari. E poiché, sia che si sottragga

a. Letteralmente: quello che è posto insieme da essi, che è composto di essi (τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν).

b. Letteralmente: Si propongano, si assumano (di preciso: Risultino assunti) i due numeri *AB*, *BC*.

[25] Questi due lemmi compresi tra la prop. 28 e la prop. 29 sono aritmetici, ossia si riferiscono a numeri. Il primo è in stretta relazione con la cosiddetta *equazione pitagorica* $x^2 + y^2 = z^2$ che va risolta in numeri interi.

La soluzione di Euclide fa capo alla II, 6: proposizione che si riferisce al problema di applicazione iperbolica delle aree, e che si traduce aritmeticamente così:

$$(a + x)\,x + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2$$

Come è stato mostrato nella nota alla II, 8, tale enunciato, se si pone $a + x = 2p$; $x = 2q$ si trasforma nell'altro:

$$4\,pq + (p - q)^2 = (p + q)^2$$

un numero pari da un numero pari sia che si sottragga un numero dispari da un numero dispari, quello che rimane è pari (IX, 24, 26), la loro differenza AC[a] è pari. Si divida AC

a. Letteralmente: AC che rimane.

cioè proprio in quello della II, 8. Qui, nel lemma che ci interessa, p, q sono numeri (interi). Euclide parte allora da due numeri $2p$, $2q$ ambedue pari (nessuna essenziale differenza se i due numeri dai quali si parte siano ambedue dispari). Si costruisce un segmento AB di lunghezza $2p$, se ne sottrae il segmento $CB = 2q$ e si divide per metà in D il segmento-differenza $AC = 2\ (p - q)$, sicché si ha: $AD = DC = p - q$.

A D E C B

Si applica allora la II, 6 (che viene a coincidere con la II, 8):

$$r\ (AB \cdot CB) + q\ (DC) = q\ (DB)$$

ossia:

$$2p \cdot 2q + (p - q)^2 = (p + q)^2$$

Basta, quindi, che il prodotto $2p \cdot 2q$ sia un numero quadrato perché sia risolto il problema di trovare due numeri quadrati tali che la loro somma sia un numero quadrato. E perché il prodotto $2p \cdot 2q$ sia un numero quadrato basta scegliere $2p$, $2q$ in modo che siano numeri piani simili (IX, 1) cioè tali che si possano scindere in coppie di fattori proporzionali. Per es.: $(a \cdot b)$ e $(ma \cdot mb)$ sono numeri piani simili $(a : ma = b : mb)$. Il loro prodotto è: $ab \cdot ma \cdot mb = m^2 \cdot a^2 \cdot b^2$ ossia è un numero quadrato.

Nel secondo lemma, si cerca una terna di numeri che non soddisfi l'equazione pitagorica, nel senso che si cercano due numeri quadrati tali che la loro somma *non sia* un numero quadrato. Euclide, per raggiungere lo scopo, ripete la costruzione del primo lemma, ma invece di considerare la somma: $r\ (AB \cdot CB) + q\ (DC)$ (espressione riguardante le lunghezze, questa e le seguenti) considera quella: $r\ (AB \cdot CB) + q\ (EC)$ dove $EC = DC - 1$ (diminuisce cioè di una unità la lunghezza della base del secondo quadrato).

Fa poi vedere che tale somma non può essere un numero quadrato né uguale a EB^2 né minore di EB^2. Che poi possa essere un numero quadrato maggiore di EB^2 Euclide lo esclude dicendo che altrimenti «*verrebbe a dividersi l'unità*» (τμηθῇ ἡ μονάς).

Ciò significa che siccome la somma $AB \cdot CB + EC^2$ è certamente minore di $AB \cdot CB + DC^2$ e quindi (per il primo lemma) minore di DB^2, se essa fosse un numero quadrato maggiore di EB^2 ciò significherebbe l'esistenza di un numero quadrato compreso tra EB^2 e DB^2. Ma ciò è impossibile perché EB, DB sono due numeri interi consecutivi: il *numero* quadrato intermedio sarebbe dunque il quadrato di una frazione, ossia si sarebbe divisa in parti l'unità: cosa inconcepibile nell'aritmetica dei numeri interi.

Tornando al lemma I osserviamo che la soluzione di Euclide dell'equazione pitagorica comprende come casi particolari le soluzioni cosiddette di Pitagora e di Platone (cfr. l'edizione di Enriques, vol. III, p. 96).

per metà in D. E siano inoltre AB, CB o numeri piani simili, o quadrati, che sono anch'essi numeri piani simili; la somma del prodotto di AB per CB e del quadrato di DC è quindi uguale al quadrato di DB[, cioè: $AB \cdot CB + DC^2 = DB^2$] (II, 6). Ma il prodotto di AB per CB è un numero quadrato, dal momento fu dimostrato che il prodotto di due numeri piani simili è un quadrato[a] (IX, 1). Si sono dunque trovati due numeri quadrati, cioè il prodotto di AB per CB ed il quadrato di DC che, sommati, dànno il quadrato di DB.

Ed è evidente che si sono ancora trovati due numeri quadrati, cioè il quadrato di DB e quello di DC, tali che la loro differenza, ossia il prodotto di AB per CB[b], sia un quadrato, qualora AB, CB siano numeri piani simili. Qualora poi non siano numeri piani simili, si sono trovati due numeri quadrati, cioè il quadrato di DB e quello di DC, la cui differenza, ossia il prodotto di AB per CB, non è un quadrato. – C.D.D.

A

D

C

B

APPLICA: II, 6; IX, 1, 24, 26.

È APPLICATO IN: X, 29, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 85, 86, 87, 89, 90.

LEMMA II.

Trovare due numeri quadrati tali che la loro somma non sia un quadrato.

Infatti, sia il prodotto di AB per CB, come si disse (cfr. lemma I), un numero quadrato, e CA sia un numero pari: si divida CA per metà in D. È allora evidente che la somma del numero quadrato, prodotto di AB per CB, e del

a. Letteralmente: dal momento che fu dimostrato che, se due numeri piani simili, moltiplicandosi fra loro, producono un altro numero, il prodotto (esattamente: il numero così prodottosi, che venne ad essere, a prodursi) è quadrato.

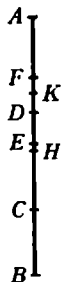
b. Letteralmente: il (numero compreso) da AB, BC.

quadrato di DC è uguale al quadrato di DB[, cioè: $AB \cdot CB + DC^2 = DB^2$] (II, 6; cfr. lemma I). Si sottragga [dal numero DC] l'unità DE; la somma del prodotto di AB per CB e del quadrato di EC è perciò minore del quadrato di DB[, cioè: $AB \cdot CB + EC^2 < DB^2$]. Dico dunque che la somma del numero quadrato, il quale è il prodotto di AB per CB, e del quadrato di EC non può essere un numero quadrato.

Se fosse difatti un quadrato, sarebbe uguale al quadrato di EB o minore del quadrato di EB, ma non potrebbe darsi ne fosse anche maggiore, perché in tal caso verrebbe a dividersi l'unità[a] (*cfr. nota n. 25*). Dapprima, se possibile, la somma del prodotto di AB per CB e del quadrato di EC sia uguale al quadrato di EB[, cioè: $AB \cdot CB + EC^2 = EB^2$], ed il numero AF sia il doppio dell'unità DE. Poiché dunque tutto quanto AC è il doppio di tutto quanto CD, ma la parte AF [di uno dei due numeri] è il doppio della parte DE [dell'altro], pure il resto FC [del primo] è il doppio del resto EC [del secondo][, ossia, poiché $AC = 2DC$, ma $AF = 2DE$, anche la differenza $AC - AF$ sarà doppia della differenza $DC - DE$, cioè: $AC - AF = 2(DC - DE)$, vale a dire $FC = 2EC$][b]; perciò FC risulta diviso in E per metà. Quindi $FB \cdot CB + EC^2 = EB^2$ (II, 6). Ma, come si era supposto, è: $AB \cdot CB + EC^2 = EB^2$, per cui $FB \cdot CB + EC^2 = AB \cdot CB + EC^2$. Ora, sottratto in comune dalle due parti il quadrato di EC, verrebbe a seguire [$AB \cdot CB = FB \cdot CB$, da cui] $AB = FB$: il che è assurdo. Dunque, la somma $AB \cdot CB + EC^2$ non è uguale al quadrato di EB. Dico adesso che non è neppure minore del quadrato di EB. Infatti, se possibile, sia $AB \cdot CB + EC^2 = HB^2$, e AK sia il doppio

a. Letteralmente: Infatti, se sarà un quadrato, o esso è uguale al quadrato di BE, o minore del quadrato di BE, ma non ne sarà anche maggiore, perché non venga divisa l'unità.

b. Poniamo qui un esempio del frasario euclideo, prima di adottare nel séguito i simboli moderni così da rendere più immediata la comprensione del testo. D'altronde, sulla base dell'esempio qui offerto e degli altri già praticati, la ricostruzione dell'originario non sarebbe nemmeno impossibile. Il medesimo procedimento dovremo spesso impiegare per l'innanzi.

di DH. Ne seguirà di nuovo che KC è il doppio di HC, in modo che risulti pure KC divisa per metà in H, e quindi si abbia $KB \cdot CB + HC^2 = HB^2$ (II, 6). Ma si è supposto che sia anche $AB \cdot CB + EC^2 = HB^2$. Cosicché, sarebbe pure $KB \cdot CB + HC^2 = AB \cdot CB + EC^2$: il che è assurdo [essendo il primo membro dell'uguaglianza manifestamente minore del secondo]. Perciò la somma del prodotto di AB per CB e del quadrato di EC [$AB \cdot CB + EC^2$] non può essere uguale ad un quadrato minore di quello di EB. Ma fu dimostrato che non è neppure uguale al quadrato di EB. Dunque, la somma del prodotto di AB per CB e del quadrato di EC non è un numero quadrato. – C.D.D.[a]

APPLICA: II, 6.

È APPLICATO IN: X, 30, 87, 89, 90.

PROPOSIZIONE 29.

Trovare due rette razionali commensurabili soltanto in potenza, tali che il quadrato della maggiore superi quello della minore del quadrato di una retta commensurabile in lunghezza con la maggiore[b].

Infatti, si assumano come dati la retta razionale AB ed i due numeri quadrati CD, ED [$CD = p^2$; $ED = r^2$], tali che la loro differenza CE [$CE = p^2 - r^2 = m$] non sia un numero quadrato (X, 28, lemma I), si descriva su AB il semicerchio AFB, si determini AF[c] in modo che CD [$= p^2$] stia a CE [$= m$] come il quadrato di AB sta al quadrato

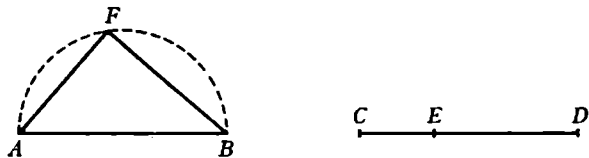
a. Heiberg dice di non saper decidere se giustamente siano stati affacciati dubbi riguardo ai due lemmi; ad ogni modo, sarebbero stati interpolati da un tempo assai antico.

b. Letteralmente: che la maggiore possa di più che la minore del quadrato di una retta commensurabile con sé (cioè con la maggiore stessa) in lunghezza.

c. Letteralmente: e risulti fatto in modo che, come DC sta a CE, così il quadrato di BA stia al quadrato di AF.

di AF (X, 6, coroll.), [ossia $p^2 : m = q(AB) : q(AF)$,] e si tracci la congiungente FB.

Poiché il quadrato di AB sta a quello di AF come CD sta a CE, [ossia $q(AB) : q(AF) = p^2 : m$,] il quadrato di AB ha con quello di AF il rapporto che il numero p^2 ha col numero m; quindi il quadrato di AB è commensurabile col quadrato di AF (X, 6). Ma il quadrato di AB è razionale (X, def. IV), per cui anche quello di AF è razionale (id.), e pure AF è retta razionale. E poiché p^2 non ha con m il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato (X, 28, lemma I), neppure il quadrato di AB ha con quello di AF il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato. Perciò AB è incommensurabile in lunghezza con AF (X, 9); quindi AB, AF sono rette razionali commensurabili solo in potenza. E poiché $p^2 : m = q(AB) : q(AF)$, si ha, *convertendo*, che $p^2 : (p^2 - m) = q(AB) : [q(AB) - q(AF)]$ (V, 19, coroll.), ossia: $p^2 : r^2 = q(AB) : q(FB)$ (cfr. III, 31; I, 47). Ma $CD = p^2$ ha con $ED = r^2$ il rapporto che un numero quadrato p^2 ha con altro numero quadrato r^2, per cui anche il quadrato di AB ha con quello di FB il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato; perciò AB è commensurabile in lunghezza con FB (X, 9). Ma il quadrato di AB è uguale alla somma dei quadrati di AF, FB (III, 31; I, 47); il quadrato di AB supera quindi quello di AF del quadrato della retta FB commensurabile [in lunghezza] con AB.

Dunque, sono state trovate le rette razionali AB, AF commensurabili soltanto in potenza, tali che il quadrato della maggiore AB supera quello della minore AF del quadrato della retta FB commensurabile in lunghezza con AB. – C.D.D.

APPLICA: I, 47; III, 31; X, 6, 6 coroll., 9, 19 coroll.

È APPLICATA IN: X, 31, 32.

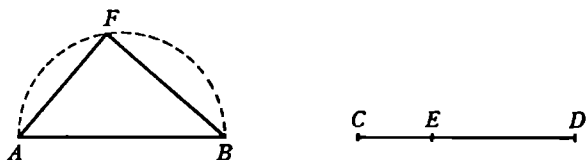
PROPOSIZIONE 30.

Trovare due rette razionali commensurabili soltanto in potenza, tali che il quadrato della maggiore superi quello della minore del quadrato di una retta incommensurabile in lunghezza con la maggiore.

Si assumano come dati la retta razionale AB ed i due numeri quadrati CE, ED [$CE = r^2$, $ED = s^2$], tali che la loro somma CD [$= m$] non sia un quadrato (X, 28, lemma II), si descriva su AB il semicerchio AFB, si determini AF in modo che $CD = m$ stia a $CE = r^2$ come il quadrato di AB sta al quadrato di AF – [cioè in modo che sia: $m : r^2 = q(AB) : q(AF)$] (X, 6, coroll.), e si tracci la congiungente FB.

Con procedimento simile a quello della proposizione precedente [a], potremo dimostrare che AB, AF sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza. E poiché $m : r^2 = q(AB) : q(AF)$, si ha, *convertendo* (V, 19, coroll.), che $m : (m - r^2) = q(AB) : [q(AB) - q(AF)]$, ossia che $m : s^2 = q(AB) : q(FB)$ (III, 31; I, 47). Ma m non ha con s^2 il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato; neppure il quadrato di AB ha perciò con quello di FB il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato, per cui AB è incommensurabile in lunghezza con FB (X, 9). Ora, il quadrato di AB supera quello di AF del quadrato di FB, che è incommensurabile [in lunghezza] con AB (III, 31; I, 47).

Dunque, AB, AF sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza, ed il quadrato di AB supera quello di AF del quadrato di FB incommensurabile in lunghezza con AB. – C.D.D.

a. Letteralmente: Similmente allora dimostreremo a quanto prima di questo (cioè, a quanto fatto prima).

APPLICA: I, 47; III, 31; V, 19 coroll.; X, 6 coroll., 9.

È APPLICATA IN: X, 31, 33.

PROPOSIZIONE 31.

Trovare due rette mediali commensurabili soltanto in potenza, che comprendano un'area razionale e sian tali che il quadrato della maggiore superi quello della minore del quadrato di una retta commensurabile in lunghezza con la maggiore.

Si assumano come date le due rette razionali A, B commensurabili soltanto in potenza, tali che il quadrato di A, che è la maggiore, superi quello della minore B del quadrato di una retta commensurabile in lunghezza con A (X, 29). E si determini una retta C tale che il suo quadrato[a] sia uguale al rettangolo di A, B (II, 14). Ma il rettangolo di A, B è un'area mediale (X, 21), per cui anche il quadrato di C è area mediale, e pure la retta C è retta mediale (id.). Ora, si determini la retta D in modo che il rettangolo di C, D sia uguale al quadrato di B (VI, 11, e 17), ma il quadrato di B è razionale, per cui è razionale anche il rettangolo di C, D. E poiché A sta a B come il rettangolo di A, B sta al quadrato di B [$A : B = r(A, B) : q(B)$] (X, 21, lemma), ma $q(C) = r(A, B)$ [per costruzione], mentre $q(B) = r(C, D)$ [pure per costruzione], si ha che $A : B = q(C) : r(C, D)$. Ma $q(C) : r(C, D) = C : D$ (X, 21, lemma); quindi anche, $A : B = C : D$. Ma A è commensurabile con B soltanto in potenza; quindi anche C è commensurabile con D soltanto in potenza (X, 11). Ma C è una mediale, per cui pure D è una mediale (X, 23). E poiché A sta a B come C sta a D, ma il quadrato di A supera quello di B del qua-

a. Letteralmente: ed il quadrato della (retta) C sia uguale.

drato di una retta commensurabile con A, anche il quadrato di C supera quello di D del quadrato di una retta commensurabile con A (X, 14).

Dunque, sono state trovate le due rette mediali C, D commensurabili soltanto in potenza e comprendenti un'area razionale, tali che[a] il quadrato di C supera quello di D del quadrato di una retta commensurabile in lunghezza con C.

Similmente si potrà dimostrare che il quadrato di C supera inoltre quello di D del quadrato di una retta incommensurabile [in lunghezza] con C, qualora il quadrato di A superi quello di B del quadrato di una retta incommensurabile in lunghezza con A (X, 30).

APPLICA: VI, 12, 13, 17; X, 11, 14, 23, 29, 30.

È APPLICATA IN: X, 34.

PROPOSIZIONE 32.

Trovare due rette mediali commensurabili soltanto in potenza, che comprendano un'area mediale e sian tali che il quadrato della maggiore superi quello della minore del quadrato di una retta commensurabile [*in lunghezza*] *con la maggiore.*

Si assumano come date le tre rette razionali A, B, C commensurabili [a due a due] soltanto in potenza, tali che il quadrato di A superi quello di C del quadrato di una retta commensurabile [in lunghezza] con A (X, 29), e si determini una retta D tale che il suo quadrato sia uguale al rettangolo di A, B (II, 14). Il quadrato di D è perciò area mediale, per cui anche D è una retta mediale (X, 21). Ora, [si determini E in modo che] il rettangolo di D, E sia uguale al rettangolo di B, C (VI, 12 e 16). E poiché $r(A, B) : r(B, C) = A : C$ (X, 21, lemma), ma $q(D) = r(A, B)$, mentre $r(D, E) = r(B, C)$, si ha che $A : C = q(D) : r(D, E)$.

a. Letteralmente: ed il quadrato di C.

Ma $q(D) : r(D, E) = D : E$ (X, 21, lemma); quindi anche, $A : C = D : E$. Ma A è commensurabile con C soltanto in potenza. Perciò pure D è commensurabile con E soltanto in potenza (X, 11). Ma D è una retta mediale; quindi anche E è una retta mediale (X, 23). E poiché $A : C = D : E$, ma il quadrato di A supera quello di C del quadrato di una retta commensurabile con A, pure il quadrato di D supererà quello di E del quadrato di una retta commensurabile con D (X, 14). Dico ora che il rettangolo di D, E, è inoltre area mediale. Infatti, poiché il rettangolo di B, C è uguale al rettangolo di D, E, ma il rettangolo di B, C è area mediale (X, 21), anche il rettangolo di D, E è area mediale.

Dunque, sono state trovate le due rette mediali D, E commensurabili soltanto in potenza e comprendenti un'area mediale, tali che il quadrato della maggiore supera quello della minore del quadrato di una retta commensurabile [in lunghezza] con la maggiore.

Similmente si potrà ancora dimostrare che il quadrato di D supera quello di E del quadrato di una retta incommensurabile [in lunghezza] con D, qualora il quadrato di A superi quello di C del quadrato di una retta incommensurabile [in lunghezza] con A (X, 30).

APPLICA: V, 11; VI, 12, 13, 16, 17; X, 11, 14, 21, 23, 29.

È APPLICATA IN: X, 35.

LEMMA.

Sia ABC un triangolo rettangolo che abbia retto l'angolo [in] A, e si conduca la perpendicolare AD; dico che il rettangolo di BC, BD, è uguale al quadrato di BA, che il rettangolo di BC, DC è uguale al quadrato di CA, che il rettangolo di BD, DC è uguale al quadrato di AD, ed infine che il rettangolo di BC, AD è uguale al rettangolo di BA, AC.

Dico in primo luogo che il rettangolo di BC, BD è uguale al quadrato di BA.

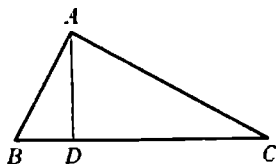
Infatti, poiché in un triangolo rettangolo si è condotta la perpendicolare AD dal vertice dell'angolo retto sulla base, i triangoli ABD, ADC sono simili a tutto quanto il triangolo ABC e simili fra loro (VI, 8). E poiché il triangolo ABC è simile al triangolo ABD, si ha che $BC : BA = BA : BD$ (VI, 4); dunque il rettangolo di BC, BD è uguale al quadrato di BA (VI, 17).

Per la stessa ragione, pure il rettangolo di BC, DC è uguale al quadrato di AC.

E poiché, se in un triangolo rettangolo si conduce una perpendicolare dal vertice dell'angolo retto sulla base, la retta così condotta è media proporzionale fra le parti della base (VI, 8, coroll.), si ha che $BD : AD = AD : DC$; dunque il rettangolo di BD, DC è uguale al quadrato di AD (VI, 17).

Dico inoltre che il rettangolo di BC, AD è uguale al rettangolo di BA, AC. Infatti, poiché – come si disse – il triangolo ABC è simile al triangolo ABD, si ha che BC : : $AC = BA : AD$ (VI, 4). Dunque il rettangolo di BC, AD è uguale al rettangolo di BA, AC (VI, 16) [a]. – C.D.D.

APPLICA: VI, 4, 8, 8 coroll., 16, 17.

È APPLICATO IN: X, 33, 34, 35.

PROPOSIZIONE 33.

Trovare due rette incommensurabili in potenza, tali che la somma dei loro quadrati sia un'area razionale e sia invece un'area mediale il rettangolo da esse compreso [b].

a. Heiberg elimina delle parole precedenti al *Dunque*, e cioè: « Ma se quattro rette sono proporzionali fra loro, il prodotto delle estreme è uguale al prodotto delle medie », in quanto ritiene non esservi maggior ragione perché sia citata per esteso la proposizione VI, 16, quando si fa uso in questo lemma due volte di VI, 17, e tacitamente.

b. Letteralmente: che producano, formino il messo insieme, il composto (τὸ συγκείμενον) dei loro quadrati razionale, e mediale il rettangolo (compreso) da esse. È, come si vede, il ter-

Si assumano come date le due rette razionali AB, BC commensurabili soltanto in potenza, tali che il quadrato della maggiore AB superi quello della minore BC del quadrato di una retta incommensurabile [in lunghezza] con AB (X, 30), si divida BC per metà in D, si applichi ad AB un parallelogrammo, uguale al quadrato di una od altra indifferentemente delle due rette BD, DC e mancante di un quadrato (VI, 28), e sia esso il rettangolo di AE, EB, si descriva su AB il semicerchio AFB, si innalzi la perpendicolare EF ad AB, e si traccino le congiungenti AF, FB.

E poiché AB, BC sono rette disuguali, ed inoltre il quadrato di AB supera quello di BC del quadrato di una retta incommensurabile [in lunghezza] con AB, poiché ad AB si è applicato un parallelogrammo uguale alla quarta parte del quadrato di BC, vale a dire al quadrato della metà di BC, e mancante di un quadrato, ed esso forma il rettangolo di AE, EB, si ha che AE è incommensurabile con EB (X, 18). Ora, $AE : EB = r(AB, AE) : r(AB, EB)$, ma $r(AB, AE) = q(AF)$, mentre $r(AB, EB) = q(FB)$ (X, 32, lemma); si ha quindi che [$AE : EB = q(AF) : q(FB)$ e che] il quadrato di AF è incommensurabile con quello di FB (X, 11), per cui AF, FB sono rette incommensurabili in potenza. E poiché AB è razionale, pure il quadrato di AB è razionale; cosicché anche la somma dei quadrati di AF, FB è razionale (I, 47). E poiché, di nuovo, $r(AE, EB) = q(EF)$ (v. lemma X, 32), ma per la costruzione eseguita[a] $r(AE, EB) = q(BD)$, si ha che EF è uguale a BD; quindi BC è doppia di EF, cosicché

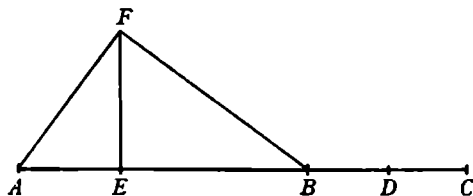
mine tecnico in Euclide più vicino a quello di *somma*, anche se non vi corrisponda del tutto: difatti nell'idea di somma, pure in latino, è inclusa quella del totale che fornisce appunto la stessa operazione di somma, mentre nel τὸ συγκείμενον, parola composta, si dà piuttosto l'idea di una certa composizione eseguita, del messo insieme, senza vi sia inclusa direttamente l'idea di totale quale risultato di operazione, poiché composizione non è precisamente operazione, nel qual caso l'idea di totale vi sarebbe; d'altro canto ci sembra giusto riconoscere che il termine d'Euclide a quello di somma si avvicina assai.

a. Letteralmente: per ipotesi.

il rettangolo di *AB*, *BC* è pure commensurabile col rettangolo di *AB*, *EF* (X, 6). Ma il rettangolo di *AB*, *BC* è area mediale (X, 21); è perciò area mediale anche il rettangolo di *AB*, *EF* (X, 23, coroll.). Ma il rettangolo di *AB*, *EF* è uguale al rettangolo di *AF*, *FB* (v. lemma X, 32); pure il rettangolo di *AF*, *FB* è quindi area mediale. E si è inoltre dimostrato che la somma dei quadrati di *AF*, *FB* è area razionale.

Dunque, sono state trovate le due rette *AF*, *FB* incommensurabili in potenza, tali che la somma dei loro quadrati sia un'area razionale e sia invece un'area mediale il rettangolo da esse compreso. – C.D.D.

APPLICA: I, 10, 47; III, 31; VI, 1, 28; X, 11, 18, 21, 23 coroll., 30.

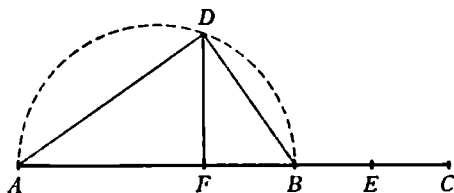
È APPLICATA IN: X, 39, 76.

PROPOSIZIONE 34.

Trovare due rette incommensurabili in potenza, tali che la somma dei loro quadrati sia un'area mediale e sia invece un'area razionale il rettangolo da esse compreso.

Si assumano come date le due rette mediali *AB*, *BC* commensurabili soltanto in potenza, tali che il rettangolo da esse compreso sia razionale e che il quadrato di *AB* superi quello di *BC* del quadrato di una retta incommensurabile [in lunghezza] con *AB* (X, 31, fine), si descriva su *AB* il semicerchio *ADB*, si divida *BC* per metà in *E*, e si applichi ad *AB* un parallelogrammo, cioè il rettangolo avente per dimensioni *AF*, *FB*, uguale al quadrato di *BE* e mancante di un quadrato (VI, 28), per cui *AF* è incommensurabile in lunghezza con *FB* (X, 18). Da *F* si conduca la perpendicolare *FD* ad *AB*, e si traccino le congiungenti *AD*, *DB*.

Poiché *AF* è incommensurabile con *FB*, pure il rettangolo di *AB*, *AF* è incommensurabile col rettangolo di *AB*,

FB[: infatti $AF : FB = r(AB, AF) : r(AB, FB)$] (X, 11). Ma il rettangolo di *AB*, *AF* è uguale al quadrato di *AD*, mentre il rettangolo di *AB*, *FB* è uguale al quadrato di *DB* (X, 23, lemma); anche il quadrato di *AD* è quindi incommensurabile con quello di *DB*. Ora, poiché il quadrato di *AB* è area mediale [dato che la retta *AB* è stata scelta mediale], è area mediale pure la somma dei quadrati di *AD*, *DB* (III, 31; I, 47). E poiché *BC* è doppia di *DF*, [come si è mostrato nella X, 33,] pure il rettangolo di *AB*, *BC* è il doppio del rettangolo di *AB*, *FD*. Ma il rettangolo di *AB*, *BC* è razionale; quindi anche il rettangolo di *AB*, *FD* è razionale (X, 6; def. IV). Ma il rettangolo di *AB*, *FD* è uguale al rettangolo di *AD*, *DB* (X, 32, lemma), cosicché pure il rettangolo di *AD*, *DB* è razionale.

Dunque, sono state trovate le due rette *AD*, *DB* incommensurabili in potenza, tali che la somma dei loro quadrati sia un'area mediale e sia invece un'area razionale il rettangolo da esse compreso. – C.D.D.

APPLICA: I, 10, 47; III, 31; VI, 28; X, 6, 11, 18, 31.

È APPLICATA IN: X, 40, 77.

PROPOSIZIONE 35.

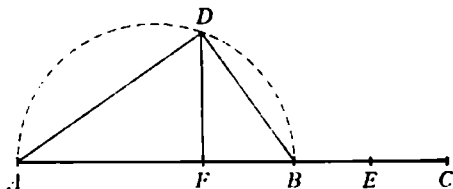
Trovare due rette incommensurabili in potenza, tali che la somma dei loro quadrati sia un'area mediale, ed il rettangolo da esse compreso sia pure un'area mediale incommensurabile con la somma dei quadrati delle due rette.

Si assumano come date le due rette mediali *AB*, *BC* commensurabili soltanto in potenza, comprendenti un'area mediale e tali che il quadrato di *AB* superi quello di *BC* del quadrato di una retta incommensurabile [in lunghezza] con *AB* (X, 32), si descriva su *AB* il semicerchio *ADB*, e si proceda successivamente come si è fatto sopra.

Ora, poiché AF è incommensurabile in lunghezza con FB (X, 18), pure AD è incommensurabile in potenza con DB (X, 11)[, come è stato mostrato nella X, 34]. E poiché il quadrato di AB è un'area mediale, anche la somma dei quadrati di AD, DB è un'area mediale (I, 47; X, 23, coroll.). E poiché il rettangolo di AF, FB è uguale sia al quadrato di BE sia al quadrato di DF [a], si ha che BE è uguale a DF; quindi BC è doppia di DF, cosicché anche il rettangolo di AB, BC è il doppio del rettangolo di AB, DF. Ma il rettangolo di AB, BC è area mediale, per cui è area mediale pure il rettangolo di AB, DF (X, 32, lemma). Ed esso è uguale al rettangolo di AD, DB (X, 32, lemma); perciò anche il rettangolo di AD, DB è area mediale. E poiché AB è incommensurabile in lunghezza con BC, ma BC è commensurabile con BE, pure AB è incommensurabile in lunghezza con BE (X, 13); cosicché anche il quadrato di AB è incommensurabile col rettangolo di AB, BE [- è difatti: $AB : BE = q(AB) : r(AB, BE)$] (X, 21, lemma; X, 11). Ma la somma dei quadrati di AD, DB è uguale al quadrato di AB (I, 47), mentre al rettangolo di AB, BE è uguale il rettangolo di AB, DF, vale a dire il rettangolo di AD, DB; perciò la somma dei quadrati di AD, DB è incommensurabile col rettangolo di AD, DB.

Dunque, sono state trovate le due rette AD, DB incommensurabili in potenza, tali che la somma dei loro quadrati sia un'area mediale e sia pure un'area mediale il rettangolo da esse compreso, incommensurabile con la somma dei quadrati delle due rette. – C.D.D.

APPLICA: I, 10, 47; III, 31; VI, 1, 28; X, 11, 13, 32.

È APPLICATA IN: X, 41, 78.

a. Letteralmente: il (rettangolo compreso) da AF, FB è uguale al quadrato di ciascuna delle due rette BE, DF.

PROPOSIZIONE 36.

Se si sommano due rette razionali commensurabili soltanto in potenza, la retta che risulta dalla somma[a] *è una retta irrazionale: sia chiamata* binomiale[b] [26].

Infatti, si sommino le due rette razionali AB, BC commensurabili soltanto in potenza; dico che l'intiera retta AC è irrazionale.

Poiché difatti AB è incommensurabile in lunghezza con BC – sono commensurabili infatti soltanto in potenza –, e poiché AB sta a BC come il rettangolo di AB, BC sta al quadrato di BC [$AB : BC = r(AB, BC) : q(BC)$] (X, 21, lemma), il rettangolo $r(AB, BC)$ è incommensurabile col quadrato $q(BC)$ (X, 11).

Ma il doppio del rettangolo di AB, BC[, ossia $2r(AB, BC)$,] è commensurabile col rettangolo $r(AB, BC)$ (X, 6), mentre col quadrato $q(BC)$ è commensurabile la somma dei quadrati $q(AB) + q(BC)$ – difatti AB, BC sono razionali commensurabili soltanto in potenza (X, 15) –; perciò $2r(AB, BC)$ è incommensurabile con $q(AB) + q(BC)$ (X, 13). E la somma $q(AB) + q(BC) + 2r(AB, BC)$, vale a dire il qua-

a. Letteralmente: « la tutta quanta », quella appunto che ne risulta, ossia l'intiera, come preferiamo dir dopo per la retta AC.
b. In greco: *di due nomi*, ἐκ δύο ὀνομάτων, *risultante da due nomi*.

[26] In questa X, 36 viene introdotta la retta irrazionale detta *binomiale* come somma di due rette razionali commensurabili solo in potenza.

La lunghezza della binomiale si esprime in simboli aritmetici come la somma $a + \sqrt{b}$ (dove b non è quadrato perfetto), ma può anche essere espressa mediante: $\sqrt{a} + \sqrt{b}$. Più tardi si vedrà come nelle proposizioni X, 48-53 vengano distinte rette binomiali aventi differenti particolarità, e precisamente sei rette, che prendono rispettivamente il nome di binomiale prima, seconda, terza, quarta, quinta, sesta.

Ciò in perfetta simmetria con quanto si attua nella seconda metà del libro X per la sottrazione anziché per l'addizione: così l'apotome (X, 73) è la retta rappresentata dall'espressione $a - \sqrt{b}$ (o: $\sqrt{a} - \sqrt{b}$) e si distinguono sei apotomi speciali, contrassegnate ciascuna con un numero ordinale (X, 85-90).

drato di AC (II, 4), è [pertanto] incommensurabile con la somma $q(AB) + q(BC)$ (X, 16). Ma la somma $q(AB) + q(BC)$ è razionale; il quadrato di AC è quindi irrazionale (X, def. IV), cosicché pure AC è una retta irrazionale (X, def. IV): sia chiamata *binomiale*. – C.D.D.

APPLICA: II, 4; X, 6, 11, 13, 15, 16, 21 (lemma).

A B C

È APPLICATA IN: X, 38, 41, 42, 44, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 60, 61, 64, 66, 71, 72, 112, 113.

PROPOSIZIONE 37.

Se si sommano due mediali commensurabili soltanto in potenza e comprendenti un'area razionale, la somma è una retta irrazionale: si chiami prima bimediale[27].

Infatti, si sommino le due rette mediali AB, BC commensurabili soltanto in potenza e comprendenti un'area

[27] Nella X, 37 e nella X, 38 non sono più rette razionali a generare, per addizione o per sottrazione, rette irrazionali. Si parte invece da due rette mediali commensurabili solo in potenza, le quali, inoltre, possono comprendere o area razionale (nella X, 37) o area mediale (nella X, 38).

In ambedue i casi la somma delle due rette mediali è una retta irrazionale, che si chiama *bimediale* (= binomiale di mediali). Nel caso della X, 37 (rettangolo ad area razionale) si ha la *prima bimediale*, mentre nel caso della X, 38 (rettangolo ad area mediale) si ha la *seconda bimediale*.

Similmente, nella seconda parte del libro X, si ha per sottrazione la *prima apotome di mediale* (X, 74) e la *seconda apotome di mediale* (X, 75).

Tornando alle bimediali, osserviamo che le due rette mediali da sommare possono essere rappresentate simbolicamente così:

$$\sqrt{a\sqrt{b}} \quad ; \quad \sqrt{c\sqrt{b}}$$

Si tratta, infatti di rette mediali (X, 21) e di più si vede che esse, incommensurabili in lunghezza, sono però commensurabili in potenza.

Infatti i due loro quadrati hanno le aree: $a\sqrt{b}$; $c\sqrt{b}$ e sono quindi comm.li tra loro (stanno tra loro come il numero a sta al numero c).

Nel caso della prima bimediale, il rettangolo deve essere razionale: basta perciò che il prodotto abc sia un quadrato (di numero intero, o razionale).

Infatti l'area del rettangolo è:

$$\sqrt{a\sqrt{b}} \cdot \sqrt{c\sqrt{b}} = \sqrt{abc}$$

razionale (X, 27); dico che la somma AC è una retta irrazionale.

Poiché difatti AB è incommensurabile in lunghezza con BC, anche la somma dei quadrati di AB, BC[, ossia $q(AB) + q(BC)$,] è incommensurabile col doppio del rettangolo di AB, BC[, ossia con $2r(AB, BC)$, come si è mostrato nella X, 36]; inoltre la somma $q(AB) + q(BC) + 2r(AB, BC)$, che è il quadrato di AC (II, 4), dà una somma incommensurabile col rettangolo $r(AB, BC)$ (X, 16). Ma il rettangolo $r(AB, BC)$ è razionale – AB, BC comprendono difatti, per ipotesi, un'area razionale –, quindi il quadrato di AC è irrazionale; dunque AC è una retta irrazionale (X, def. IV), e sia chiamata *prima bimediale*. – C.D.D.

A B C

APPLICA: II, 4; X, 16, 27.

È APPLICATA IN: X, 43, 55, 61, 67.

PROPOSIZIONE 38.

Se si sommano due rette mediali commensurabili soltanto in potenza e comprendenti un'area mediale, la somma è una retta irrazionale: si chiami seconda bimediale [a].

Infatti, si sommino le due rette mediali AB, BC commensurabili soltanto in potenza e comprendenti un'area

a. Letteralmente, *seconda di due mediali* (ἐκ δύο μέσων).

Nel caso della seconda bimediale, invece, il prodotto abc non deve essere un quadrato.

Un esempio di prima bimediale si ha ponendo $c = ab$ (cioè: $abc = c^2$). Infatti in tal caso il rettangolo è espresso da:

$$\sqrt{a\sqrt{b}} \cdot \sqrt{ab\sqrt{b}} = \sqrt{a^2b^2} = ab$$

Un esempio di seconda bimediale si ha invece ponendo $abc = 2$ sicché:

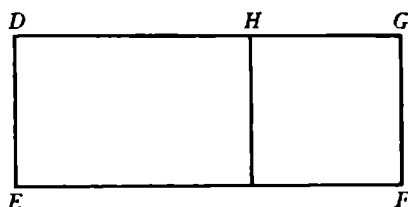
$$c = \frac{2}{ab}$$

In tal caso il rettangolo è espresso da:

$$\sqrt{a\sqrt{b}} \cdot \sqrt{\frac{2}{ab}\sqrt{b}} = \sqrt{2}$$

mediale (X, 28); dico che [la loro somma] AC è una retta irrazionale.

Si assuma difatti come data la retta razionale DE, e si applichi [parabolicamente] a DE il rettangolo DF, uguale al quadrato di AC e che formi DG quale altezza (I, 44). E poiché il quadrato di AC è uguale alla somma dei quadrati di AB, BC e del doppio del rettangolo di AB, BC [$q(AC) = q(AB) + q(BC) + 2r(AB, BC)$] (II, 4), si applichi allora [parabolicamente] a DE il rettangolo EH uguale alla somma $q(AB) + q(BC)$; il rettangolo HF che rimane è perciò uguale a $2r(AB, BC)$. E poiché ciascuna delle due rette [commensurabili in potenza] AB, BC è mediale, è area mediale anche la somma [dei due quadrati tra loro commensurabili] $q(AB) + q(BC)$. Ma pure il rettangolo $r(AB, BC)$ è mediale per ipotesi, per cui è mediale anche $2r(AB, BC)$ (X, 23). Ora, [come si è detto,] il rettangolo EH è uguale alla somma $q(AB) + q(BC)$, mentre il rettangolo HF è uguale a $2r(AB, BC)$; quindi ciascuno dei due rettangoli EH, HF è area mediale. Ed ambedue sono applicati alla retta razionale DE [come base]; ciascuna delle due rette[, cioè altezze,] DH, HG è perciò razionale ed incommensurabile in lunghezza con DE (X, 22). Poiché dunque[, per ipotesi,] AB è incommensurabile [inoltre] in lunghezza con BC, ma AB sta a BC come il quadrato di AB sta al rettangolo di AB, BC [$AB : BC = q(AB) : r(AB, BC)$] (X, 21, lemma), si ha che il quadrato $q(AB)$ è incommensurabile col rettangolo $r(AB, BC)$ (X, 11). Ma la somma $q(AB) + q(BC)$ è commensurabile col quadrato $q(AB)$ (X, 15), ed il doppio rettangolo $2r(AB, BC)$ è commensurabile col rettangolo $r(AB, BC)$ (X, 6). La somma $q(AB) + q(BC)$ è perciò incommensurabile con $2r(AB, BC)$ (X, 13). Ma il rettangolo EH è uguale alla somma $q(AB) + q(BC)$, mentre al doppio rettangolo $2r(AB, BC)$ è uguale il rettangolo HF. Quindi il rettangolo EH è incommensurabile col rettangolo HF, cosicché pure DH è incommensurabile in lunghezza con HG (X, 11)[, dato che i due rettangoli stanno fra loro come le basi DH, HG (VI, 1)]. Perciò DH, HG – che sono rette razionali – sono commensurabili soltanto in potenza. Cosicché [la loro somma] DG

è irrazionale [ed è retta binomiale] (X, 36). Ma la retta *DE* è razionale; ed il rettangolo compreso da una retta irrazionale e da una razionale è irrazionale (X, 20), quindi l'area *DF* è irrazionale, ed una retta, il cui quadrato sia ad essa uguale, è irrazionale (X, def. IV). Ma il quadrato di *AC* è [uguale al rettangolo] *DF*; dunque *AC* è una retta irrazionale, e sia chiamata *seconda bimediale*. – C.D.D.

APPLICA: I, 44-45; II, 4; VI, 1; X, 6, 11, 13, 15, 20, 22, 36.

È APPLICATA IN: X, 44, 67.

PROPOSIZIONE 39.

Se si sommano due rette incommensurabili in potenza, tali che[a] *la somma dei loro quadrati sia un'area razionale e sia invece area mediale il rettangolo da esse compreso, la somma è una retta irrazionale: si chiami* « maggiore »[28].

Infatti, si sommino le due rette *AB*, *BC* incommensurabili in potenza e che soddisfino a quanto[b] proposto (X, 33); dico che [la loro somma] *AC* è una retta irrazionale.

Poiché il rettangolo di *AB*, *BC* [*r*(*AB*, *BC*)] è difatti area mediale, è area mediale anche il doppio rettangolo

a. Letteralmente: tali da produrre razionale la messa insieme dei loro quadrati, ed il (rettangolo compreso) da esse mediale, la retta tutta quanta è irrazionale, e si chiami maggiore.

b. Letteralmente: e che diano, producano, le cose proposte.

[28] Nella X, 39 si introduce la retta irrazionale *maggiore* come somma di due rette incomm.li in potenza, formanti area mediale e sommabili pitagoricamente. Della generazione della retta *maggiore* si è già trattato nella *Nota alle nove costruzioni di coppie di rette*, che si trova subito dopo la prop. X, 26. Rimandiamo a detta nota anche per le relative espressioni aritmetiche.

$2r(AB, BC)$ (X, 6; X, 23, coroll.). Ma la somma dei quadrati di AB, BC [$q(AB) + q(BC)$] è [per ipotesi] razionale; quindi il doppio rettangolo $2r(AB, BC)$ è incommensurabile con la somma dei quadrati $q(AB) + q(BC)$ (X, def. IV), cosicché pure la somma $q(AB) + q(BC) + 2r(AB, BC)$, la quale somma[a] è [uguale a] $q(AC)$ (II, 4), è incommensurabile con la somma $q(AB) + q(BC)$ (X, 16); il quadrato di AC è perciò area irrazionale (X, def. IV). Cosicché anche AC è una retta irrazionale (id.), e sia chiamata «*maggiore*». – C.D.D.

APPLICA: II, 4; X, 6, 16, 23 coroll., 33.

È APPLICATA IN: X, 45, 57, 63, 68.

A B C

PROPOSIZIONE 40.

Se si sommano due rette incommensurabili in potenza, tali che la somma dei loro quadrati sia un'area mediale e sia invece un'area razionale il rettangolo da esse compreso, la somma è una retta irrazionale: si chiami «retta potenziante un'area razionale più un'area mediale»[b] [29].

Infatti, si sommino le due rette AB, BC incommensurabili in potenza e che soddisfino a quanto proposto (X, 34); dico che [la loro somma] AC è una retta irrazionale.

a. Letteralmente: il che.

b. Letteralmente: e la si chiami retta che può (cioè «che ha potenza di..., che potenzia») un'area razionale ed un'area mediale.

[29] La retta irrazionale introdotta nella X, 40 non differisce essenzialmente dalla retta *maggiore*. Essa viene generata come somma di due rette incomm.li in potenza, formanti area razionale e non sommabili pitagoricamente. Per trovarne l'espressione aritmetica, risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{q} \\ xy = \frac{1}{2} m \end{cases}$$

Ricaviamo:

$$\begin{cases} (x + y)^2 = \sqrt{q} + m \\ (x - y)^2 = \sqrt{q} - m \end{cases}$$

Poiché la somma dei quadrati di AB, BC [$q(AB) + q(BC)$] è difatti un'area mediale, ed è invece un'area razionale il doppio del rettangolo di AB, BC [$2r(AB, BC)$], la somma $q(AB) + q(BC)$ è incommensurabile col doppio rettangolo $2r(AB, BC)$, cosicché anche [la somma $q(AB) + q(BC) + 2r(AB, BC)$, ossia] il quadrato di AC [$q(AC)$] è incommensurabile con $2r(AB, BC)$ (X, 16). Ma il doppio rettangolo $2r(AB, BC)$ è[, per ipotesi,] un'area razionale; quindi $q(AC)$ è un'area irrazionale. Dunque AC è una retta irrazionale (X, def. IV), [il cui quadrato $q(AC)$ è uguale alla somma di un'area razionale $2r(AB, BC)$ e di un'area mediale $q(AB) + q(BC)$], e sia chiamata «*retta potenziante un'area razionale più un'area mediale*». – C.D.D.

A

B

C

APPLICA: X, 6, 16, 34.

È APPLICATA IN: X, 46, 64, 69.

PROPOSIZIONE 41.

Se si sommano due rette incommensurabili in potenza, tali che la somma dei loro quadrati sia un'area mediale ed il

da cui:

$$\begin{cases} x + y = \sqrt{\sqrt{q} + m} \\ x - y = \sqrt{\sqrt{q} - m} \end{cases}$$

Come si vede, le espressioni di queste rette irrazionali («*retta potenziante un'area razionale più un'area mediale*», X, 40, in relazione al segno *più*; oppure: «*retta potenziante la differenza tra un'area mediale e un'area razionale*», X, 77, in relazione al segno *meno*) non differiscono essenzialmente rispettivamente dalla retta *maggiore* (X, 39) e dalla retta *minore* (X, 76).

Le lunghe denominazioni di queste rette esprimono un immediato dato di fatto. Per esempio, per la somma, abbiamo:

$$(x + y)^2 = \sqrt{q} + m$$

ossia la retta è tale che il suo quadrato è uguale alla somma di un'area mediale ($\sqrt{q}$) e di un'area razionale (m).

Può anche dirsi che la retta in questione è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo, i cateti del quale siano rispettivamente una retta razionale e una retta mediale.

rettangolo da esse compreso sia pure un'area mediale, incommensurabile con la somma dei quadrati delle due rette, la somma è una retta irrazionale: si chiami « retta potenziante la somma di due aree mediali »[30].

Infatti, si sommino le due rette AB, BC incommensurabili in potenza e che soddisfino a quanto proposto (X, 35); dico che [la loro somma] AC è una retta irrazionale.

Si assuma come data la retta razionale DE, e si applichino [parabolicamente] a DE il rettangolo DF, uguale alla somma dei quadrati di AB, BC, ed il rettangolo GH, uguale al doppio del rettangolo di AB, BC; tutto quanto il rettangolo DH è perciò uguale [a $q(AB) + q(BC) + 2r(AB, BC)$, ossia] al quadrato di AC (II, 4). E poiché la somma dei quadrati di AB, BC è [per ipotesi] area mediale, ed è uguale al rettangolo DF, si ha che pure il rettangolo DF è area mediale. Ora, il rettangolo DF è applicato alla retta razionale DE; quindi [l'altezza] DG è una retta razionale ed incommensurabile in lunghezza con DE (X, 22). Per la stessa ragione, pure GK è una retta razionale ed incommensurabile in lunghezza con GF, vale a dire con DE. Ma poiché la somma dei quadrati $q(AB) + q(BC)$ è [per ipotesi] incommensurabile col doppio rettangolo $2r(AB, BC)$, si ha che [i due rettangoli] DF, GH sono incommensurabili; [ed essi hanno la

[30] Nel caso della prop. 41 si ha il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{q} \\ xy = \frac{1}{2}\sqrt{m} \end{cases}$$

da cui:

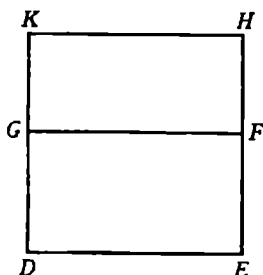
$$x + y = \sqrt{\sqrt{q} + \sqrt{m}}$$

$$x - y = \sqrt{\sqrt{q} - \sqrt{m}}$$

Ad esempio, per la somma $x + y$, la retta irrazionale così generata *potenzia* la somma di due aree mediali, cioè il suo quadrato è uguale alla somma di due aree mediali ($\sqrt{q}$ e $\sqrt{m}$):

$$(x + y)^2 = \sqrt{q} + \sqrt{m}$$

Si può anche presentare, questa linea irrazionale, come l'ipotenusa di un triangolo rettangolo, ambedue i cateti del quale siano rette mediali.

stessa base DE, per cui stanno fra loro come le altezze: $DF : GH = DG : GK$ (VI, 1);] cosicché pure [l'altezza] DG è incommensurabile con [l'altezza] GK (X, 11). Ma DG, GK[, come si è veduto,] sono rette razionali, per cui esse sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza; quindi [la loro somma] DK è una retta irrazionale, cioè quella detta binomiale (X, 36). Ma la retta DE è razionale; quindi il rettangolo DH è irrazionale, ed è irrazionale una retta il cui quadrato sia uguale ad esso (X, def. IV). Ma AC è la retta il cui quadrato è uguale al rettangolo DH; dunque AC è una retta irrazionale, [il cui quadrato $q(AC)$ è uguale alla somma di due aree mediali $q(AB) + q(BC)$ e $2r(AB, BC)$,] e sia chiamata «*retta potenziante la somma di due aree mediali*». – C.D.D.

APPLICA: I, 44-45; II, 4; VI, 1; X, 11, 35, 36.

È APPLICATA IN: X, 47, 59, 65, 70.

LEMMA.

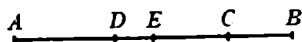
Che poi le menzionate rette irrazionali si dividano in un unico modo in quelle dalla cui somma risultano, e che sono tali da dare le figure proposte [a], potremo dimostrare appena premesso un piccolo lemma del genere seguente:

Si assuma come data la retta AB, si divida tutta quanta AB in parti disuguali in ognuno dei due punti C, D, e si supponga AC maggiore di DB; dico che la somma dei quadrati di AC, CB [$q(AC) + q(CB)$] è maggiore di quella dei quadrati di AD, DB [$q(AD) + q(DB)$].

a. In greco: ποιουσῶν τὰ προκείμενα εἴδη, come tradotto; ossia tali da soddisfare le condizioni richieste (v. anche HEATH, *op. cit.*, vol. III, p. 92).

Infatti, si divida AB per metà in E. Ora, poiché AC è maggiore di DB [$AC > DB$], si sottragga in comune DC dalle due parti; quindi AD che rimane dell'una è maggiore di CB che rimane dell'altra[, ottenendosi $AC - DC > DB - DC$, ossia: $AD > CB$]. Ma AE è uguale ad EB, per cui DE è minore di EC; i punti C, D non sono quindi a distanza uguale dal punto E di bisezione. E poiché la somma del rettangolo di AC, CB e del quadrato di EC è uguale al quadrato di EB [$r(AC, CB) + q(EC) = q(EB)$] (II, 5), ma pure la somma del rettangolo AD, DB e del quadrato di DE è tuttavia uguale al quadrato di EB [$r(AB, DB) + q(DE) = q(EB)$] (id.), ne segue $r(AC, CB) + q(EC) = r(AD, DB) + q(DE)$. Ma fra i termini delle somme [uguali, si ha] $q(DE) < q(EC)$[, dato che si è mostrato essere $DE < EC$], per cui anche il rettangolo $r(AC, CB)$, che rimane sottraendo, è minore del rettangolo $r(AD, DB)$ [$r(AC, CB) < r(AD, DB)$, perché possa valere l'uguaglianza]. Cosicché pure il doppio rettangolo $2r(AC, CB)$ è minore del doppio rettangolo $2r(AD, DB)$. Quindi anche, [essendo $q(AC) + q(CB) + 2r(AC, CB) = q(AD) + q(DB) + 2r(AD, DB)$, poiché ambedue le somme sono uguali a $q(AB)$, affinché valga l'uguaglianza si ha che] la somma dei quadrati di AC, CB, che pure rimane, è maggiore di quella dei quadrati di AD, DB [$q(AC) + q(CB) > q(AD) + q(DB)$]. - C.D.D.

APPLICA: II, 5.

A D E C B

È APPLICATO IN: X, 42, 43, 44, 45.

NOTA SULL'UNIVOCITÀ DELLA GENERAZIONE DELLE RETTE IRRAZIONALI

Le proposizioni X, 42-47 e 79-84 hanno tutte un carattere comune: esse dimostrano che le dodici rette irrazionali che si formano per addizione o per sottrazione partendo da coppie di rette razionali o mediali o incommensurabili tra loro in potenza e soddisfacenti a determinate condizioni, possono essere generate in un unico modo.

Per esempio, la X, 42 si riferisce ad una retta binomiale, la quale quindi, come è mostrato nella X, 36, viene generata come somma di due rette razionali, commensurabili tra loro soltanto in potenza. Per esempio, siano AC, CB due rette razionali comm.li solo in potenza; la somma AB è una binomiale.

Ebbene: la X, 42 dice che non è possibile trovare un punto D su AB, distinto da C, tale che le due rette AD, DB siano anch'esse rette razionali comm.li solo in potenza.

Ossia: una retta binomiale AB può essere generata univocamente, in un sol modo, come somma di due rette raz.li comm.li solo in potenza.

In modo del tutto simile gli altri teoremi citati mostrano la univocità della generazione delle altre linee irrazionali: così, per esempio, la X, 79 mostra che una apotome può pure essere generata in un unico modo come differenza di due rette razionali comm.li soltanto in potenza: cioè se si parte da un'apotome AB, è possibile in un unico modo aggiungere ad essa una retta BC razionale, comm.le solo in potenza con la somma AC. Non è possibile, cioè, sulla AC o sul suo prolungamento dalla parte di C trovare un punto D distinto da C, tale che la retta DB sia razionale e comm.le solo in potenza con la somma $AB + BD = AD$.

Nei nostri simboli, l'univocità della generazione di una binomiale o di un'apotome si esprime dicendo che se:

$$a \pm \sqrt{b} = c \pm \sqrt{d}$$

deve necessariamente essere:

$$a = c \ ; \ b = d.$$

Noi operiamo così:

$$a + \sqrt{b} = c + \sqrt{d}$$
$$a^2 + b + 2a\sqrt{b} = c^2 + d + 2c\sqrt{d}$$
$$a^2 + b = c^2 + d \ ; \ a^2b = c^2d$$

Quindi l'equazione di secondo grado

$$z^2 - (a^2 + b)\, z + a^2b = 0$$

ci dà come radici tanto a^2, b quando c^2, d: quindi ricaviamo:

$$a = c \ ; \ b = d.$$

Il procedimento equivale a stabilire che non possa aversi:

$$a - c = \sqrt{d} - \sqrt{b}$$

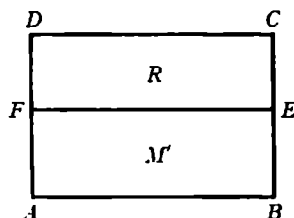
se non nel caso in cui ciascuno dei due membri si annulli: cioè equivale a stabilire che la differenza tra due radicali quadratici (irriducibili l'uno all'altro) non possa essere un numero razionale.

Ora questa stessa proprietà viene adoperata da Euclide direttamente o indirettamente per dimostrare le sue dodici proposizioni di univocità (X, 42-47, 79-84). Essa è contenuta nella X, 26, che ha un enunciato perfettamente corrispondente a quello aritmetico dato sopra: « *La differenza tra due aree mediali non può essere un'area razionale* ».

Vediamo quindi anzitutto qual è il procedimento dimostrativo della X, 26: mostreremo poi, come nel caso della X, 46 (binomiale), la X, 26 venga applicata.

La dimostrazione della X, 26 procede per assurdo.

Se possibile, sia M un'area mediale, e tale sia anche M'. E la differenza $M - M'$ sia, se possibile, un'area razionale R. Si prenda ora una qualunque retta razionale AB, e ad essa si applichi parabolicamente (I, 44-45) un rettangolo $ABCD = M = M' + R$.

Si applichi pure, sulla stessa retta AB, il rettangolo $ABEF$ uguale a M'.

Sicché il rettangolo-differenza $DCEF$ risulta uguale all'area (supposta razionale) R.

I due rettangoli $ABCD$, $ABEF$ sono aree mediali, così come quelle M, M' ad essi uguali. Ma i due rettangoli sono applicati (parabolicamente) alla retta razionale AB, quindi le altezze BC, BE sono rette razionali incommensurabili in lunghezza con AB (X, 22).

E poiché il rettangolo $DCEF = R$ è un'area razionale ed è applicato alla retta AB, l'altezza EC è una retta razionale commensurabile in lunghezza con AB (X, 20). Abbiamo dunque che EC, AB sono commensurabili in lunghezza, ma che AB è incommensurabile in lunghezza con BE: segue che anche EC è incommensurabile in lunghezza con BE (X, 13).

Ma $BE : EC = q\,(BE) : r\,(BE, EC)$ (VI, 1) quindi: $q\,(BE)$ è incommensurabile con $r\,(BE, EC)$ (X, 11).

Ciò val quanto dire che la somma $q\,(BE) + q\,(EC)$ è incommensurabile con $2r\,(BE, EC)$ (infatti il quadrato di EC è commensurabile col quadrato di BE). Perciò anche la somma:

$$q\,(BE) + q\,(EC) + 2r\,(BE, EC) = q\,(BC)$$

è incommensurabile con $q\,(BE) + q\,(EC)$.

Ma detta somma $q\,(BE) + q\,(EC)$ è razionale, quindi $q\,(BC)$ è irrazionale, e pertanto BC è una retta irrazionale. Ma si era invece veduto che BC è razionale: ci si trova dunque di fronte all'assurdo. È dunque impossibile che la differenza tra due aree mediali M, M' sia un'area razionale R.

Vediamo ora come questa X, 26 viene applicata nella proposizione X, 42 per dimostrare l'univocità della generazione di una binomiale. Se possibile, una retta binomiale AB possa esser generata sia come somma $AC + CB$, sia come somma $AD + DB$, dove AC, CB e rispettivamente AD, DB sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza. Euclide sgombera anzitutto il terreno dall'ipotesi $AC = DB$, la quale, del resto, non corrisponderebbe a due distinte generazioni di AB.

A C D B

Poi stabilisce la relazione:

$$q\,(AC) + q\,(CB) + 2r\,(AC, CB) = q\,(AD) + q\,(DB) + 2r\,(AD, DB)$$

ambedue i membri risultando uguali a $q\,(AB)$.

Di qui:

$$[q\,(AC) + q\,(CB)] - [q\,(AD) + q\,(DB)] = 2r\,(AD, DB) -$$
$$- 2r\,(AC, CB)$$

ossia la differenza tra le somme di due quadrati sarebbe uguale alla differenza tra i due doppi rettangoli. Ma questo è impossibile perché la differenza che figura al primo membro è un'area razionale (essendo la differenza tra due aree razionali), mentre la differenza che figura al secondo membro non può essere un'area razionale, essendo la differenza tra due aree mediali (X, 21; X, 26).

Similmente procede la dimostrazione in X, 79 per l'apotome.

A. F.

PROPOSIZIONE 42.

Una retta binomiale si divide nei suoi termini [generatori] in un unico modo [a].

Sia AB una retta binomiale, divisa nei suoi termini [generatori] in C; quindi AC, CB sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza (X, 36). Dico che AB non può dividersi in nessun altro modo in due rette razionali commensurabili soltanto in potenza.

Infatti, se possibile, la si divida anche in D, in modo che pure AD, DB siano rette razionali commensurabili soltanto in potenza. È allora evidente che AC non è uguale a DB [b]. Sia difatti, se possibile, [$AC = DB$. Sarà anche: $AC - DC = DB - DC$, ossia $AD = CB$, e] pure AD in tal caso sarà uguale a CB; e si avrà che AC sta a CB come BD sta a DA [$AC : CB = DB : AD$], e che AB risulta divisa anche nel punto D, nello stesso modo della [c] sua divisione in C: il che è contro ciò che si è supposto [cioè trattarsi di due modi diversi di divisione in C ed in D]. Quindi AC non è uguale a DB. Per questo, si ha pure che i punti C, D non sono ad uguale distanza dal punto di bisezione (X, 41, lemma). Dunque, la somma dei quadrati di AC, CB differisce da quella dei quadrati di AD, DB di quanto anche il doppio del rettangolo di AC, CB differisce dal doppio del rettangolo di AD, DB, poiché la somma dei quadrati di AC, CB e del doppio del rettangolo di AC, CB, e quella dei quadrati di AD, DB e del doppio del rettangolo di AD, DB, sono pure uguali al quadrato di AB{, dato che, avendosi $q(AC) + q(CB) + 2r(AC, CB) = q(AD) + q(DB) + 2r(AD, DB)$, ed essendo ambedue le somme uguali a $q(AB)$ (II, 4), ne segue: $q(AC) + q(CB) - [(q(AD) + q(DB)] = 2r(AD, DB) - 2r(AC, CB)$}. Ma la somma $q(AC) + q(CB)$ differisce di un'area razionale dalla somma $q(AD) + q(DB)$ -

a. Letteralmente: nei suoi nomi in un unico punto.
b. Letteralmente: non è la stessa di *DB*.
c. Letteralmente: oltre che nella.

ambedue le somme sono difatti razionali [per quanto si è supposto]; perciò anche il doppio rettangolo $2r(AD, DB)$ differisce dal doppio rettangolo $2r(AC, CB)$ di un'area razionale, nonostante i doppi rettangoli siano ambedue mediali (X, 21) – il che è assurdo: difatti un'area mediale non supera di un'area razionale un'altra area mediale (X, 26).

Dunque, una retta binomiale non può dividersi nei suoi termini in modi diversi, e si divide quindi in essi in un unico modo. – C.D.D.

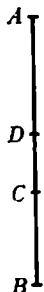
A

D

C

B

APPLICA: II, 4; X, 21, 26, 36, 41 lemma.

È APPLICATA IN: X, 44, 47.

PROPOSIZIONE 43.

Una retta prima bimediale si divide [nei suoi termini generatori] [a] *in un unico modo.*

Sia AB una retta prima bimediale, divisa in C in tal modo che AC, CB siano rette mediali commensurabili soltanto in potenza e comprendenti un'area razionale (X, 37); dico che AB non può dividersi nei suoi termini generatori in nessun altro modo.

Infatti, se possibile, la si divida anche nel punto D, in modo che pure AD, DB siano rette mediali commensurabili soltanto in potenza e comprendenti un'area razionale. Poiché dunque[, come si è mostrato nella precedente proposizione,] il doppio rettangolo $2r(AD, DB)$ viene a differire dal doppio rettangolo $2r(AC, CB)$ di quanto la somma dei quadrati di AC, CB differisce da quella dei quadrati di AD, DB (X, 41, lemma), ma poiché il doppio rettangolo $2r(AD, DB)$ differisce dal doppio rettangolo $2r(AC, CB)$ di un'area razio-

a. Dalla proposizione 43 in avanti il greco dice solo « si divide ».

nale – ambedue i doppi rettangoli sono difatti razionali [data l'ipotesi] –, anche la somma dei quadrati di *AC*, *CB* differisce in tal caso di un'area razionale dalla somma dei quadrati di *AD*, *DB*, sebbene simili somme [di quadrati] siano aree mediali[, essendo somme di quadrati di rette mediali commensurabili in potenza (v. X, 38)]: il che è assurdo (X, 26).

Dunque, una retta prima bimediale non può dividersi nei suoi termini in modi diversi, e quindi si divide in essi in un unico modo.

A D C B

APPLICA: X, 26, 37, lemma 41.

PROPOSIZIONE 44.

Una retta seconda bimediale si divide nei suoi termini generatori in un unico modo.

Sia *AB* una retta seconda bimediale, divisa [in *C*] in modo che *AC*, *CB* siano rette mediali commensurabili soltanto in potenza e comprendenti un'area mediale (X, 38); è allora evidente che *C* non è un punto di bisezione [a], poiché le mediali *AC*, *CB* non sono commensurabili in lunghezza. Dico che *AB* non può dividersi nei suoi termini generatori in nessun altro modo.

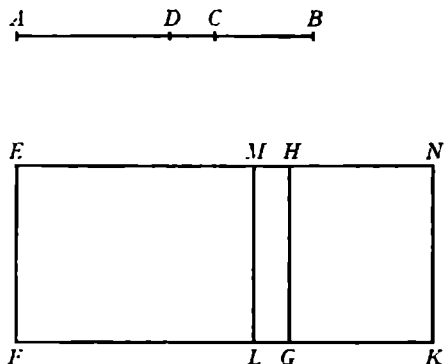
Infatti, se possibile, la si divida anche in *D*, in modo che *AC* non sia uguale a *DB*, ma, per ipotesi, *AC* sia maggiore – è pure chiaro allora che la somma dei quadrati di *AD*, *DB*, come dimostrammo sopra (X, 41, lemma), è minore di quella dei quadrati di *AC*, *CB*[, ossia: $q(AD) + q(DB) < < q(AC) + q(CB)$]; e supponiamo [ancora] che *AD*, *DB* siano rette mediali commensurabili soltanto in potenza e comprendenti un'area mediale. Si assuma come data la retta razionale *EF*, si applichi [parabolicamente] ad *EF* il rettangolo [b] *EK*, uguale al quadrato di *AB* (I, 44), ed appli-

a. Letteralmente: non è secondo la bisezione.
b. Letteralmente: il parallelogrammo rettangolare.

cando ancora ad EF il rettangolo EG, uguale alla somma dei quadrati di AC, CB, si consideri sottratto da EK il rettangolo EG; perciò il rettangolo-differenza HK risulta uguale al doppio del rettangolo di AC, CB (II, 4). Di nuovo, poi, sempre ad EF si applichi il rettangolo EL, uguale alla somma dei quadrati di AD, DB [a], somma che si dimostrò essere minore di quella dei quadrati di AC, CB, e si sottragga EL da EK; pure il rettangolo-differenza MK è quindi uguale al doppio del rettangolo di AD, DB. Ma poiché la somma dei quadrati di AC, CB è area mediale (v. X, 38), il rettangolo EG è mediale. Ed è applicato alla retta razionale EF, per cui [l'altezza] EH è una retta razionale ed incommensurabile in lunghezza con EF (X, 22). Per la stessa ragione, anche HN è una retta razionale ed incommensurabile in lunghezza con EF. Ora, poiché AC, CB sono rette mediali commensurabili soltanto in potenza, AC è incommensurabile in lunghezza con CB. Ma AC sta a CB come il quadrato di AC sta al rettangolo di AC, CB [$AC : CB = q(AC) : r(AC, CB)$] (X, 21, lemma); perciò $q(AC)$ è incommensurabile col rettangolo $r(AC, CB)$ (X, 11). Ma la somma dei quadrati $q(AC) + q(CB)$ è commensurabile col quadrato $q(AC)$ – difatti AC, CB sono [per ipotesi] commensurabili in potenza (X, 15) –, mentre il doppio rettangolo $2r(AC, CB)$ è commensurabile col rettangolo $r(AC, CB)$ (X, 6). Quindi anche, la somma $q(AC) + q(CB)$ è incommensurabile col doppio rettangolo $2r(AC, CB)$ (X, 13). Ma il rettangolo EG è uguale alla somma $q(AC) + q(CB)$, mentre al doppio rettangolo $2r(AC, CB)$ è uguale il rettangolo HK; quindi il rettangolo EG è incommensurabile col rettangolo HK, cosicché pure la retta EH è incommensurabile in lunghezza con la retta HN [dato che i due rettangoli EG, HK stanno fra loro come le basi EH, HN] (VI, 1; X, 11). Ed EH, HN sono razionali;

a. Letteralmente: e se ne sottragga (ne risulti sottratto) lo EG (cioè, il parallelogrammo rettangolo EG), uguale ai (alla somma dei) quadrati di AC, CB; perciò HK, che rimane, è uguale al rettangolo due volte compreso da AC, CB. Di nuovo, poi, si sottragga EL, uguale ai quadrati di AD, DB (cioè, alla somma).

quindi EH, HN sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza. Ma se si sommano due rette razionali commensurabili soltanto in potenza, la somma è quella retta irrazionale che si chiama binomiale (X, 36); dunque EN è una retta binomiale divisa nei suoi termini nel punto H. Allo stesso modo si potrà dimostrare che anche EM, MN sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza; si avrà allora che EN è una retta binomiale divisa [nei suoi termini] in punti diversi, H e M, e che EH non è uguale a MN, poiché [si ha, come è stato mostrato in principio, che] la somma dei quadrati di AC, CB è maggiore di quella dei quadrati di AD, DB [$q(AC) + q(CB) > q(AD) + q(DB)$]. Ma la somma $q(AD) + q(DB)$ è maggiore del doppio rettangolo $2r(AD, DB)$ [$q(AD) + q(DB) > 2r(AD, DB)$, come si può ricavare dalla II, 7]; quindi anche, [a più forte ragione,] $q(AC) + q(CB) > 2r(AD, DB)$, vale a dire il rettangolo EG è molto maggiore del doppio del rettangolo di AD, DB, vale a dire del rettangolo MK. Cosicché in tal caso, [i rettangoli EG, MK stando fra loro come le basi EH, MN (VI, 1), si ha che] pure EH è maggiore di MN (V, def. V).

Dunque EH non è retta uguale a MN[, e perciò H, M dividerebbero la retta binomiale EN in due modi diversi: il che è assurdo (X, 42)]. – C.D.D.

Applica: I, 44-45; II, 4; VI, 1; X, 6, 11, 13, 21 lemma, 22, 36, 38, 41 lemma e 42.

PROPOSIZIONE 45.

Una retta « maggiore » *si divide nei suoi termini generatori in un unico modo* [a].

Sia AB una retta [irrazionale] « *maggiore* », divisa in C in modo che AC, CB siano rette incommensurabili in potenza, tali che la somma dei quadrati di AC, CB [$q(AC) + q(CB)$] sia un'area razionale, e sia invece area mediale il rettangolo di AC, CB [$r(AC, CB)$] (X, 39); dico che AB non può dividersi nei suoi termini generatori in nessun altro modo.

Infatti, se possibile, si divida AB anche in D in modo che pure AD, DB siano rette incommensurabili in potenza, tali che la somma dei quadrati di AD, DB [$q(AD) + q(DB)$] sia un'area razionale, ma sia area mediale il rettangolo $r(AD, DB)$ da esse compreso. E poiché la somma dei quadrati di AC, CB differisce da quella dei quadrati di AD, DB di quanto il doppio del rettangolo di AD, DB differisce dal doppio del rettangolo di AC, CB {, ossia: $q(AC) + q(CB) - [q(AD) + q(DB)] = 2r(AD, DB) - 2r(AC, CB)$, come si è mostrato nella X, 42}, e poiché d'altra parte la somma dei quadrati di AC, CB supera quella dei quadrati di AD, DB di un'area razionale – ambedue le somme sono difatti razionali –, si ha che pure il doppio del rettangolo di AD, DB supererebbe in tal caso di un'area razionale il doppio del rettangolo di AC, CB, nonostante i doppi rettangoli siano mediali: il che è impossibile (X, 26). Dunque, una retta « *maggiore* » non può dividersi nei suoi termini in modi diversi, e quindi è divisibile in essi in un unico modo. – C.D.D.

A
D
C
B

APPLICA: X, 26, 39, 41 lemma.

a. Letteralmente: nello stesso punto soltanto, in un unico e medesimo punto.

PROPOSIZIONE 46.

Una retta [irrazionale] « potenziante un'area razionale più un'area mediale » *si divide nei suoi termini generatori in un unico modo.*

Sia AB una retta il cui quadrato sia uguale alla somma di un'area razionale e di un'area mediale, [e venga] divisa in C in modo che AC, CB siano rette incommensurabili in potenza, tali che la somma dei quadrati di AC, CB sia un'area mediale, e sia invece un'area razionale il doppio del rettangolo di AC, CB (X, 40); dico che AB non può dividersi nei suoi termini generatori in nessun altro modo.

Infatti, se possibile, la si divida anche in D in modo che pure AD, DB siano rette incommensurabili in potenza, tali che la somma dei quadrati di AD, DB sia un'area mediale, ed area razionale, invece, il doppio del rettangolo di AD, DB. Poiché dunque [si ha, come si è mostrato nella X, 42, che] il doppio del rettangolo di AC, CB differisce dal doppio del rettangolo di AD, DB di quanto pure la somma dei quadrati di AD, DB differisce da quella dei quadrati di AC, CB, {ossia: $2r(AC, CB) - 2r(AD, DB) = q(AD) + q(DB) - [q(AC) + q(CB)]$,} e poiché il doppio rettangolo $2r(AC, CB)$ supera il doppio rettangolo $2r(AD, DB)$ di un'area razionale, [essendo ambedue aree razionali per ipotesi,] anche la somma dei quadrati di AD, DB supererebbe in tal caso quella dei quadrati di AC, CB di un'area razionale, pur essendo [per ipotesi], ambedue le somme, aree mediali: il che è impossibile (X, 26). Perciò una retta il cui quadrato sia uguale alla somma di un'area razionale e di un'area mediale, [cioè una retta « *potenziante un'area razionale più un'area mediale* »,] non può dividersi nei suoi termini in modi diversi. Si divide dunque in essi in un unico modo.

A
D
C
B

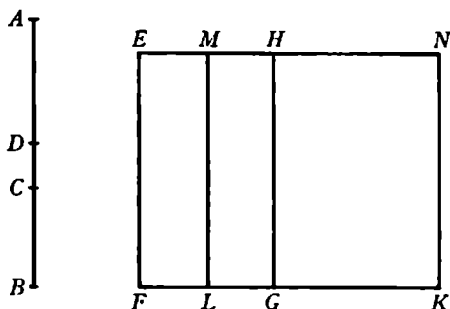
APPLICA: X, 26, 40.

PROPOSIZIONE 47.

Una retta [irrazionale] « potenziante la somma di due aree mediali » *si divide nei suoi termini generatori in un unico modo.*

Sia AB una retta il cui quadrato sia uguale alla somma di due aree mediali, [e venga] divisa in C in modo che AC, CB siano rette incommensurabili in potenza, tali che la somma dei quadrati di AC, CB sia un'area mediale, ed il rettangolo di AC, CB sia pure un'area mediale, che risulti inoltre incommensurabile con la somma dei quadrati di AC, CB (X, 41). Dico che AB non può dividersi nei suoi termini generatori in nessun altro modo così da dare quanto proposto.

Infatti, se possibile, la si divida [nel modo suddetto anche] in D, di modo che, di nuovo e manifestamente, AC non è uguale a DB, ma si supponga AC maggiore di DB. Si assuma come data la retta razionale EF, e si applichino ad EF il rettangolo EG, uguale alla somma dei quadrati $q(AC) + q(CB)$, ed il rettangolo HK, uguale al doppio rettangolo $2r(AC, CB)$; tutto quanto il rettangolo EK risulta quindi uguale al quadrato di AB (II, 4). Di nuovo, si applichi ora ad EF il rettangolo EL, uguale alla somma dei quadrati $q(AD) + q(DB)$, sicché il doppio rettangolo $2r(AD, DB)$, che viene così a rimanere, è uguale al rimanente rettangolo MK. Ora, poiché la somma dei quadrati di AC, CB è per ipotesi area mediale, anche il rettangolo EG è area mediale. Ed è applicato alla retta razionale EF; quindi [l'altezza] EH è una retta razionale ed incommensurabile in lunghezza con EF (X, 22). Per la stessa ragione, pure HN è una retta razionale ed incommensurabile in lunghezza con EF. Ma poiché la somma dei quadrati di AC, CB è [per ipotesi] incommensurabile col doppio del rettangolo di AC, CB, [e poiché ciò fa lo stesso,] pure il rettangolo EG è incommensurabile col rettangolo GN, cosicché anche la retta EH è incommensurabile con la retta HN (VI, 1; X, 11). Ma esse sono razionali[, come è stato mostrato]; quindi EH, HN sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza, e

[la loro somma] EN è una retta binomiale divisa nei suoi termini in H (X, 36). Similmente potremo dimostrare che, in tal caso, la retta EN risulta divisa nei suoi termini anche in M. Ma EH non è uguale a MN[; difatti, come è stato mostrato alla fine della X, 44, si ha: $q(AC) + q(CB) >$ $> 2r(AD, DB)$, ossia il rettangolo EG è maggiore del rettangolo MK: e poiché i due rettangoli hanno uguale la base EF e stanno quindi fra loro come le altezze EH, MN, si ha pure che EH, MN sono disuguali]. Perciò una retta binomiale EN sarebbe stata divisa nei suoi termini in modi diversi[, cioè nei punti M, H]: il che è assurdo (X, 42). Una retta «*potenziante la somma di due aree mediali*» non può dunque dividersi nei suoi termini in modi diversi, e quindi si divide in essi in un unico modo. – C.D.D.

APPLICA: I, 44-45; II, 4; VI, 1; X, 11, 22, 36, 41, 42.

SECONDA SERIE DI DEFINIZIONI [a]

Qualora sia data in partenza una retta che si assume come razionale, se è data poi una retta binomiale divisa nei suoi termini generatori e tale che il quadrato del termine maggiore superi il quadrato del minore del quadrato di una retta commensurabile in lunghezza col termine maggiore:

I. Se il termine maggiore è inoltre commensurabile in lunghezza con la retta razionale che si è assunta [in principio], la retta binomiale sia chiamata *prima binomiale* [b].

II. Se invece è il termine minore ad esser commensurabile in lunghezza con la retta razionale che si è assunta in principio, la retta binomiale sia chiamata *seconda binomiale.*

III. E se nessuno dei due termini è commensurabile in lunghezza con la retta razionale che si è assunta [in principio], la retta binomiale sia chiamata *terza binomiale.*

Di nuovo, [data in partenza una retta che si assume come razionale,] se [è data una retta binomiale, divisa nei suoi termini generatori e tale che] il quadrato del termine maggiore superi quello del minore del quadrato

a. Per rendere più distinti i termini di comprensione, modifichiamo leggermente l'ordine del testo greco, dove i numeri I e IV sono, com'è ovvio, comprensivi, cioè posti a fianco, delle condizioni di premessa per queste definizioni, che noi abbiamo invece isolato. Alla lettera sarebbe poi: *Seconde definizioni.*

b. Letteralmente: Supposta in partenza, presupposta, una retta razionale ed una di due nomi (una binomiale), divisa nei nomi, della quale il nome maggiore può più che il minore del quadrato di una retta commensurabile in lunghezza con lo stesso (cioè, il termine o nome maggiore), se il nome maggiore è commensurabile in lunghezza con la razionale proposta, l'intiera (retta, ossia la binomiale tutta quanta) sia chiamata prima di due nomi.

di una retta incommensurabile in lunghezza col termine maggiore:

IV. Se il termine maggiore è inoltre commensurabile in lunghezza con la retta razionale che si è assunta [in principio], la retta binomiale sia chiamata *quarta binomiale*.

V. Se invece è il termine minore ad esser commensurabile in lunghezza con la retta razionale che si è assunta in principio, la retta binomiale sia chiamata *quinta binomiale*.

VI. E se nessuno dei due lo è, [cioè nessuno dei due termini è commensurabile con la retta razionale che si è assunta in principio,] la retta binomiale sia chiamata *sesta binomiale* [a].

a. La V e la VI letteralmente sono: « E se (o: Se invece) il minore (sott.: è commensurabile), quinta (sott.: si chiami quinta di due nomi ») – appunto per la V, e « Se nessuno dei due, sesta (cioè, sesta binomiale) » – per la VI.

NOTA SULLE SEI RETTE BINOMIALI E SULLE SEI APOTOMI

Dopo la X, 47 si trova negli *Elementi* una « seconda serie di definizioni » che si riferisce alle rette binomiali. Con dette definizioni le rette binomiali vengono divise in sei specie, che si distinguono l'una dall'altra con un numero ordinale.

In modo del tutto corrispondente si ha dopo la X, 84 una « terza serie di definizioni » che si riferisce alle *apotomi*. Queste ultime vengono pure divise in sei specie, che vengono distinte con un numero d'ordine.

Nelle prime tre delle rette binomiali (cioè nella prima, seconda e terza) si ha un carattere comune: le due parti che compongono la binomiale (cioè le due rette razionali comm.li solo in potenza che van sommate) devono essere pitagoricamente comm.li.

Cioè, se indichiamo con x, y le due parti (i due *nomi*) che compongono la binomiale $x + y$, dove x, y rappresentano dunque due rette razionali comm.li solo in potenza, e se supponiamo $x > y$, deve essere, per definizione di commensurabilità pitagorica (v. nota introduttiva al libro decimo):

$$x^2 - y^2 = \left(\frac{m}{n}x\right)^2$$

(cioè il quadrato della parte maggiore deve superare il quadrato della parte minore del quadrato di una retta commensurabile in lunghezza con la parte maggiore).
Si ricava:

$$y^2 = x^2\left(1 - \frac{m^2}{n^2}\right) = \frac{n^2 - m^2}{n^2}x^2$$

da cui:

$$y = \frac{x}{n}\sqrt{n^2 - m^2}$$

$$x + y = x\left(1 + \frac{\sqrt{n^2 - m^2}}{n}\right) = \frac{x}{n}(n + \sqrt{n^2 - m^2})$$

A questo punto s'introduce il carattere distintivo particolare fra le prime tre binomiali. E precisamente:

1) Per la prima binomiale la parte maggiore x deve essere

comm.le in lunghezza con la retta r che si è assunta in partenza come retta razionale (ῥητή: vedi def. terza del libro X) cioè:

$$x = \frac{p}{q} r$$

e quindi:

$$x + y = \frac{pr}{qn} (n + \sqrt{n^2 - m^2})$$

e prescindendo da un fattore razionale:

$$x + y = n + \sqrt{n^2 - m^2}$$

Per esempio: $3 + \sqrt{5}$ rappresenta una prima binomiale. Infatti r va rappresentata da un numero intero: si ha quindi la commensurabilità in lunghezza fra la parte maggiore ($= 3$) e la r; si ha inoltre la commensurabilità pitagorica:

$$9 - 5 = 4 = 2^2$$

(e 2 rappresenta una retta comm.le in lunghezza con la parte maggiore $= 3$).

2) Per la seconda binomiale (ferma restando la comm.tà pitagorica), è la parte minore che deve essere comm.le in lunghezza con la retta razionale r data in partenza. Si ha perciò, come prima:

$$y = \frac{x}{n} \sqrt{n^2 - m^2}$$

Ma questa volta conviene esprimere x in funzione di y:

$$x = \frac{ny}{\sqrt{n^2 - m^2}} = y \frac{n \sqrt{n^2 - m^2}}{n^2 - m^2}$$

sicché:

$$x + y = y\left(\frac{n \sqrt{n^2 - m^2}}{n^2 - m^2} + 1\right) = \frac{y}{n^2 - m^2} [n \sqrt{n^2 - m^2} + (n^2 - m^2)]$$

Ma questa volta la parte minore y è comm.le in lunghezza con r, quindi, trascurando un fattore razionale, abbiamo:

$$x + y = n \sqrt{n^2 - m^2} + (n^2 - m^2)$$

Per esempio, $5 + 3\sqrt{5}$ è l'espressione di una seconda binomiale (si è posto $m = 2$, $n = 3$, sicché la differenza $n^2 - m^2 = 9 - 4 = 5$ non è un numero quadrato).

Si ha:

$$(3\sqrt{5})^2 - 5^2 = 45 - 25 = 20 = (2\sqrt{5})^2$$

e quindi la differenza $x^2 - y^2$ è un quadrato il lato del quale $(= 2\sqrt{5})$ è comm.le in lunghezza con la parte maggiore $(= 3\sqrt{5})$. Inoltre è la parte minore $(= 5)$ ad essere espressa da un numero intero, e quindi ad essere comm.le in lunghezza con la retta razionale di partenza r.

3) Per la terza binomiale, sempre ferma restando la comm.tà pitagorica, né la parte maggiore x né la parte minore y debbono risultare comm.li in lunghezza con la razionale di partenza r.

Posto quindi:

$$x = \sqrt{a}$$

si ha:

$$y = \frac{x}{n}\sqrt{n^2 - m^2} = \frac{\sqrt{a}}{n}\sqrt{n^2 - m^2}$$

$$x + y = \sqrt{a} + \frac{\sqrt{a}}{n}\sqrt{n^2 - m^2}$$

e trascurando un fattore razionale:

$$x + y = n\sqrt{a} + \sqrt{a\,(n^2 - m^2)}$$

oppure:

$$x + y = \sqrt{a}\,(n + \sqrt{n^2 - m^2})$$

dove naturalmente, come al solito, $n^2 - m^2$ non deve essere un numero quadrato.

Esempio (per $a = 2$, $m = 2$, $n = 3$):

$$\sqrt{2}\,(3 + \sqrt{5}) = 3\sqrt{2} + \sqrt{10}$$

(comm.tà pitagorica: $18 - 10 = 8 = (2\sqrt{2})^2$ e la retta espressa da: $2\sqrt{2}$ è comm.le in lunghezza con quella espressa da $3\sqrt{2}$).

Passiamo ora alle rette binomiali quarta, quinta, sesta. Per tutt'e tre queste *specie* di binomiali si ha come carattere comune la non-commensurabilità pitagorica.

Cioè se le due *parti* sono x, y, sicché la binomiale viene espressa da $x + y$ (con $x > y$), deve aversi:

$$x^2 - y^2 = k$$

dove k non sia un numero quadrato.

Per la quarta binomiale la parte maggiore x deve essere comm.le in lunghezza con la r, retta razionale di partenza; per la quinta binomiale deve invece la parte minore y essere comm.le in lunghezza con r; per la sesta binomiale né la x né la y devono essere comm.li in lunghezza con la r. Come si vede, si procede in perfetta simmetria: le ultime tre rette binomiali corrispondono esattamente alle prime tre, con l'unica differenza della non-commensurabilità pitagorica.

Ulteriore simmetria si troverà poi tra le sei binomiali e le sei apotomi.

4) Per la quarta binomiale avremo dunque:

$$x^2 - y^2 = k \qquad (k \text{ non quadrato})$$

da cui:

$$y^2 = x^2 - k \qquad\qquad x + y = x + \sqrt{x^2 - k}$$

E siccome la parte maggiore x deve essere comm.le in lunghezza con r, esprimiamola con un numero intero a.

Sicché la quarta binomiale risulta espressa da:

$$a + \sqrt{a^2 - k} \qquad\qquad (k,\ a^2 - k \text{ non quadrati}).$$

Esempio per $a = 3$; $k = 2$; $3 + \sqrt{7}$

(Si ha: $9 - 7 = 2 = (\sqrt{2})^2$ e $\sqrt{2}$ è incomm.le in lunghezza con 3 e con r).

5) Per la quinta binomiale avremo:

$$x^2 - y^2 = k \quad (\text{non quadrato})$$

da cui:

$$x^2 = y^2 + k \qquad\qquad x + y = y + \sqrt{y^2 + k}$$

E siccome deve questa volta essere y comm.le in lunghezza con r, l'esprimeremo col numero intero a, sicché la quinta binomiale risulta espressa da:

$$a + \sqrt{a^2 + k}$$

esempio: per $a = 3$; $k = 2$:

$$3 + \sqrt{11}$$

(Infatti: $11 - 9 = 2 = (\sqrt{2})^2$ e $\sqrt{2}$ è incomm.le con $\sqrt{11}$).

6) Per la sesta binomiale avremo infine:

$$x^2 - y^2 = k\,; \quad x = \sqrt{a}\,; \quad y^2 = x^2 - k = a - k\,; \quad y = \sqrt{a - k}$$
$$(a - k \text{ non quadrato})$$

sicché l'espressione della sesta binomiale è:

$$\sqrt{a} + \sqrt{a - k} \qquad (a,\ k,\ a - k \text{ non quadrati}).$$

Esempio per $a = 5$; $k = 2$: $\sqrt{5} + \sqrt{3}$
Infatti:

$$5 - 3 = (\sqrt{2})^2 \text{ e } \sqrt{2} \text{ è incomm.le con } \sqrt{5} \text{ e } \sqrt{3}.$$

Euclide fornisce anzitutto la costruzione di ciascuna delle sei rette binomiali (X, 48-53): passa poi, nelle proposizioni X, 54-59 e X, 60-75, a stabilire relazioni tra ciascuna delle sei rette binomiali e le altre linee irrazionali già prima vedute. Nelle seguenti X, 66-70, poi, dimostra che attraverso la relazione di commensurabilità in lunghezza si mantiene inalterata la *specie di irrazionalità*. Per quanto riguarda le rette binomiali si mantiene anche il numero d'ordine: in altri termini una retta comm.le in lunghezza con una retta binomiale è binomiale anch'essa, e dello stesso ordine. Similmente si ha per una retta comm.le in lunghezza con una retta bimediale (X, 67) o con una retta *maggiore* (X, 68) o con ciascuna delle due rette *potenzianti* (X, 69-70).

Passiamo ora alla considerazione dei due gruppi di proposizioni X, 54-59 e X, 60-65.

Le proposizioni di ciascun gruppo possono essere in certo senso considerate come inverse di quelle corrispondenti dell'altro gruppo. Per esempio, la X, 54 considera un rettangolo avente per dimensioni una retta razionale ed una prima binomiale: si dimostra che il quadrato equivalente al rettangolo ha come lato una retta binomiale (generica, senza precisazione del suo ordine). La X, 60, invece, parte dalla considerazione del quadrato di una retta binomiale generica e dimostra che un rettangolo equivalente al quadrato e avente per base una retta razionale ha per altezza una retta prima binomiale.

Coi nostri simboli:

X, 54: $$r\left(n + \sqrt{n^2 - m^2}\right) = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2$$

Nella X, 60 la stessa relazione va, invece, letta in senso inverso. Se prescindiamo dal fattore razionale r, si tratta dell'uguaglianza:

$$n + \sqrt{n^2 - m^2} = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2$$

da leggere nei due sensi.

Cioè nella X, 54 la prima binomiale è data, e occorre dimostrare che esiste una retta binomiale $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ soddisfacente alla relazione.

Naturalmente a, b devono risultare numeri razionali, altrimenti si avrebbero irrazionalità differenti da quella della retta binomiale.

Nella X, 60, invece, è data la binomiale generica, e occorre dimostrare che esiste una prima binomiale $n + \sqrt{n^2 - m^2}$ soddisfacente alla relazione.

Naturalmente n, m devono essere numeri razionali, e la differenza $n^2 - m^2$ non deve essere un numero quadrato.

Per la coppia X, 54, 60 e per tutte le altre coppie di proposizioni dello stesso genere, lasciamo al lettore la cura della lettura del lungo, ma non difficile, testo euclideo, e forniamo invece qualche dimostrazione utilizzando i simboli aritmetici.

X, 54. – Trascurando, come s'è detto, il fattore razionale r (cioè ponendo $r = 1$) si deve avere:

$$n + \sqrt{n^2 - m^2} = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$$

Occorre determinare a, b e mostrare che essi son numeri razionali, e che almeno uno di essi non è un quadrato. Sono dati n, m: numeri interi tali che la differenza $n^2 - m^2$ non sia un quadrato. Si ha subito:

$$n + \sqrt{n^2 - m^2} = a + b + 2\sqrt{ab}$$

da cui:

$$a + b = n \qquad ab = \frac{n^2 - m^2}{4}$$

$$z^2 - nz + \frac{n^2 - m^2}{4} = 0$$

$$z = \frac{n \pm \sqrt{n^2 - (n^2 - m^2)}}{2} = \frac{n \pm m}{2}; \qquad a = \frac{n + m}{2};$$

$$b = \frac{n - m}{2}$$

Sicché:

$$n + \sqrt{n^2 - m^2} = \left(\sqrt{\frac{n + m}{2}} + \sqrt{\frac{n - m}{2}}\right)^2$$

Questa è, del resto, una identità di immediata verifica. Come si vede, a, b sono razionali, e almeno uno di essi non è un quadrato. Se, infatti, entrambi fossero quadrati, tale sarebbe anche il loro prodotto:

$$ab = \frac{n+m}{2} \cdot \frac{n-m}{2} = \frac{n^2-m^2}{4}$$

e sarebbe quindi un quadrato anche la differenza $n^2 - m^2$, contro l'ipotesi.

X, 60. – Si parte dalla binomiale generica $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ (dove almeno una delle a, b non è un numero quadrato).

Si ha:

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + \sqrt{4ab}$$

Quest'ultima è l'espressione di una retta *prima binomiale.* Infatti è evidente che si tratti di una retta binomiale (per le condizioni dell'ipotesi $4ab$ non è un quadrato): ma si può vedere che si tratta proprio di una *prima binomiale.*

Infatti è verificata la commensurabilità pitagorica tra $(a + b)$ e $\sqrt{4ab}$ poiché:

$$(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$$

ed $(a - b)$ è comm.le in lunghezza con $(a + b)$: inoltre il termine maggiore $(a + b)$ è comm.le in lunghezza con la razionale di partenza r (è la somma di due numeri interi).

Euclide mostra dunque quale legame unisca, attraverso le aree di rettangoli e di quadrati, le varie rette irrazionali. Abbiamo visto che un rettangolo avente per base una retta razionale e per altezza una prima binomiale è equivalente ad un quadrato avente per lato una retta binomiale (della quale non viene precisato l'ordine): e inversamente.

Ora Euclide continua a considerare rettangoli aventi sempre per base una retta razionale, e per altezza successivamente una seconda, terza, quarta, quinta, sesta binomiale, e dimostra che ciascun rettangolo è equivalente ad un quadrato avente per lato rispettivamente una prima bimediale, una seconda bimediale, una *maggiore*, una retta potenziante un'area razionale più una area mediale, una retta potenziante la somma di due aree mediali.

Si può anche dire che ciascuna delle suddette linee irrazionali venga presentata come media proporzionale tra una retta razionale ed una retta binomiale di determinato ordine.

Infatti la relazione della X, 54 e X, 60 equivale alla proporzione:

retta razionale: binomiale = binomiale: prima binomiale.

E così:

retta razionale: prima bimed. = prima bimed.: seconda binomiale

retta razionale: seconda bimed. = seconda bimed.: terza binomiale

retta razionale: maggiore = maggiore: quarta binomiale

retta razionale: prima potenziante = prima potenz.: quinta binomiale

retta razionale: seconda potenziante = seconda potenz.: sesta binomiale.

Possiamo anche dire, servendoci della nomenclatura di *rapporto duplicato* (X, def. 9), che una retta razionale sta ad una retta binomiale di ciascun ordine in ragione duplicata del rapporto della stessa retta razionale alle singole rette irrazionali.

Vediamo ora, coi simboli aritmetici, la giustificazione delle restanti proposizioni X, 55-59 e X, 61-65.

X, 55. – *Il rettangolo di una retta razionale e di una seconda binomiale equivale al quadrato di una prima bimediale.*

$$n\sqrt{n^2 - m^2} + (n^2 - m^2) = \left(\sqrt{a\sqrt{b}} + \sqrt{c\sqrt{b}}\right)^2$$

Si ha:

$$(n^2 - m^2) + n\sqrt{n^2 - m^2} = a\sqrt{b} + c\sqrt{b} + 2\sqrt{abc}$$

E poiché b non è un quadrato, deve essere tale abc, e si ha:

$$\begin{cases} n^2 - m^2 = 2\sqrt{abc} \\ n^2 - m^2 = b \\ n = a + c \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} a + c = n \\ ac = \dfrac{n^2 - m^2}{4} \end{cases} \quad \text{e risolvendo:} \quad \begin{cases} a = \dfrac{n + m}{2} \\ c = \dfrac{n - m}{2} \end{cases}$$

sicché:

$$n\sqrt{n^2 - m^2} + (n^2 - m^2) =$$
$$= \left(\sqrt{\frac{n+m}{2}\sqrt{n^2 - m^2}} + \sqrt{\frac{n-m}{2}\sqrt{n^2 - m^2}}\right)^2$$

Come si vede, i valori di *a*, *b*, *c*, sono numeri razionali, e *b* non è un quadrato, mentre è tale il prodotto *abc*.

X, 56. – *Il rettangolo di una retta razionale e di una terza binomiale equivale al quadrato di una seconda bimediale.*

Cioè:

$$\sqrt{p}\,(n + \sqrt{n^2 - m^2}) = \left(\sqrt{a\sqrt{b}} + \sqrt{c\sqrt{b}}\right)^2$$
$$(r = 1,\ abc \text{ non quadrato}).$$

Si ricava:

$$n\sqrt{p} + \sqrt{p\,(n^2 - m^2)} = (a + c)\sqrt{b} + 2\sqrt{abc}$$

Poniamo:

$$\begin{cases} a + c = n \\ b = p \\ 4abc = p\,(n^2 - m^2) \end{cases}$$

Dall'ultima relazione si vede che *abc* non è un quadrato, dal momento che non sono quadrati p, $n^2 - m^2$ e date le altre condizioni dell'ipotesi.

Risolvendo si trova:

$$a = \frac{n+m}{2}\ ; \quad b = p\ ; \quad c = \frac{n-m}{2}$$

X, 57. – *Il rettangolo di una retta razionale e di una quarta binomiale equivale al quadrato di una «maggiore».*

Cioè:

$$a + \sqrt{a^2 - k} = \left(\sqrt{p + \sqrt{q}}\right)^2 \qquad (p > \sqrt{q})^2$$

dove p, q devono essere numeri razionali, e inoltre q, $p^2 - q$ non devono essere numeri quadrati.

Si ricava:

$$a + \sqrt{a^2 - k} = p + \sqrt{q}$$

e quindi:

$$a = p \quad ; \quad a^2 - k = q \qquad (\text{con } p^2 > q)$$

Verifica:

$$p^2 - q = a^2 - (a^2 - k) = k \text{ (che non è numero quadrato)}$$

Similmente per la X, 58 si ha:

$$a + \sqrt{a^2 + k} = \left(\sqrt{\sqrt{q} + m}\right)^2 \quad (\sqrt{q} > m)$$

da cui:

$$a = m \quad ; \quad a^2 + k = q$$

E infine: per la X, 59:

$$\sqrt{a} + \sqrt{a - k} = \left(\sqrt{\sqrt{q} + \sqrt{m}}\right)^2$$

da cui:

$$a = q \quad ; \quad a - k = m$$

A. F.

PROPOSIZIONE 48.

Trovare una prima binomiale.

Si assumano i due numeri AC, CB [$AC = m$, $CB = n$], tali che la loro somma AB [$AB = m + n$] abbia con $CB = n$ il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato, ma non abbia invece con $AC = m$ il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato (X, 28, lemma), si assuma come data una retta razionale D, e la retta EF sia commensurabile in lunghezza con D. Anche EF è quindi razionale (X, def. III). Si determini ora la retta FG in modo che [a] il quadrato di EF stia al quadrato di FG come il numero $AB = m + n$ sta al numero m (X, 6, coroll.). Ma $AB = m + n$ ha con $AC = m$ il rapporto che un numero ha con un numero; pure il quadrato di EF ha perciò con quello di FG il rapporto che un numero ha con un numero, cosicché il quadrato di EF è commensurabile col quadrato di FG (X, 6). Ma EF è una retta razionale; quindi anche FG è una retta razionale. E poiché [per ipotesi] $AB = m + n$ non ha con $AC = m$ il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato, neppure il quadrato di EF ha con quello di FG il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato; perciò EF è incommensurabile in lunghezza con FG (X, 9). Dunque EF, FG sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza, e [la loro somma] EG è una retta binomiale (X, 36).

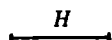
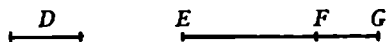
Dico che è anche una prima binomiale.

Infatti, poiché il numero AB sta al numero AC come il quadrato di EF sta al quadrato di FG [$(m + n) : m = q(EF) : q(FG)$], ma $AB = m + n$ è maggiore di $AC = m$, pure il quadrato $q(EF)$ è maggiore del quadrato $q(FG)$ (V, def. V). Si determini allora la retta H in modo che il quadrato di EF sia uguale alla somma dei quadrati di FG, H [b].

a. Letteralmente: E si ottenga che.

b. Sarebbe: « Sia dunque uguale al quadrato di EF la somma dei quadrati di FG, H », o, alla lettera, « Siano dunque uguali al quadrato di EF i quadrati di FG, H ». Sia questa che la traduzione relativa alla nota *a*. saranno adottate normalmente.

E poiché $(m + n) : m = q(EF) : q(FG)$, si ha, *convertendo*, che il numero AB sta al numero BC come il quadrato di EF sta a quello di H{, cioè $(m + n) : (m + n - m) = q(EF) :$ $: [q(EF) - q(FG)]$, ossia: $(m + n) : n = q(EF) : q(H)$} (V, 19, coroll.). Ma $m + n$ ha con n il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato; anche il quadrato di EF ha perciò col quadrato di H il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato. Quindi EF è commensurabile in lunghezza con H (X, 9), ed il quadrato di EF supera perciò quello di FG del quadrato di una retta [H] commensurabile in lunghezza con EF. Ora, EF, FG sono rette razionali, ed EF è commensurabile in lunghezza con D[, vale a dire il termine maggiore EF della retta binomiale EG è stato costruito commensurabile in lunghezza con la retta D assunta in partenza come retta razionale].

Dunque, la retta EF è una prima binomiale (X, deff. seconde, I). - C.D.D.

APPLICA: V, 19 coroll.; X, 6 e 6 coroll., 9, 28 lemma, 36.

PROPOSIZIONE 49.

Trovare una seconda binomiale.

Si assumano [come nella precedente X, 48] i due numeri AC, CB [$AC = m$, $CB = n$], tali che la loro somma AB [$AB = m + n$] abbia con $CB = n$ il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato, ma non abbia invece con $AC = m$ il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato (X, 28, lemma), si assuma come retta razionale [di partenza] la retta D, e la retta EF sia commensurabile in lunghezza con D; quindi EF è razionale.

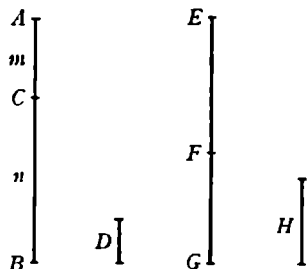
Si determini inoltre la retta FG in modo che il numero $AC = m$ stia al numero $AB = m + n$ come il quadrato di EF sta al quadrato di FG (X, 6, coroll.); perciò il qua-

drato di EF è commensurabile con quello di FG (X, 6). Quindi anche FG è una retta razionale. E poiché il numero $AC = m$ non ha col numero $AB = m + n$ il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato, neppure il quadrato di EF ha con quello di FG il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato. Quindi EF è incommensurabile in lunghezza con FG (X, 9); dunque EF, FG sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza, e [la loro somma] EG è una retta binomiale (X, 36).

Si deve ora dimostrare che è anche una seconda binomiale.

Infatti, poiché [vale la proporzione: $m : (m + n) = q(EF) : q(FG)$, e] si ha, *invertendo*, che il numero AB sta al numero AC come il quadrato di FG sta al quadrato di EF [$(m + n) : m = q(FG) : q(EF)$] (V, 7, coroll.), ma $AB = m + n$ è maggiore di $AC = m$, di conseguenza il quadrato di FG è maggiore di quello di EF (V, def. V). Si determini allora la retta H in modo che la somma dei quadrati di EF, H sia uguale al quadrato di FG; si ha quindi, *convertendo*, che il numero AB sta al numero BC come il quadrato di EF sta al quadrato di H{, cioè $(m + n) : (m + n - m) = q(FG) : [q(FG) - q(EF)]$, ossia: $(m + n) : n = q(FG) : q(H)$} (V, 19, coroll.). Ma $m + n$ ha con n il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato. Perciò FG è commensurabile in lunghezza con H (X, 9); cosicché il quadrato di FG supera quello di EF del quadrato di una retta [H] commensurabile [in lunghezza] con FG. Ora, EF, FG sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza, ed il termine minore EF è commensurabile in lunghezza con la retta D che si è assunta come razionale.

Dunque, la retta EF è una seconda binomiale (X, deff. seconde, II). – C.D.D.

APPLICA: V, 7 coroll., 19 coroll.; X, 6, 6 coroll., 9, 28 lemma, 36.

PROPOSIZIONE 50.

Trovare una terza binomiale.

Si assumano [come nelle precedenti X, 48 e X, 49] i due numeri AC, CB [$AC = m$, $CB = n$], tali che la loro somma AB [$AB = m + n$] abbia con $CB = n$ il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato, e non abbia invece con $AC = m$ il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato (X, 28, lemma), Si assuma poi un altro numero D [$D = p$] non quadrato, ed esso non abbia con nessuno dei due numeri $AB = m + n$, $AC = m$ il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato. Si assuma inoltre come data una retta razionale E, e si determini la retta FG in modo che il numero D stia al numero AB come il quadrato di E sta al quadrato di FG [$p : (m + n) = q(E) : q(FG)$] (X, 6, coroll.): il quadrato di E è perciò commensurabile con quello di FG (X, 6). Ma E è razionale; quindi anche FG è una retta razionale. E poiché D non ha con $AB = m + n$ il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato, neppure il quadrato di E ha col quadrato di FG il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato; quindi E è incommensurabile in lunghezza con FG (X, 9). Di nuovo, si determini la retta GH in modo che il numero AB stia al numero AC come il quadrato di FG sta al quadrato di GH [$(m + n) : m = q(FG) :$ $: q(GH)$] (X, 6, coroll.); il quadrato di FG è perciò commensurabile con quello di GH (X, 6). Ma FG è una retta razionale; quindi anche GH è retta razionale. E poiché $m + n$ non ha con m il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato, neppure il quadrato di FG ha con quello di HG il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato; perciò FG è incommensurabile in lunghezza con GH (X, 9). Dunque FG, GH sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza, e [la loro somma] FH è una retta binomiale.

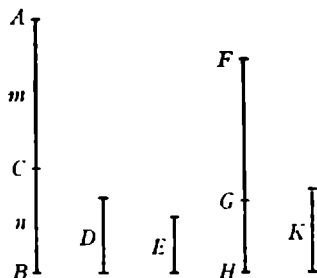
Dico adesso che è anche una terza binomiale.

Infatti, poiché $p : (m + n) = q(E) : q(FG)$, e poiché inoltre $(m + n) : m = q(FG) : q(GH)$, si ha, *ex aequo*, che $p : m =$

$= q(E) : q(GH)$ (V, 22). Ma il numero p [è stato scelto in modo che esso] non ha con m il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato; neppure il quadrato di E ha perciò col quadrato di GH il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato; quindi E è incommensurabile in lunghezza con GH (X, 9). E poiché il numero AB sta al numero AC come il quadrato di FG sta al quadrato di GH[, ossia la retta GH è stata determinata in modo che si abbia: $(m + n) : m = q(FG) : q(GH)$, e $m + n > m$], il quadrato di FG è maggiore di quello di GH (V, def. V). Si determini ora la retta K in modo che il quadrato di FG sia uguale alla somma dei quadrati di GH, K [a]; si ha quindi, *convertendo*, che il numero AB sta al numero BC come il quadrato di FG sta al quadrato di K{, ossia si ha, *convertendo* nella precedente proporzione, che $(m + n) : (m + n - m) = q(FG) : [q(FG) - q(GH)]$, cioè: $(m + n) : n = q(FG) : q(K)$} (V, 19, coroll.). Ma $m + n$ ha con n il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato; pure il quadrato di FG ha perciò con quello di K il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato; quindi FG è commensurabile in lunghezza con K (X, 9). Cosicché il quadrato di FG supera quello di GH del quadrato di una retta commensurabile [in lunghezza] con FG. Ora, FG, GH sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza, e nessuna di esse è commensurabile in lunghezza con E.

Dunque, la retta FH [loro somma] è una terza binomiale (X, deff. seconde, III). - C.D.D.

A m C n B D E F G H K

APPLICA: V, 19 coroll., 22; X, 6, 6, coroll., 9, 28 lemma, 36.

a. Letteralmente: Siano dunque i quadrati di GH, K uguali (cioè: Sia dunque la somma dei quadrati di GH, K uguale) al quadrato di FG.

PROPOSIZIONE 51.

Trovare una quarta binomiale.

Si assumano i due numeri AC, CB [$AC = m$, $CB = n$], tali che [la loro somma] AB [$AB = m + n$] non abbia né con $CB = n$, né con $AC = m$ il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato (X, 28, lemma). Si assuma come data la retta razionale D, e si assuma una retta EF la quale sia commensurabile in lunghezza con D[a]; perciò anche EF è razionale. Si determini la retta FG in modo che il numero AB stia al numero AC come il quadrato di EF sta al quadrato di FG [$(m + n) : m = q(EF) :$ $: q(FG)$] (X, 6, coroll.); quindi il quadrato di EF è commensurabile con quello di FG (X, 6); anche FG è perciò razionale. E poiché $AB = m + n$ non ha con $AC = m$ il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato, neppure il quadrato di EF ha col quadrato di FG il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato; quindi EF è incommensurabile in lunghezza con FG (X, 9). Dunque EF, FG sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza, cosicché [la loro somma] EG è una retta binomiale (X, 36).

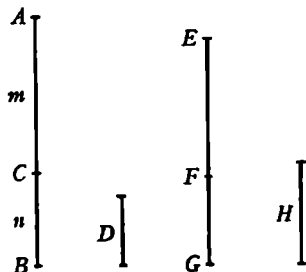
Dico adesso che è anche una quarta binomiale.

Infatti, poiché $(m + n) : m = q(EF) : q(FG)$[, e poiché $m + n > m$], il quadrato di EF è maggiore di quello di FG (V, def. V). Si determini allora una retta H tale che la somma dei quadrati di FG, H sia uguale al quadrato di EF [$q(FG) + q(H) = q(EF)$]; si ha quindi, *convertendo*, che il numero AB sta al numero BC come il quadrato di EF sta al quadrato di H\{, cioè $(m + n) : (m + n - m) = q(EF) :$ $: [q(EF) - q(FG)]$ (V, 19, coroll.), ossia: $(m + n) : n = q(EF) :$ $: q(H)$\}. Ma $AB = m + n$ non ha con $CB = n$ il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato; neppure il quadrato di EF ha perciò con quello di H il rap-

a. Letteralmente: e la retta EF sia commensurabile in lunghezza con D.

porto che un numero quadrato ha con un numero quadrato. Quindi EF è incommensurabile in lunghezza con H (X, 9), ed il quadrato di EF supera perciò quello di FG del quadrato di una retta incommensurabile [in lunghezza] con EF. Ora, EF, FG sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza, [la loro somma EG è, come si è visto, una retta binomiale,] ed [il suo termine maggiore] EF è commensurabile in lunghezza con la retta D che si è assunta come razionale.

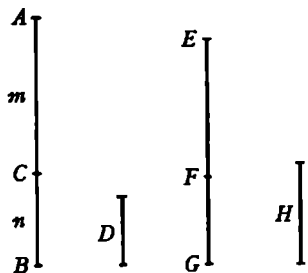
Dunque, la retta EG è una quarta binomiale (X, deff. seconde, IV). - C.D.D.

APPLICA: V, 19 coroll.; X, 6, 6 coroll., 9, 28 lemma, 36.

PROPOSIZIONE 52.

Trovare una quinta binomiale.

Si assumano i due numeri AC, CB [$AC = m$, $CB = n$], tali che [la loro somma] AB [$AB = m + n$] non abbia con nessuno dei due il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato (X, 28, lemma), si assuma come retta razionale data una retta D, e si assuma una retta EF la quale sia commensurabile con D; quindi EF è razionale. Si determini poi la retta FG tale che il numero AC stia al numero AB come il quadrato di EF sta al quadrato di FG [$m : (m + n) = q(EF) : q(FG)$] (X, 6, coroll.)[; il quadrato di EF è quindi commensurabile con quello di FG (X, 6), per cui è razionale pure la retta FG]. Ma $AC = m$ non ha con $AB = m + n$ il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato; neppure il quadrato di EF ha perciò con quello di FG il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato. Dunque EF, FG sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza (X, 9), ed EG [loro somma] è una retta binomiale (X, 36).

Dico adesso che è anche una quinta binomiale.

Infatti, poiché $m : (m + n) = q(EF) : q(FG)$, si ha, *invertendo*, che $(m + n) : m = q(FG) : q(EF)$ (V, 7, coroll.), per cui il quadrato di FG è maggiore di quello di EF (V, def. V). Si determini allora una retta H tale che la somma dei quadrati di EF, H sia uguale al quadrato di FG [$q(EF) + q(H) = q(FG)$]; *convertendo* (V, 19, coroll.), si ha che il numero AB sta al numero CB come il quadrato di FG sta al quadrato di H {, cioè $(m + n) : (m + n - m) = q(FG) : [q(FG) - q(EF)]$, ossia: $(m + n) : n = q(FG) : q(H)$}. Ma $AB = m + n$ non ha con $CB = n$ il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato; neppure il quadrato di FG ha perciò con quello di H il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato. Quindi FG è incommensurabile in lunghezza con H (X, 9), cosicché il quadrato di FG supera quello di EF del quadrato di una retta incommensurabile [in lunghezza] con FG. Ora, FG, EF sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza, [la loro somma EG è, come si è visto, una retta binomiale,] ed il [suo] termine minore EF è commensurabile in lunghezza con la retta D che si è assunta come razionale.

Dunque, la retta EG è una quinta binomiale (X, deff. seconde, V). - C.D.D.

APPLICA: V, 7 coroll., 19 coroll.; X, 6, 6 coroll., 9, 28, 36.

PROPOSIZIONE 53.

Trovare una sesta binomiale.

Si assumano i due numeri AC, CB [$AC = m$, $CB = n$], tali che [la loro somma] AB [$AB = m + n$] non abbia con nessuno dei due il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato; sia dato poi anche un altro numero D [$D = p$], il quale non sia un quadrato e non abbia

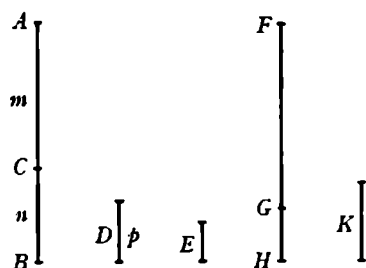
Geometri e agrimensori in discussione

(Roma, Biblioteca Vaticana, Cod. Vat. Pol. Lat. 1564, f. 3, sec. IX).

con nessuno dei due numeri $AB = m + n$, $AC = m$ il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato (X, 28, lemma), si assuma come data una retta E quale retta razionale [di partenza], e si determini la retta FG in modo che il numero D stia al numero AB come il quadrato di E sta al quadrato di FG [$p : (m + n) = q(E) : q(FG)$] (X, 6, coroll.); il quadrato di E è perciò commensurabile con quello di FG (X, 6). Ma E è razionale; quindi anche FG è una retta razionale. E poiché $D = p$ non ha con $AB = m + n$ il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato, neppure il quadrato di E ha con quello di FG il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato; quindi E è incommensurabile in lunghezza con FG (X, 9). Si determini ora, di nuovo, una retta GH tale che il numero AB stia al numero AC come il quadrato di FG sta al quadrato di GH [$(m + n) : m = q(FG) : q(GH)$] (X, 6, coroll.); il quadrato di FG è perciò commensurabile con quello di GH (X, 6). Quindi il quadrato di GH è area razionale, e GH è retta razionale. E poiché $AB = m + n$ non ha con $AC = m$ il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato, neppure il quadrato di FG ha con quello di GH il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato; quindi FG è incommensurabile in lunghezza con GH (X, 9). Dunque FG, GH sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza, e [la loro somma] FH è una retta binomiale (X, 36).

Si deve adesso dimostrare che è anche una sesta binomiale.

Infatti, poiché $p : (m + n) = q(E) : q(FG)$, e poiché inoltre $(m + n) : m = q(FG) : q(GH)$, si ha, *ex aequo*, che il numero $D = p$ sta al numero $AC = m$ come il quadrato di E sta a quello di GH[, ossia: $p : m = q(E) : q(GH)$] (V, 22). Ma p non ha con m il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato; neppure il quadrato di E ha perciò con quello di GH il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato; quindi E è incommensurabile in lunghezza con GH (X, 9). Ma fu dimostrato che è incommensurabile pure con FG; ciascuna delle due rette FG, GH

è quindi incommensurabile in lunghezza con E. Ora, poiché $(m + n) : m = q(FG) : q(GH)$ [e $m + n > m$], il quadrato di FG è maggiore di quello di GH (V, def. V). Si determini allora la retta K in modo che la somma dei quadrati di GH, K sia uguale al quadrato di FG [$q(GH) + q(K) = = q(FG)$]; si ha, *convertendo*, che il numero AB sta al numero CB come il quadrato di FG sta al quadrato di K{, cioè $(m + n) : (m + n - m) = q(FG) : [q(FG) - q(GH)]$, ossia: $(m + n) : n = q(FG) : q(K)$} (V, 19, coroll.). Ma $AB = m + n$ non ha con $CB = n$ il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato, cosicché neppure il quadrato di FG ha con quello di K il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato. Quindi FG è incommensurabile in lunghezza con K (X, 9), ed il quadrato di FG supera perciò quello di GH del quadrato di una retta [K] incommensurabile [in lunghezza] con FG. Ora, FG, GH sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza, e nessuna delle due è commensurabile in lunghezza con la retta E che si è assunta come razionale.

Dunque, la retta FH [loro somma] è una sesta binomiale [X, deff. seconde, VI]. - C.D.D.

APPLICA: V, 22; X, 6, 6 coroll., 9, 28 lemma, 36.

LEMMA.

Siano $AFBD$, $BECG$ [$AFBD = q$, $BECG = q'$] due quadrati e si pongano in modo che DB, BE siano fra loro sulla stessa linea retta; quindi anche FB, BG sono in linea retta fra loro. E si completi il parallelogrammo $AHCK$ [$AHCK = = Q$]; dico che $AHCK = Q$ è un quadrato, che il rettangolo $DBGK$ [$DBGK = r$] è medio proporzionale fra i quadrati $AFBD = q$, $BECG = q'$, e che infine il rettangolo $DECK$

[$DECK = r + q'$] è medio proporzionale fra i quadrati Q e q'[a].

Infatti, poiché DB è uguale a BF, e BE è uguale a BG, tutta quanta la retta DE è uguale a tutta quanta FG. Ma DE è uguale a ciascuna delle due rette AH, KC, mentre FG è uguale a ciascuna delle due AK, HC (I, 34); pure AH, KC sono perciò uguali rispettivamente ad AK, HC. Quindi il parallelogrammo $AHCK$ è equilatero; ma ha anche gli angoli retti: dunque $AHCK$ è un quadrato.

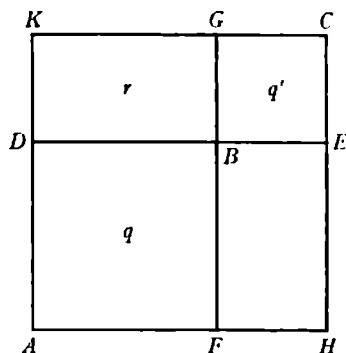
E poiché FB sta a BG come DB sta a BE [$FB : BG = = DB : BE$, essendo rispettivamente uguali i termini dei due rapporti], ma FB sta a BG come il quadrato q sta al rettangolo r, mentre DB sta a BE come il rettangolo r sta al quadrato q' [$FB : BG = q : r$; $DB : BE = r : q'$] (VI, 1), si ha pure che q sta a r come r sta a q' [$q : r = r : q'$] (V, 11). Dunque il rettangolo r è medio proporzionale fra i [due] quadrati q, q'[b].

Dico adesso che anche il rettangolo $DECK = r + q'$ è medio proporzionale fra i [due] quadrati $AHCK = Q$ e $BECG = q'$.

Infatti, poiché AD sta a DK come KG sta a GC [$AD : : DK = KG : GC$] – ciascuna delle due [prime] rette è difatti uguale alla sua rispettiva fra le altre due –, e poiché si ha, *componendo*, che AK sta a DK come KC sta a GC [$AK : : DK = KC : GC$] (V, 18), ma d'altra parte AK sta a DK come $AHCK$ sta a $DECK$ [$AK : DK = AHCK : DECK$, ossia: $AK : DK = Q : (r + q')$] (VI, 1), mentre KC sta a GC

a. In greco abbiamo soltanto, come indicazioni, *i quadrati* AB, BC, cioè per noi i quadrati $AFBD$, $BECG$, *il parallelogrammo* AC per il parallelogrammo $AHCK$, *il* (*parallelogrammo*) DG per il rettangolo, il parallelogrammo rettangolo $DBGK$, ed infine *il* (*parallelogrammo*) DC per il rettangolo $DECK$. Noi usiamo, questa e le volte successive, come d'ordinario, i simboli più atti all'orientamento del lettore.

b. Heath nota che tale risultato è stato già dimostrato durante X, 25 (« Ma DB sta a BC come Q sta a R, ecc. ») e che ciò potrebbe anche far dubitare della genuinità del lemma (*op. cit.*, vol. III, p. 116).

come $DECK$ sta a $BECG$ $[KC : GC = (r + q') : q']$ (id.), si ha pure che $AHCK = Q$ sta a $DECK = (r + q')$ come $DECK = r + q'$ sta a $BECG = q'$ $[Q : (r + q') = (r + q') : q']$ (V, 11). Dunque $DECK =$ $= r + q'$ è medio proporzionale fra $AHCK = Q$ e $BECG = q'$. - C.D.D.

APPLICA: I, 34; V, 11, 18; VI, 1.

È APPLICATO IN: X, 54, 55, 60, 92.

PROPOSIZIONE 54.

Se un'area [rettangolare] è compresa da una retta razionale e da una prima binomiale, la retta il cui quadrato sia uguale all'area in questione è la retta irrazionale che si chiama binomiale.

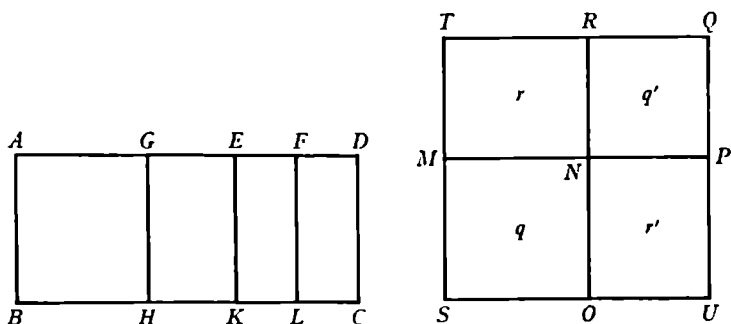
Infatti, l'area [rettangolare] $ADCB$ sia compresa dalla retta razionale AB [– che si assume appunto come retta razionale di partenza –] e dalla prima binomiale AD; dico che una retta il cui quadrato sia uguale all'area $ADCB$ è la retta irrazionale che si chiama binomiale.

Poiché AD è difatti una prima binomiale, la si divida in E nei suoi termini, ed AE sia il termine maggiore. È allora evidente che AE, ED sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza, che il quadrato di AE supera quello di ED del quadrato di una retta commensurabile [in lunghezza] con AE, e che AE è commensurabile in lunghezza con la retta AB che si è assunta come razionale (X, deff. seconde, I). Si divida adesso ED per metà nel punto F. Ora, poiché il quadrato di AE supera quello di ED del quadrato di una retta commensurabile [in lunghezza] con AE, se al termine maggiore AE si applica [ellitticamente] un rettangolo, uguale alla quarta parte del quadrato del termine

minore, vale a dire al quadrato di *EF*, e che manchi di un quadrato (VI, 28), esso divide *AE* in parti commensurabili [in lunghezza] (X, 17). Si applichi dunque ad *AE* il rettangolo di *AG*, *GE* [*r*(*AG*, *GE*)], uguale al quadrato di *EF* [– questo rettangolo non viene disegnato –]; quindi *AG* è commensurabile in lunghezza con *GE*. Dai punti *G*, *E*, *F* si conducano poi *GH*, *EK*, *FL* parallele all'una o all'altra indifferentemente delle due rette *AB*, *DC*, si costruiscano il quadrato *SONM*[, che verrà indicato con la lettera *q*], uguale al rettangolo *AGHB*, ed il quadrato *NPQR*, [che verrà indicato con *q'*,] uguale al rettangolo *GHKE* (II, 14), e si pongano [i due quadrati] in modo che *MN*, *NP* siano fra loro sulla stessa linea retta; perciò anche *RN*, *NO* sono in linea retta fra loro. Si completi il parallelogrammo *SUQT*; esso è quindi un quadrato[, che verrà indicato con la lettera maiuscola *Q*] (X, 53, lemma). E poiché il rettangolo di *AG*, *GE* è uguale al quadrato di *EF*, si ha che *AG* sta ad *EF* come *EF* sta a *GE* [$AG : EF = EF : GE$] (VI, 17); quindi anche, *AGHB* sta ad *EKLF* come *EKLF* sta a *GEKH* [$AGHB : EKLF = EKLF : GEKH$] (VI, 1); perciò il rettangolo *EKLF* è medio proporzionale fra i rettangoli *AGHB*, *GEKH*. Ma il rettangolo *AGHB* è uguale al quadrato $SONM = q$, ed il rettangolo *GEKH* è uguale al quadrato $NPQR = q'$; perciò il rettangolo *EKLF* è medio proporzionale fra i quadrati *q*, *q'*. Ma pure il rettangolo *MNRT* [$MNRT = r$] è medio proporzionale fra gli stessi quadrati (X, 53, lemma); quindi il rettangolo *EKLF* è uguale al rettangolo $MNRT = r$, cosicché è uguale anche al rettangolo *ONPU* [$ONPU = r'$] (I, 43). Ma la somma dei rettangoli *AGHB*, *GEKH* è uguale alla somma $q + q'$, per cui tutto quanto il rettangolo *ABCD* è uguale a tutto quanto il quadrato *SUQT*, [ossia è uguale a: $q + q' + r + r'$,] vale a dire al quadrato di *MP*; dunque il quadrato di *MP* è uguale al rettangolo *ABCD*.

Dico che la retta *MP* è una binomiale.

Infatti, poiché *AG*[, come si è dimostrato,] è commensurabile [in lunghezza] con *GE*, anche [la somma] *AE* è

commensurabile con ciascuna delle due rette AG, GE (X, 15). Ma, per ipotesi, AE è pure commensurabile [in lunghezza] con AB[, essendo $AD = AE + ED$ una prima binomiale]; quindi anche AG, GE sono commensurabili [in lunghezza] con AB (X, 12). Ma AB è una retta che si è assunta come razionale; pure ciascuna delle due rette AG, GE è perciò razionale; è dunque razionale ognuna delle due aree $AGHB$, $GEKH$ (X, 19), ed $AGHB$ è commensurabile con $GEKH$. Ma $AGHB$ è uguale a $SONM = q$, mentre $GEKH$ è uguale a $NPQR = q'$; perciò anche q, q', vale a dire i quadrati di MN, NP, sono razionali e commensurabili fra loro. E poiché AE è incommensurabile in lunghezza con ED [– si è dimostrato difatti che AG è commensurabile in lunghezza con GE, e si applica poi la X, 15 –], ma d'altra parte AE è commensurabile [in lunghezza] con AG, ed ED è commensurabile [in lunghezza] con EF [che è la sua metà (X, 6)], anche AG, EF sono incommensurabili (X, 13); cosicché pure l'area $AGHB$ è incommensurabile con quella $EFLK$ (VI, 1; X, 11). Ma $AGHB$ è uguale a q, ed $EFLK$ è uguale a r; quindi anche q, r sono incommensurabili. Ma q sta a r come ON sta a NR [$q : r = ON : NR$] (VI, 1); quindi ON è incommensurabile [in lunghezza] con NR (X, 11). Ma ON è uguale a MN, e NR è uguale a NP; perciò MN è incommensurabile [in lunghezza] con NP. Ora, il quadrato di MN è commensurabile col quadrato di NP[, ossia q è commensurabile con q', come è stato prima dimostrato], e ciascuno dei due è razionale; quindi MN, NP sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza.

Dunque, la retta MP [loro somma] è una binomiale (X, 36), ed il suo quadrato [$SUQT$] è [risultato] uguale all'area $ABCD$. - C.D.D.

APPLICA: I, 43; II, 14; VI, 1, 17, 28; X, 6, 12, 13, 15, 17, 19, 36, 53 lemma.

È APPLICATA IN: X, 58, 71.

PROPOSIZIONE 55.

Se un'area [rettangolare] è compresa da una retta razionale e da una seconda binomiale, la retta il cui quadrato sia uguale all'area in questione è la retta irrazionale che si chiama prima bimediale.

Infatti, l'area [rettangolare] $ABCD$ sia compresa dalla retta razionale AB [– che si assume appunto come retta razionale di partenza –] e dalla seconda binomiale AD; dico che una retta il cui quadrato sia uguale all'area $ABCD$ è una prima bimediale.

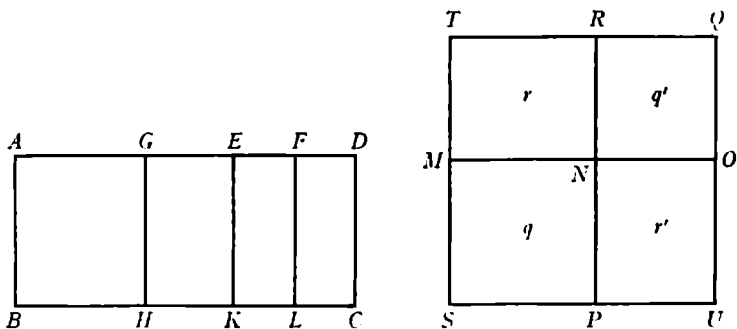
Poiché AD è difatti una seconda binomiale, la si divida in E nei suoi termini, in modo che AE sia il termine maggiore; perciò AE, ED sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza, il quadrato di AE supera quello di ED del quadrato di una retta commensurabile [in lunghezza] con AE, ed il termine minore ED è commensurabile in lunghezza con AB (X, deff. seconde, II). Si divida ED per metà in F, e si applichi [ellitticamente] ad AE il rettangolo di AG, GE, uguale al quadrato di EF e mancante di un quadrato (VI, 28); quindi AG è commensurabile in lunghezza con GE (X, 17). Per G, E, F si conducano GH, EK, FL parallele ad AB, DC, si costruiscano poi il quadrato $SPNM$ [$SPNM = q$] uguale al rettangolo $ABHG$, ed il quadrato $NOQR$ [$NOQR = q'$] uguale al rettangolo $GEKH$ (II, 14), e si pongano in modo che MN, NO siano fra loro sulla stessa linea retta; anche RN, NP sono perciò in linea retta fra loro. E si completi il quadrato $SUQT$; è allora evidente, da quanto precedentemente dimostrato (X, 53, lemma), che il rettangolo $MNRT$ [$MNRT = r$] è medio

proporzionale fra i quadrati $SPNM = q$, $NOQR = q'$, ed è uguale al rettangolo $EKLF$, e che il quadrato della retta MO è uguale all'area $ABCD$ [tutta intiera, *come si è visto durante il procedimento dimostrativo della* X, 54]. Si deve ora dimostrare che MO è una prima bimediale. Poiché AE è incommensurabile in lunghezza con ED, ma ED è commensurabile con AB, [essendo $AD = AE + ED$, per ipotesi, una seconda binomiale,] si ha che AE è incommensurabile [in lunghezza] con AB (X, 13). E poiché AG è commensurabile con GE, [come è stato dimostrato,] pure [la somma] AE è commensurabile con ciascuna delle due rette AG, GE (X, 15). Ma AE è incommensurabile in lunghezza con [ED, quindi con] AB; anche AG, GE sono perciò incommensurabili con AB (X, 13). Quindi AB, AG ed AB, GE sono coppie di[a] rette razionali commensurabili soltanto in potenza, cosicché ciascuno dei due rettangoli $ABHG$, $GEKH$ è area mediale (X, 21). Cosicché è area mediale pure ciascuno dei due quadrati q, q' [rispettivamente uguali ai due rettangoli]. Anche [i lati] MN, NO sono quindi rette mediali. E poiché AG è commensurabile in lunghezza con GE, pure $ABHG$ è commensurabile con $GEKH$ (VI, 1; X, 11), vale a dire q è commensurabile con q', ossia il quadrato di MN col quadrato di NO[b]. Ora, poiché AE è incommensurabile in lunghezza con ED, ma AE è commensurabile con AG, mentre ED è commensurabile con [la sua metà] EF (X, 6), si ha che AG è incommensurabile con EF (X, 13); cosicché pure il rettangolo $ABHG$ è incommensurabile col rettangolo $EFLK$, vale a dire q è incommensurabile con $MNRT = r$, ossia la retta PN è incommensurabile con la retta NR (VI, 1; X, 11), vale a dire MN [$= PN$] è incommensurabile in lunghezza con NO[$= NR$]. Ma fu dimostrato che MN, NO sono rette mediali e che sono commensurabili in potenza, per cui MN, NO sono rette mediali commensurabili soltanto in potenza.

a. Letteralmente si ha: « le rette BA, AG, GE sono razionali commensurabili soltanto in potenza ».

b. Nel testo troveremmo di séguito, omesso da P: « cosicché le rette MN, NO sono commensurabili in potenza ».

Dico adesso che esse comprendono, inoltre, un'area razionale. Infatti, poiché *ED* è per ipotesi commensurabile [in lunghezza] con ciascuna delle due rette *AB*, *EF*, [cioè è commensurabile con la retta *AB* assunta come razionale ed è anche commensurabile in lunghezza con la sua metà *EF* (X, 6)], pure *EF* è commensurabile con *AB* (X, 12)[, cioè con *EK*]. Ed è razionale ciascuna delle due rette *EF*, *EK*; quindi il rettangolo *EFLK*, vale a dire *r*, è razionale (X, 19). Ora, *r* è il rettangolo di [*MN*, *NR*, ossia di] *MN*, *NO*. Ma se si sommano due rette mediali commensurabili soltanto in potenza e che comprendano un'area razionale, la somma è una retta irrazionale, ed essa si chiama prima bimediale (X, 37).

Dunque, la retta *MO* è una prima bimediale. – C.D.D.

Applica: II, 14; VI, 1, 28; X, 6, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 37, 53 lemma.

È applicata in: X, 71.

Proposizione 56.

Se un'area [rettangolare] è compresa da una retta razionale e da una terza binomiale, la retta il cui quadrato sia uguale all'area in questione è la retta irrazionale che si chiama seconda bimediale.

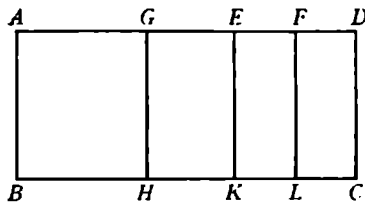
Infatti, l'area [rettangolare] *ABCD* sia compresa dalla retta razionale *AB* [– che si assume appunto come retta razionale di partenza –] e dalla terza binomiale *AD*, divisa in *E* nei suoi termini, dei quali *AE* è il maggiore; dico che

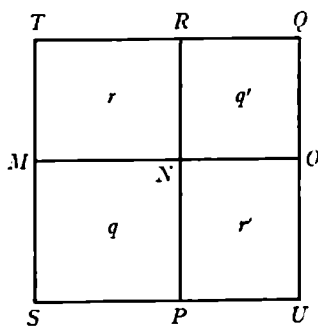
una retta il cui quadrato sia uguale all'area $ABCD$ è la retta irrazionale che si chiama seconda bimediale.

Si esegua difatti la medesima costruzione di prima. E poiché AD è una terza binomiale, AE, ED sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza, il quadrato di AE supera quello di ED del quadrato di una retta commensurabile [in lunghezza] con AE, e nessuna delle due rette AE, ED è commensurabile in lunghezza con AB (X, deff. seconde, III). Similmente allora a quanto prima dimostrato [nella X, 54 e nella X, 55], potremo dimostrare che MO è la retta il cui quadrato è uguale all'area $ABCD$, e che MN, NO sono rette mediali commensurabili soltanto in potenza; cosicché MO[, uguale a $MN + NO$,] è una bimediale.

Si deve adesso dimostrare che $MO = MN + NO$ è anche una seconda bimediale[; occorrerà dunque mostrare che le due rette mediali MN, NO comprendono un'area mediale].

Poiché ED è [per ipotesi] incommensurabile in lunghezza con AB, vale a dire con EK, ma ED è commensurabile [in lunghezza] con EF [che è la sua metà] (X, 6), si ha che EF è incommensurabile in lunghezza con [AB, cioè con] EK (X, 13). Ma EF, EK sono rette razionali; quindi EF, EK sono razionali commensurabili soltanto in potenza. Perciò il rettangolo $EFLK$, vale a dire $MNRT$ [$MNRT = r$], è area mediale (X, 21); ed è compreso da [MN, NR, ossia da] MN, NO; il rettangolo di MN, NO è quindi area mediale.

Dunque, la retta MO è una seconda bimediale. – C.D.D.

APPLICA: X, 13, 21.

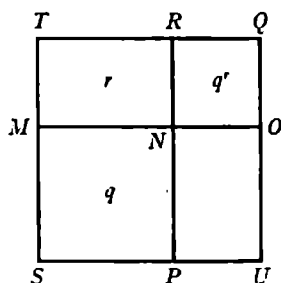
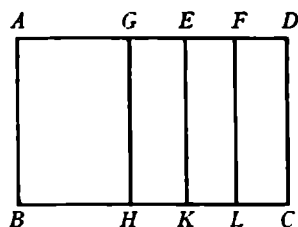
È APPLICATA IN: X, 72.

Proposizione 57.

Se un'area [rettangolare] è compresa da una retta razionale e da una quarta binomiale, la retta il cui quadrato sia uguale all'area in questione è la retta irrazionale che si chiama « maggiore ».

Infatti, l'area [rettangolare] $ABCD$ sia compresa dalla retta razionale AB [– che si assume appunto come retta razionale di partenza –] e dalla quarta binomiale AD, divisa in E nei suoi termini, dei quali AE sia il maggiore; dico che una retta il cui quadrato sia uguale all'area $ABCD$ è la retta irrazionale che si chiama « maggiore ».

Poiché AD è difatti una quarta binomiale, AE, ED sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza, il quadrato di AE supera quello di ED del quadrato di una retta incommensurabile [in lunghezza] con AE, ed AE è commensurabile in lunghezza con [la retta razionale] AB (X, deff. seconde, IV). Si divida ED per metà in F, e si applichi [ellitticamente] ad AE il rettangolo di AG, GE, uguale al quadrato di EF [e mancante di un quadrato] (VI, 28); quindi AG è incommensurabile in lunghezza con GE (X, 18). Si conducano GH, EK, FL parallele ad AB, e si proceda per il resto come si è fatto avanti (X, 55); è allora evidente che MO è la retta il cui quadrato è uguale all'area $ABCD$. Si deve adesso dimostrare che MO è la retta irrazionale che si chiama « maggiore ». Poiché AG è incommensurabile in lunghezza con GE, pure il rettangolo $AGHB$ è incommensurabile col rettangolo $GEKH$, vale a dire $SPNM$ [$SPNM = q$] con $NOQR$ [$NOQR = q'$] (VI, 1; X, 11); perciò MN, NO [lati di quadrati fra loro incommensurabili,] sono rette incommensurabili in potenza. E poiché AE è commensurabile in lunghezza con AB, il rettangolo $AEKB$ è razionale (X, 19); ed è uguale alla somma dei quadrati di MN, NO[, cioè alla somma $q + q'$, come si è veduto nel procedimento dimostrativo della X, 55]; anche la somma dei quadrati di MN, NO[, cioè $q + q'$,] è quindi razionale. E poiché DE è incommensurabile in lunghezza con AB, vale a dire con EK, ma

DE è commensurabile con *EF* [che è la sua metà] (X, 6), si ha che *EF* è incommensurabile [in lunghezza] con *EK* (X, 13). Perciò *EF*, *EK* sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza; quindi il rettangolo *EFLK*, vale a dire *MNRT* [*MNRT* = *r*, ad esso uguale], è area mediale (X, 21). Ed esso è compreso da *MN*, *NO*, per cui il rettangolo di *MN*, *NO* è area mediale. Ora, la somma dei quadrati di *MN*, *NO* è[, come si è visto prima,] razionale, e *MN*, *NO* sono rette incommensurabili in potenza[, come pure si è prima veduto]. Ma se si sommano due rette incommensurabili in potenza, tali che la somma dei loro quadrati sia un'area razionale, e sia invece area mediale il rettangolo da esse compreso, la somma è una retta irrazionale, ed essa si chiama « maggiore » (X, 39).

Dunque, la retta *MO* è la retta irrazionale che si chiama « maggiore », ed il suo quadrato è [risultato] uguale all'area *ABCD*. - C.D.D.

APPLICA: VI, 1, 28; X, 6, 11, 13, 18, 19, 21, 39.

È APPLICATA IN: X, 71.

PROPOSIZIONE 58.

Se un'area [rettangolare] è compresa da una retta razionale e da una quinta binomiale, la retta il cui quadrato sia uguale all'area in questione è irrazionale, ed è appunto quella retta irrazionale che si chiama « potenziante un'area razionale più un'area mediale ».

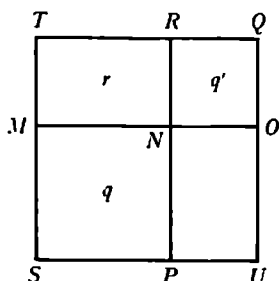
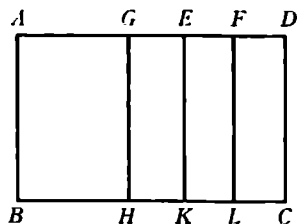
Infatti, l'area [rettangolare] *ABCD* sia compresa dalla retta razionale *AB* [- che si assume come retta razionale di

partenza –] e dalla quinta binomiale *AD*, divisa nei suoi termini in *E* in modo che *AE* sia il termine maggiore; dico che una retta il cui quadrato sia uguale all'area *ABCD* è quella retta irrazionale che si chiama « potenziante un'area razionale più un'area mediale ».

Si esegua difatti la medesima costruzione delle dimostrazioni precedenti; è allora evidente che *MO* è la retta il cui quadrato è uguale all'area *ABCD* (X, 54). Si deve adesso dimostrare che *MO* è quella retta irrazionale il cui quadrato è uguale alla somma di un'area razionale e di un'area mediale[, cioè « potenziante un'area razionale più un'area mediale »]. Poiché infatti *AG* è incommensurabile [in lunghezza] con *GE*[, essendo *AD* quinta binomiale] (X, 18), pure il rettangolo *AGHB* è incommensurabile col rettangolo *GEKH* (VI, 1; X, 11), vale a dire il quadrato di *MN* è incommensurabile col quadrato di *NO*; quindi *MN*, *NO* [ossia *MN*, *NR*, essendo $NR = NO$] sono rette incommensurabili in potenza. E poiché *AD* è una quinta binomiale, ed *ED* è la sua parte minore, *ED* è commensurabile in lunghezza con [la retta razionale] *AB* (X, deff. seconde, V). Ma *AE* è incommensurabile [in lunghezza] con *ED*; perciò anche *AB* è incommensurabile in lunghezza con *AE* (X, 13) [a]; quindi il rettangolo *AEKB*, vale a dire la somma dei quadrati di *MN*, *NO*[, ossia di *MN*, *NR*,] è area mediale (X, 21). E poiché *DE* è commensurabile in lunghezza con *AB*, vale a dire con *EK*, ma *DE* è commensurabile [in lunghezza con la sua metà] *EF*, pure *EF* è commensurabile [in lunghezza] con *EK* (X, 12). Ma *EK*[, che è uguale ad *AB*,] è razionale; è quindi razionale anche il rettangolo *EFLK*, vale a dire *MNRT* [$MNRT = r$], ossia il rettangolo di *MN*, *NO* [essendo $NR = NO$] (X, 19); perciò *MN*, *NO* sono rette incommensurabili in potenza e tali che la somma dei loro quadrati è

a. Heiberg elimina quanto si troverebbe dopo, ma non appare collegato normalmente: « *BA*, *AE* sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza »; manca infatti nei codici un qualunque *perciò*, *quindi*, ecc.

area mediale, ed è invece area razionale il rettangolo da esse compreso.

Dunque, MO è una retta il cui quadrato è uguale alla somma di un'area razionale e di un'area mediale, [cioè la retta irrazionale « potenziante un'area razionale più un'area mediale »,] quadrato che è uguale all'area $ABCD$. – C.D.D.

APPLICA: VI, 1; X, 11, 12, 13, 18, 21, 54.

È APPLICATA IN: X, 59, 71.

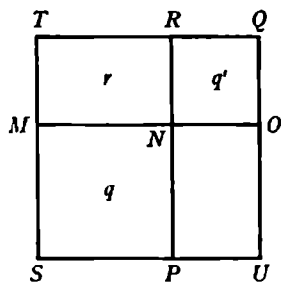
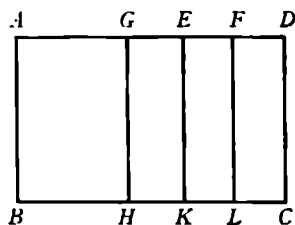
PROPOSIZIONE 59.

Se un'area [rettangolare] è compresa da una retta razionale e da una sesta binomiale, la retta il cui quadrato sia uguale all'area in questione è irrazionale, ed è appunto quella retta irrazionale che si chiama « potenziante la somma di due aree mediali ».

Infatti, l'area [rettangolare] $ABCD$ sia compresa dalla retta razionale AB [– che si assume come retta razionale di partenza –] e dalla sesta binomiale AD, divisa nei suoi termini in E in modo che AE sia il termine maggiore; dico che una retta il cui quadrato sia uguale all'area $ABCD$ è una retta il cui quadrato è uguale alla somma di due aree mediali[, cioè « potenziante la somma di due aree mediali »].

Si esegua la medesima costruzione delle dimostrazioni precedenti. È allora evidente che il quadrato di MO è uguale all'area $ABCD$, e che MN è incommensurabile in potenza con NO[, come si è visto nella X, 58]. E poiché AE è

incommensurabile in lunghezza con *AB* (X, deff. seconde, VI), si ha che *AE*, *AB* sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza; quindi il rettangolo *AEKB*, vale a dire la somma dei quadrati di *MN*, *NO*, è mediale (X, 21). Di nuovo, poiché *ED* è incommensurabile in lunghezza con *AB* (X, deff. seconde, VI), pure [la sua metà] *EF* è incommensurabile con [*AB*, ossia con] *EK* (X, 13); perciò *EF*, *EK* sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza; quindi il rettangolo *EFLK*, vale a dire *MNRT* [*MNRT* = *r*], ossia il rettangolo di [*MN*, *NR*, cioè di] *MN*, *NO*, è mediale (X, 21). E poiché *AE* è incommensurabile con *EF*, pure il rettangolo *AEKB* è incommensurabile col rettangolo *EFLK* (VI, 1; X, 11). Ma *AEKB* è la somma dei quadrati di *MN*, *NO*, mentre *EFLK* è il rettangolo di *MN*, *NO*; la somma dei quadrati di *MN*, *NO* è quindi incommensurabile col rettangolo di *MN*, *NO*. Ora, ciascuna delle due aree è mediale, e *MN*, *NO* sono rette incommensurabili in potenza.

Dunque, [la loro somma] *MO* è una retta il cui quadrato è uguale alla somma di due aree mediali, cioè « potenziante la somma di due aree mediali » (X, 41), quadrato che è uguale all'area *ABCD*. - C.D.D.

APPLICA: VI, 1; X, 11, 13, 21, 41, 58.

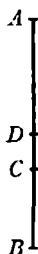
È APPLICATA IN: X, 72.

LEMMA [a].

Se si divide una linea retta in parti disuguali, la somma dei quadrati delle parti disuguali è maggiore del doppio del rettangolo compreso dalle parti disuguali.

Sia AB una retta, la si divida in parti disuguali in C, e la parte AC sia maggiore; dico che la somma dei quadrati di AC, CB è maggiore del doppio del rettangolo di AC, CB.

Infatti, si divida AB per metà in D (I, 10). Poiché dunque si è divisa una linea retta in parti uguali in D, ed in parti disuguali in C, la somma del rettangolo di AC, CB e del quadrato di CD è uguale al quadrato di AD [$r(AC, CB) + q(DC) = q(AD)$] (II, 5), cosicché il rettangolo di AC, CB è minore del quadrato di AD [$r(AC, CB) < q(AD)$]; quindi il doppio del rettangolo di AC, CB è minore del doppio del quadrato di AD [$2r(AC, CB) < 2q(AD)$]. Ma la somma dei quadrati di AC, CB è il doppio della somma dei quadrati di AD, DC (II, 9): $2q(AD) + 2q(DC) = q(AC) + q(CB)$. Segue: $2q(AD) < q(AC) + q(CB)$ e perciò: $2r(AC, CB) < q(AC) + q(CB)$, ossia: $q(AC) + q(CB) > 2r(AC, CB)$;] dunque la somma dei quadrati di AC, CB è maggiore del doppio del rettangolo di AC, CB. - C.D.D.

A D C B

APPLICA: I, 10; II, 5.

È APPLICATO IN: X, 60, 61.

a. Dato che Euclide fa uso tacitamente del risultato di questo lemma in X, 44, esso appare ben difficilmente come autentico; la cosa del resto, rileva Heiberg, viene fuori con facilità e da sé dalla II, 7 (cfr. per questo l'enunciato della stessa proposizione).

PROPOSIZIONE 60.

Il quadrato di una binomiale, applicato ad una retta razionale, forma [un rettangolo avente] per altezza[a] *una prima binomiale.*

Sia AB una retta binomiale $[AB = a + b]$, divisa nei suoi termini in C in modo che AC $[AC = a]$ sia il termine maggiore, si assuma come data la retta razionale DE, e si applichi [parabolicamente] a DE il rettangolo $DEFG$, uguale al quadrato di AB $[q(AB) = (a + b)^2]$ (I, 44-45) e formante DG quale sua altezza [rispetto alla base DE]; dico che DG è una prima binomiale.

Infatti, si applichino a DE il rettangolo $DEHK$ uguale al quadrato di AC $[q(AC) = a^2]$, ed il rettangolo $KHLM$ uguale al quadrato di BC $[q(BC) = b^2]$ (I, 44-45); quindi il doppio del rettangolo di AC, CB $[2r(AC, CB) = 2ab]$, che rimane [per giungere al quadrato di AB] (II, 4), è uguale al rettangolo $MLFG$. Si divida per metà la retta MG in N (I, 10), e si conduca la parallela NO a ciascuna delle due rette ML, GF (I, 31). Ciascuno dei due rettangoli $MLON$, $NOFG$ è quindi uguale ad una volta il rettangolo di AC, CB[, cioè ad ab]. E poiché AB è una retta binomiale, divisa in C nei suoi termini, AC, CB sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza (X, 36); perciò i quadrati di AC, CB sono razionali e commensurabili fra loro, cosicché è razionale pure la somma $a^2 + b^2$ dei quadrati di AC, CB (X, 15). Ma essa è uguale al rettangolo $DMLE$; perciò il rettangolo $DMLE$ è razionale. E l'area $DMLE$ è applicata alla retta razionale DE; quindi DM è una retta razionale e commensurabile in lunghezza con DE (X, 20). Di nuovo, poiché AC, CB sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza, il doppio $2ab$ del rettangolo di AC, CB, vale a dire il rettangolo $MLFG$, è area mediale (X, 21). Ed è applicato alla retta razionale ML; anche MG è quindi una retta razionale incommensurabile in lunghezza con ML, vale a

a. Letteralmente: produce, forma per larghezza.

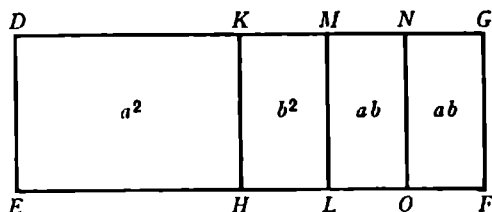
dire con *DE* (X, 22). Ma [si è già trovato che] pure *DM* è una retta razionale e commensurabile in lunghezza con *DE*; perciò *DM* è incommensurabile in lunghezza con *MG* (X, 13). Ora, *DM*, *MG* sono rette razionali; dunque *DM*, *MG* sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza, e [la loro somma] *DG* è così una retta binomiale (X, 36).

Si deve adesso dimostrare che *DG* è anche una prima binomiale.

Poiché il rettangolo ab di *AC*, *CB* è medio proporzionale fra i quadrati a^2, b^2 di *AC*, *CB* (X, 21 lemma, e X, 53 lemma), anche il rettangolo $MNOL = ab$ è medio proporzionale fra i rettangoli $DKHE = a^2$, $KMLH = b^2$. Si ha quindi che *DKHE* sta a *MNOL* come *MNOL* sta a *KMLH* [$DKHE : : MNOL = MNOL : KMLH$], vale a dire *DK* sta a *MN* come *MN* sta a *KM* [$DK : MN = MN : KM$] (VI, 1), per cui il rettangolo di *DK*, *KM* è uguale al quadrato di *MN* (VI, 17). E poiché il quadrato a^2 di *AC* è commensurabile con quello b^2 di *CB*, pure il rettangolo $DKHE = a^2$ è commensurabile col rettangolo $KMLH = b^2$; cosicché anche *DK* è commensurabile con *KM* (VI, 1; X, 11). E poiché la somma $a^2 + b^2$ dei quadrati di *AC*, *CB* è maggiore del doppio $2ab$ del rettangolo di *AC*, *CB* (X, 59, lemma), anche il rettangolo $DMLE = a^2 + b^2$ è maggiore del rettangolo $MGFL = 2ab$, cosicché pure la retta *DM* è maggiore della retta *MG* (VI, 1; V, def. V). Ora, il rettangolo di *DK*, *KM* è[, come si è sopra mostrato,] uguale al quadrato di *MN*, vale a dire alla quarta parte del quadrato di *MG*, e *DK* è commensurabile con *KM*. Ma se si dànno due rette disuguali, ed alla maggiore si applica [ellitticamente] un rettangolo, uguale alla quarta parte del quadrato della minore e mancante di un quadrato, ed esso divide la retta in parti commensurabili, il quadrato della parte maggiore supera quello della minore del quadrato di una retta commensurabile [in lunghezza] con *DM* (X, 17). Ora, *DM*, *MG* sono rette razionali, e *DM* poi, che è il termine maggiore, è commensurabile in lunghezza con la retta *DE* che si è assunta come razionale.

Dunque, la retta DG [$= DM + MG$] è una prima binomiale (X, deff. seconde, I). - C.D.D.

APPLICA: I, 10, 31, 44-45; II, 4; VI, 1, 17; X, 11, 13, 15, 17, 20, 21, 21 lemma, 22, 36, 53 lemma, 59 lemma.

È APPLICATA IN: X, 72 (scolio), 111.

PROPOSIZIONE 61.

Il quadrato di una retta prima bimediale, applicato ad una retta razionale, forma [un rettangolo avente] per altezza una seconda binomiale.

Sia AB una prima bimediale, divisa nelle sue mediali in C, e di esse AC sia la maggiore; si assuma come data la retta razionale DE, e si applichi [parabolicamente] a DE il rettangolo[a] $DEFG$, uguale al quadrato di AB (I, 44-45) e formante DG quale altezza; dico che DG è una retta seconda binomiale.

Infatti, si esegua la medesima costruzione della proposizione precedente. E poiché AB è una prima bimediale divisa [nei suoi termini] in C, si ha che AC, CB sono rette mediali commensurabili soltanto in potenza e comprendenti un'area razionale (X, 37); cosicché anche i quadrati di AC, CB sono aree mediali (X, 21). Perciò il rettangolo $DELM$ [uguale alla somma dei due quadrati] è [pure] area mediale (X, 15 e 23, coroll.). E risulta applicato alla retta razionale DE;

a. Euclide veramente dice *si applichi il parallelogrammo* in X, 61, 62, 63, mentre nelle 64 e 65 usa solo l'articolo τό, sottintendendo parallelogrammo.

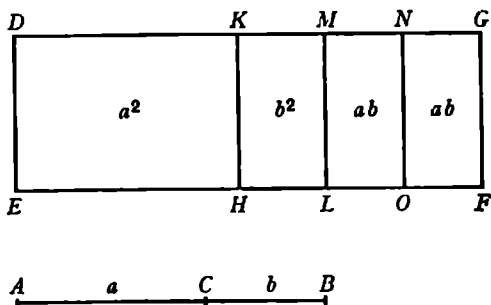
quindi DM è una retta razionale, incommensurabile inoltre in lunghezza con DE (X, 22). Di nuovo, poiché il doppio del rettangolo di AC, CB è razionale, è razionale pure il rettangolo $MLFG$[, uguale al doppio del rettangolo di AC, CB]. Ed esso è applicato alla retta razionale ML [uguale a DE]; perciò è razionale anche [l'altezza] MG e commensurabile in lunghezza con ML, vale a dire con DE (X, 20); quindi DM[, che si è mostrato essere incommensurabile in lunghezza con DE,] è incommensurabile in lunghezza con MG (X, 13). Ma DM, MG sono rette razionali; dunque esse sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza, e [la loro somma] DG è così una retta binomiale (X, 36).

Si deve adesso dimostrare che è anche una seconda binomiale.

Infatti, poiché la somma $a^2 + b^2$ dei quadrati di AC, CB è maggiore del doppio $2ab$ del rettangolo di AC, CB (X, 59, lemma), anche il rettangolo $DELM = a^2 + b^2$ è maggiore del rettangolo $MLFG = 2ab$, cosicché pure la retta DM è maggiore della retta MG (VI, 1). E poiché il quadrato a^2 di AC è commensurabile col quadrato b^2 di CB, anche il rettangolo $DEHK = a^2$ è commensurabile col rettangolo $KHLM = b^2$, cosicché pure la retta DK è commensurabile[, in lunghezza,] con la retta KM (VI, 1; X, 11). Ma il rettangolo di DK, KM è uguale al quadrato di MN[, come si è veduto nel procedimento dimostrativo di X, 60]; [son date perciò due rette disuguali DM, MG, delle quali DM è la maggiore, e si è applicato alla maggiore ellitticamente un'area $r(DK, KM) = q(MN)$, cioè un'area uguale alla quarta parte del quadrato della minore $MG = 2MN$, ed il punto K divide DM in parti DK, KM fra loro commensurabili in lunghezza: per la X, 17] il quadrato di DM supera quindi quello di MG del quadrato di una retta commensurabile [in lunghezza] con DM. E [la retta minore] MG è[, come si è visto prima,] commensurabile in lunghezza con DE.

Dunque, la retta DG [$= DM + MG$] è una seconda binomiale (X, deff. seconde, II). – C.D.D.

APPLICA: I, 44-45; VI, 1; X, 11, 13, 15, 17, 20, 21, 22, 36, 37, 59 lemma.

È APPLICATA IN: X, 62, 72 scolio.

PROPOSIZIONE 62.

Il quadrato di una retta seconda bimediale, applicato ad una retta razionale, forma [un rettangolo avente] per altezza una terza binomiale.

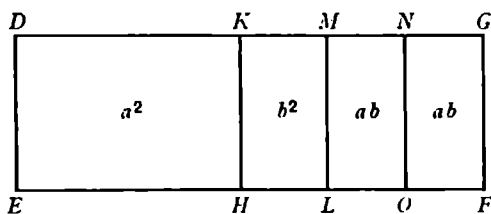
Sia *AB* una seconda bimediale, divisa nelle sue mediali in *C* in modo che *AC* sia la parte maggiore, sia *DE* una retta razionale, e si applichi a *DE* il rettangolo *DEFG*, uguale al quadrato di *AB* (I, 44-45) e formante *DG* quale altezza; dico che *DG* è una terza binomiale.

Infatti, si esegua la medesima costruzione delle dimostrazioni precedenti. E poiché *AB* è una seconda bimediale divisa [nei suoi termini] in *C*, si ha che *AC*, *CB* sono rette mediali commensurabili soltanto in potenza e comprendenti un'area mediale (X, 38); cosicché anche [i quadrati di *AC*, *CB* sono aree mediali, e pure] la somma dei quadrati di *AC*, *CB* è area mediale (X, 15 e 23, coroll.). Ora, la somma in questione è uguale al rettangolo *DELM*; perciò è area mediale pure il rettangolo *DELM*. Ma *DELM* è applicato alla retta razionale *DE*; quindi anche [l'altezza] *DM* è una retta razionale, ed incommensurabile in lunghezza con *DE* (X, 22). Per la stessa ragione, pure *MG* è una retta razionale incommensurabile inoltre in lunghezza con *ML*, vale a dire con *DE*; ciascuna delle due rette *DM*, *MG* è quindi razionale ed incommensurabile in lunghezza con *DE*. Ora, poiché *AC* è incommensurabile in lunghezza con *CB*, ma *AC* sta a *CB* come il quadrato di *AC* sta al rettangolo di

AC, CB [$AC : CB = q(AC) : r(AC, CB)$] (X, 21, lemma), pure il quadrato $q(AC)$ di AC è incommensurabile col rettangolo $r(AC, CB)$ di AC, CB (X, 11). Cosicché anche la somma dei quadrati $q(AC) + q(CB)$[, che è commensurabile con $q(AC)$], è incommensurabile [col rettangolo $r(AC, CB)$ e pure quindi] col doppio $2r(AC, CB)$ del rettangolo di AC, CB (X, 12, 13), vale a dire che il rettangolo $DELM$ è incommensurabile col rettangolo $MLFG$, cosicché pure la retta DM è incommensurabile con la retta MG (VI, 1; X,11). Ma esse sono razionali; dunque [DM, MG sono due rette razionali commensurabili soltanto in potenza, e la loro somma] DG è così una retta binomiale.

Si deve dimostrare che essa è anche una terza binomiale.

Similmente allora a quanto fatto prima [nel procedimento dimostrativo della X, 61], possiamo concludere che DM è maggiore di MG e che DK è commensurabile con KM. Ma il rettangolo di DK, KM è uguale al quadrato di MN; perciò il quadrato di DM supera quello di MG del quadrato di una retta commensurabile [in lunghezza] con DM (X, 17). Ma nessuna delle due rette DM, MG è commensurabile in lunghezza con DE.

Dunque, la retta DG [$= DM + MG$] è una terza binomiale (X, deff. seconde, III). – C.D.D.

APPLICA: I, 44-45; VI, 1; X, 11, 15, 17, 22, 23 coroll., 61.

È APPLICATA IN: X, 72 scolio.

PROPOSIZIONE 63.

Il quadrato di una [retta irrazionale detta] « maggiore », *applicato ad una retta razionale, forma [un rettangolo avente] per altezza una quarta binomiale.*

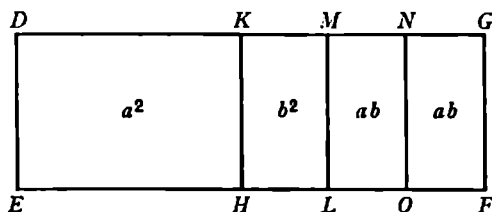
Sia AB una [retta irrazionale detta] « *maggiore* », divisa in C in modo che AC sia maggiore di CB, sia DE una retta razionale, e si applichi [parabolicamente] a DE il rettangolo $DEFG$, uguale al quadrato di AB (I, 44-45) e formante DG quale altezza; dico che DG è una quarta binomiale.

Si esegua la medesima costruzione delle dimostrazioni precedenti. E poiché AB è una retta « *maggiore* » divisa [nei suoi termini] in C, si ha che AC, CB sono rette incommensurabili in potenza e tali che la somma dei loro quadrati sia un'area razionale ed area mediale sia invece il rettangolo da esse compreso (X, 39). Poiché dunque la somma dei quadrati di AC, CB è razionale, il rettangolo $DELM$[, uguale a tale somma,] è razionale; anche la retta DM è quindi razionale e commensurabile in lunghezza con DE (X, 20). Di nuovo, poiché il doppio del rettangolo di AC, CB, [cioè $2ab$,] vale a dire il rettangolo $MLFG$, è area mediale, ed è applicato alla retta razionale ML [uguale a DE], anche MG è una retta razionale, ed incommensurabile in lunghezza con DE (X, 22); perciò pure DM è incommensurabile in lunghezza con MG (X, 13). Dunque DM, MG sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza, e [la loro somma] DG è così una retta binomiale.

Si deve dimostrare che è anche una quarta binomiale.

Similmente allora a quanto fatto prima, potremo dimostrare che DM è maggiore di MG, e che il rettangolo di DK, KM è uguale al quadrato di MN. Poiché dunque il quadrato di AC è incommensurabile col quadrato di CB, anche il rettangolo $DEHK = q(AC)$ è incommensurabile col rettangolo $KHLM = q(CB)$, cosicché pure la retta DK è incommensurabile con la retta KM (VI, 1; X, 11). Ma se si dànno due rette disuguali, ed alla maggiore si applica [ellitticamente] un rettangolo, uguale alla quarta parte del

quadrato della minore e mancante di un quadrato, ed esso divide la retta in parti incommensurabili, il quadrato della retta maggiore supera quello della minore del quadrato di una retta incommensurabile in lunghezza con la maggiore (X, 18); perciò il quadrato di *DM* supera quello di *MG* del quadrato di una retta incommensurabile con *DM*. Ora, *DM*, *MG* sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza, e *DM* è commensurabile [in lunghezza] con la retta *DE* che si è assunta come razionale.

Dunque, la retta *DG* [$= DM + MG$] è una quarta binomiale (X, deff. seconde, IV). – C.D.D.

APPLICA: I, 44-45; VI, 1; X, 11, 13, 18, 20, 22, 39.

È APPLICATA IN: X, 72 scolio.

PROPOSIZIONE 64.

Il quadrato di una retta [irrazionale] « potenziante un'area razionale più un'area mediale », se applicato ad una retta razionale, forma [un rettangolo avente] per altezza una quinta binomiale.

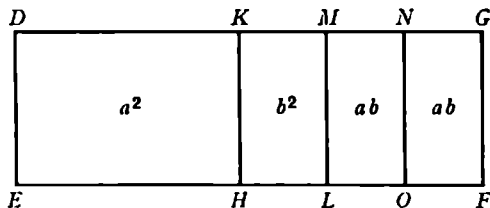
Sia *AB* una retta [irrazionale] il cui quadrato sia uguale alla somma di un'area razionale e di un'area mediale, [cioè una retta « potenziante un'area razionale più un'area mediale »,] divisa nelle sue rette [componenti] in *C* in modo che *AC* sia maggiore; si assuma come data la retta razionale *DE*, e si applichi a *DE* il rettangolo *DEFG*, uguale al quadrato di *AB* (I, 44-45) e formante *DG* quale altezza; dico che *DG* è una quinta binomiale.

Infatti, si esegua la medesima costruzione già prima eseguita[, cioè nelle proposizioni precedenti]. Poiché dunque

AB è una retta il cui quadrato è uguale alla somma di un'area razionale e di un'area mediale, ed è divisa [nei suoi termini] in *C*, si ha che *AC*, *CB* sono rette incommensurabili in potenza, tali che la somma dei loro quadrati sia un'area mediale e sia invece un'area razionale il rettangolo da esse compreso (X, 40). Poiché dunque la somma dei quadrati di *AC*, *CB* è un'area mediale, il rettangolo *DELM* [uguale a tale somma] è un'area mediale; cosicché la retta *DM* è razionale ed incommensurabile in lunghezza con *DE* (X, 22). Di nuovo, poiché il doppio del rettangolo di *AC*, *CB*, [cioè $2ab$,] vale a dire il rettangolo *MLFG*, è razionale, la retta *MG* è razionale e comm.le [in lunghezza] con *DE* (X, 20). Quindi *DM* è incommensurabile con *MG* (X, 13); dunque *DM*, *MG* sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza, e [la loro somma] *DG* è così una retta binomiale.

Dico adesso che è anche una quinta binomiale.

Infatti, potremo similmente dimostrare [come nelle proposizioni precedenti] che il rettangolo di *DK*, *KM* è uguale al quadrato di *MN*, e che *DK* è incommensurabile in lunghezza con *KM*; quindi il quadrato di *DM* supera quello di *MG* del quadrato di una retta incommensurabile [in lunghezza] con *DM* (X, 18). Ora, *DM*, *MG* sono rette commensurabili soltanto in potenza, e la minore, *MG*, è commensurabile in lunghezza con la retta *DE* che si è assunta come razionale.

Dunque, la retta *DG* [$= DM + MG$] è una quinta binomiale (X, deff. seconde, V). - C.D.D.

APPLICA: I, 44-45; X, 13, 18, 20, 22, 36, 40.

È APPLICATA IN: X, 72 scolio.

PROPOSIZIONE 65.

Il quadrato di una retta [irrazionale] « potenziante la somma di due aree mediali », se applicato ad una retta razionale, forma [un rettangolo avente] per altezza una sesta binomiale.

Sia AB una retta irrazionale il cui quadrato sia uguale alla somma di due aree mediali, [cioè una retta « potenziante la somma di due aree mediali ».] e che sia divisa [nei suoi termini] in C, sia DE una retta razionale [assunta come data], e si applichi [parabolicamente] a DE il rettangolo $DEFG$, uguale al quadrato di AB (I, 44-45) e formante DG quale altezza; dico che DG è una sesta binomiale.

Infatti, si esegua la medesima costruzione già prima eseguita [cioè nelle proposizioni precedenti]. E poiché AB è una retta il cui quadrato è uguale alla somma di due aree mediali, e che è divisa [nei suoi termini] in C, si ha che AC, CB sono rette incommensurabili in potenza e tali che la somma dei loro quadrati sia un'area mediale, il rettangolo da esse compreso sia pure un'area mediale, ed infine la somma dei loro quadrati sia incommensurabile con tale rettangolo (X, 41); cosicché, secondo quanto è stato avanti dimostrato, ciascuno dei due rettangoli $DELM$, $MLFG$ è area mediale. E ciascuno di essi è applicato alla retta razionale DE; perciò ognuna delle due rette DM, MG è razionale ed incommensurabile in lunghezza con DE (X, 22). E poiché la somma $a^2 + b^2$ dei quadrati di AC, CB è incommensurabile [col rettangolo ab di AC, CB e quindi anche] col doppio $2ab$ del rettangolo di AC, CB, il rettangolo $DELM =$ $= a^2 + b^2$ è incommensurabile col rettangolo $MLFG = 2ab$. È quindi incommensurabile pure la retta DM con la retta MG (VI, 1; X, 11); dunque DM, MG sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza, e [la loro somma] DG è così una retta binomiale.

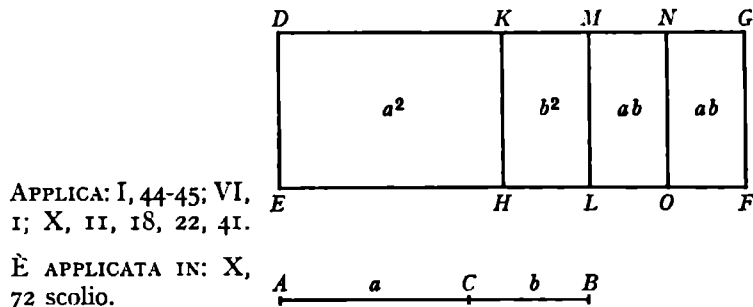
Dico adesso che è anche una sesta binomiale.

Potremo, di nuovo, similmente dimostrare [come nelle proposizioni precedenti] che il rettangolo di DK, KM è uguale al quadrato di MN e che DK è incommensurabile

in lunghezza con KM; per le stesse ragioni, allora, il quadrato di DM supera quello di MG del quadrato di una retta incommensurabile in lunghezza con DM (X, 18). Ma nessuna delle due rette DM, MG è commensurabile in lunghezza con la retta DE che si è assunta come razionale.

Dunque, la retta DG [$= DM + MG$] è una sesta binomiale (X, deff. seconde, VI). - C.D.D.

APPLICA: I, 44-45; VI, 1; X, 11, 18, 22, 41.

È APPLICATA IN: X, 72 scolio.

PROPOSIZIONE 66.

Una retta commensurabile in lunghezza con una retta binomiale è anch'essa una retta binomiale, e dello stesso ordine.

Sia AB una retta binomiale, e la retta CD sia commensurabile in lunghezza con AB; dico che CD è una binomiale e dello stesso ordine di AB.

Infatti, poiché AB è una binomiale, la si divida nei suoi termini in E, ed AE sia il termine maggiore; quindi AE, EB sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza (X, 36). Si determini CF in modo che AB stia a CD come AE sta a CF [$AB : CD = AE : CF$] (VI, 12); anche la parte rimanente EB di AB sta perciò all'altra parte rimanente FD di CD come AB sta a CD[, ossia si ricava: $AB : CD =$ $= EB : FD$] (V, 16; V, 19, coroll.). Ma AB è comm.le [in lunghezza] con CD; perciò anche AE è commensurabile [in lunghezza] con CF, ed EB è commensurabile [in lunghezza] con FD (X, 11). Ma AE, EB sono razionali; sono quindi razionali pure CF, FD. Si ha inoltre [dalle due proporzioni

sopra scritte] che AE sta a CF come EB sta a FD [$AE : CF = EB : FD$] (V, 11). Quindi, *permutando*, si ha che AE sta ad EB come CF sta a FD [$AE : EB = CF : FD$] (V, 16). Ma AE, EB sono rette [incommensurabili in lunghezza; perciò anche CF, FD sono rette incommensurabili in lunghezza (X, 11). E dalla proporzione: $AE : EB = CF : FD$ si ricava quella fra i quadrati corrispondentemente costruiti sulle rette, cioè: $q(AE) : q(EB) = q(CF) : q(FD)$ (VI, 22). Ma poiché $AB = AE + EB$ è una retta binomiale, AE ed EB sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza, per cui $q(AE)$ è commensurabile con $q(EB)$. Quindi anche $q(CF)$ è commensurabile con $q(FD)$ (X, 11), e le due rette CF, FD sono rette commensurabili soltanto in potenza. Ma, come si è visto, sono rette razionali; dunque la loro somma CD è una retta binomiale][a] (X, 36).

Dico adesso che è del medesimo ordine di AB.

Infatti, il quadrato di AE supera quello di EB o del quadrato di una retta commensurabile con AE, o del quadrato di una retta con essa incommensurabile. Se dunque il quadrato di AE supera quello di EB del quadrato di una retta commensurabile con AE, anche il quadrato di CF supererà quello di FD del quadrato di una retta commensurabile con CF (X, 14). Ora, se AE è commensurabile [in lunghezza] con la retta che si è assunta come razionale, pure CF[, che è commensurabile in lunghezza con AE,] sarà commensurabile [in lunghezza] con essa (X, 12), e perciò ciascuna delle due rette AB, CD è in tal caso una prima binomiale, vale a dire è dello stesso ordine dell'altra (X, deff. seconde, I). Se poi è la retta EB commensurabile [in lunghezza] con quella che si è assunta come razionale, pure FD è commensurabile [in lunghezza] con essa (X, 12), e perciò, di nuovo, CD sarà dello stesso ordine di AB: infatti ciascuna delle due rette sarà una seconda binomiale (X, deff. se-

a. A questo procedimento corrisponde invece nel testo: « Ma AE, EB sono rette commensurabili soltanto in potenza; perciò anche CF, FD sono rette commensurabili soltanto in potenza (X, 11). E sono razionali; dunque CD è una binomiale (X, 36) ».

conde, II). Se, infine, nessuna delle due rette AE, EB è commensurabile con la retta che si è assunta come razionale, [pure] nessuna delle due rette CF, FD sarà con essa commensurabile [in lunghezza] (X, 13), e ciascuna delle due rette AB, CD è in tal caso una terza binomiale (X, deff. seconde, III). Ma se il quadrato di AE supera invece quello di EB del quadrato di una retta incommensurabile [in lunghezza] con AE, anche il quadrato di CF supererà quello di FD del quadrato di una retta incommensurabile [in lunghezza] con CF (X, 14). Se allora AE è commensurabile [in lunghezza] con la retta che si è assunta come razionale, pure CF è commensurabile [in lunghezza] con essa (X, 12), e ciascuna delle due rette AB, CD è una quarta binomiale (X, deff. seconde, IV). Se poi EB è commensurabile [in lunghezza con la retta che si è assunta come razionale], lo sarà pure FD, e ciascuna delle due rette AB, CD sarà una quinta binomiale (X, deff. seconde, V). Se infine nessuna delle due rette AE, EB è commensurabile [in lunghezza con la retta che si è assunta come razionale], pure nessuna delle due rette CF, FD risulta commensurabile con essa [in lunghezza], e ciascuna delle due rette AB, CD sarà una sesta binomiale (X, deff. seconde, VI).

Cosicché una retta commensurabile in lunghezza... (secondo l'enunciato). - C.D.D.

A E B

C F D

APPLICA: V, 11, 16, 19; VI, 22; X, 11, 12, 13, 14, 36.

PROPOSIZIONE 67.

Una retta commensurabile in lunghezza con una retta bimediale è anch'essa una bimediale, e dello stesso ordine.

Sia AB una retta bimediale, e la retta CD sia commensurabile in lunghezza con AB; dico che CD è una bimediale e dello stesso ordine di AB.

Infatti, poiché AB è una bimediale, la si divida nelle sue mediali in E; quindi AE, EB sono mediali commensu-

rabili soltanto in potenza (X, 37, 38). E si determini la retta *CF* [come quarta proporzionale dopo *AB*, *CD*, *AE*, cioè] tale che *AB* stia a *CD* come *AE* sta a *CF* [$AB : CD = AE : CF$] (VI, 12); anche la parte rimanente *EB* di *AB* sta perciò all'altra parte rimanente *FD* di *CD* come *AB* sta a *CD*[, ossia si ricava: $EB : FD = AB : CD$ (V, 19), da cui $AE : CF = EB : FD$ (V, 11), e *permutando*: $AE : EB = CF : FD$]. Ma *AB* è commensurabile in lunghezza con *CD*; quindi anche *AE*, *EB* sono commensurabili [in lunghezza] rispettivamente *AE* con *CF* ed *EB* con *FD* (X, 11). Ma *AE*, *EB* sono mediali; sono perciò mediali pure *CF*, *FD* (X, 23). E poiché *AE* sta ad *EB* come *CF* sta a *FD* ($AE : EB = CF : FD$], ma *AE*, *EB* sono commensurabili soltanto in potenza, pure *CF*, *FD* sono rette commensurabili soltanto in potenza[, come si è veduto nella precedente proposizione X, 66]. Ma fu dimostrato che sono anche mediali; dunque [la loro somma] *CD* è una bimediale.

Dico adesso che è anche del medesimo ordine di *AB*.

Infatti, poiché $AE : EB = CF : FD$, anche il quadrato $q(AE)$ di *AE* sta al rettangolo $r(AE, EB)$ di *AE*, *EB* come il quadrato $q(CF)$ di *CF* sta al rettangolo $r(CF, FD)$ di *CF*, *FD* (X, 21, lemma); si ha, *permutando*, che $q(AE) : q(CF) = r(AE, EB) : r(CF, FD)$ (V, 16). Ma il quadrato di *AE* è commensurabile con quello di *CF*; pure il rettangolo di *AE*, *EB* è perciò commensurabile col rettangolo di *CF*, *FD* (X, 11). Se dunque il rettangolo di *AE*, *EB* è razionale, anche il rettangolo di *CF*, *FD* è razionale e perciò *CD* è una prima bimediale (X, 37). Se invece [$r(AE, EB)$] è area mediale, è area mediale [pure l'altro rettangolo] (X, 23, coroll.), e ciascuna delle due rette *AB*, *CD* è una seconda bimediale (X, 38).

E quindi *CD* sarà dello stesso ordine di *AB*. – C.D.D.

A E B

C F D

APPLICA: V, 11, 16, 19; X, 11, 21 lemma, 23, 23 coroll., 37, 38.

PROPOSIZIONE 68.

Una retta commensurabile con una [retta irrazionale detta] « maggiore » *è anch'essa una [retta irrazionale]* « maggiore ».

Sia AB una [retta irrazionale detta] « *maggiore* », e la retta CD sia commensurabile con AB; dico che CD è una [retta irrazionale] « *maggiore* ».

Si divida AB in E; quindi AE, EB sono rette incommensurabili in potenza e tali che la somma dei loro quadrati sia un'area razionale, e sia invece area mediale il rettangolo da esse compreso (X, 39); si abbia inoltre la stessa costruzione di prima[, come eseguita nella precedente proposizione X, 67]. E poiché[, come là è stato mostrato,] si ha che AB sta a CD come AE sta a CF e come EB sta a FD [$AB : CD = AE : CF = EB : FD$], si ha anche che AE sta a CF come EB sta a FD [$AE : CF = EB : FD$] (V, 11). Ma AB è commensurabile con CD; quindi anche AE, EB sono rispettivamente commensurabili con CF, FD (X, 11). E poiché $AE : CF = EB : FD$, e, *permutando*, $AE : EB = CF : FD$ (V, 16), si ha pure, *componendo*, che $AB : EB = CD : FD$ (V, 18); quindi anche, il quadrato $q(AB)$ di AB sta al quadrato $q(EB)$ di EB come il quadrato $q(CD)$ di CD sta al quadrato $q(FD)$ di FD (VI, 22). Similmente potremo pure dimostrare[, sempre *componendo*,] che $q(AB) : q(AE) = q(CD) : q(CF)$. Quindi anche, il quadrato di AB sta alla somma dei quadrati di AE, EB come il quadrato di CD sta alla somma dei quadrati di CF, FD; {e difatti, *invertendo:* $q(EB) : q(AB) = q(FD) : q(CD)$, e: $q(AE) : q(AB) = q(CF) : q(CD)$ (V, 7, coroll.), da cui: $[q(EB) + q(AE)] : q(AB) = [q(FD) + q(CF)] : q(CD)$ (V, 24):} e si ha perciò, *permutando*, che il quadrato di AB sta al quadrato di CD come la somma dei quadrati di AE, EB sta alla somma dei quadrati di CF, FD, {ossia: $q(AB) : q(CD) = [q(EB) + q(AE)] : [q(FD) + q(CF)]$} (V, 16). Ma il quadrato di AB è commensurabile con quello di CD; è quindi commensurabile anche la somma dei quadrati di AE, EB con quella dei quadrati di CF, FD (X, 11). Ma la somma dei quadrati

di AE, EB è razionale, e raz.le è [quindi] la somma dei quadrati di CF, FD. Similmente, pure il rettangolo di AE, EB è commensurabile col rettangolo di CF, FD. Ora, il rettangolo di AE, EB è area mediale; è quindi area mediale anche il rettangolo di CF, FD (X, 23, coroll.). Perciò CF, FD sono rette incommensurabili in potenza (X, 13, 68), tali che la somma dei loro quadrati è un'area razionale, ed area mediale è invece il rettangolo da esse compreso; quindi tutta quanta [la loro somma] CD [$CD = CF + FD$] è la retta irrazionale che si chiama « *maggiore* ».

Dunque, una retta commensurabile con una [retta irrazionale] « *maggiore* »... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

A E B

C F D

APPLICA: V, 7 coroll., 11, 16, 18, 24; VI, 22; X, 11, 13, 23 coroll., 39.

PROPOSIZIONE 69.

Una retta commensurabile con una retta « potenziante un'area razionale più un'area mediale », è anch'essa una retta « potenziante un'area razionale più un'area mediale ».

Sia AB una retta il cui quadrato sia uguale alla somma di un'area razionale e di un'area mediale, [cioè « potenziante un'area razionale più un'area mediale »], e CD sia commensurabile con AB; si deve dimostrare che anche CD è una retta il cui quadrato è uguale alla somma di un'area razionale e di un'area mediale.

Si divida AB in E nelle sue rette [componenti, cioè la razionale e la mediale]; quindi AE, EB sono rette incommensurabili in potenza, tali che la somma dei loro quadrati è un'area mediale, ed area razionale è invece il rettangolo da esse compreso (X, 40); si esegua inoltre la medesima costruzione di prima[, cioè delle proposizioni X, 67 e 68]. Potremo similmente dimostrare che pure CF, FD sono rette

incommensurabili in potenza, e che la somma dei quadrati di *AE*, *EB* è commensurabile con la somma dei quadrati di *CF*, *FD*, mentre il rettangolo di *AE*, *EB* è commensurabile col rettangolo di *CF*, *FD*; cosicché è anche area mediale la somma dei quadrati di *CF*, *FD*, ed il rettangolo da esse compreso è invece un'area razionale.

Dunque, *CD* è una retta il cui quadrato è uguale alla somma di un'area razionale e di un'area mediale[, cioè una retta « potenziante un'area razionale più un'area mediale »]. - C.D.D.

A E B

C F D

APPLICA: X, 40.

PROPOSIZIONE 70.

Una retta commensurabile con una retta « potenziante la somma di due aree mediali », è una retta « potenziante la somma di due aree mediali ».

Sia *AB* una retta il cui quadrato sia uguale alla somma di due aree mediali, [cioè « potenziante la somma di due aree mediali »], e *CD* sia commensurabile con *AB*; si deve dimostrare che anche *CD* è una retta il cui quadrato è uguale alla somma di due aree mediali.

Infatti, poiché *AB* è una retta il cui quadrato è uguale alla somma di due aree mediali, la si divida in *E* nelle sue rette [componenti, cioè le due mediali]; quindi *AE*, *EB* sono rette incommensurabili in potenza e tali che la somma dei loro quadrati è un'area mediale, mediale il rettangolo da esse compreso, ed infine la somma dei quadrati di *AE*, *EB* è incommensurabile col rettangolo di *AE*, *EB* (X, 41); si esegua inoltre la medesima costruzione di prima[, cioè delle proposizioni precedenti X, 67, 68 e 69]. Potremo similmente dimostrare che pure *CF*, *FD* sono rette incommensurabili in potenza, che la somma dei quadrati di *AE*, *EB* è commensurabile con quella dei quadrati di *CF*, *FD*, e che il rettangolo di *AE*, *EB* è commensurabile col rettangolo di

CF, *FD*; cosicché si ha pure che la somma dei quadrati di *CF*, *FD* è un'area mediale, è anche mediale il rettangolo di *CF*, *FD*, ed infine la somma dei quadrati di *CF*, *FD* è incommensurabile col rettangolo di *CF*, *FD*.

Dunque, *CD* è una retta il cui quadrato è uguale alla somma di due aree mediali[, cioè una retta « potenziante la somma di due aree mediali »]. - C.D.D.

A *E* *B*

C *F* *D*

APPLICA: X, 41.

PROPOSIZIONE 71.

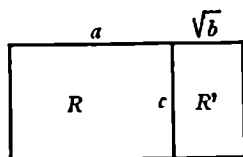
Se si sommano un'area razionale ed un'area mediale, si originano quattro rette irrazionali, [ossia il quadrato uguale alla somma in questione ha per lato una di quattro rette irrazionali,] e cioè o una binomiale, od una prima bimediale, od una « maggiore », *od una « potenziante un'area razionale più un'area mediale »* [31].

Sia *ACBM* un'area razionale e *CNDB* sia invece un'area mediale; dico che una retta, il cui quadrato sia uguale al-

[31] Nelle proposizioni X, 71 e X, 72 Euclide mostra che un'altra relazione intercorre tra le varie rette irrazionali: questa volta la relazione viene ottenuta direttamente attraverso le aree.

Nella X, 71 si considera un'area (che possiamo supporre rettangolare) formata dalla somma di un'area razionale e di un'area mediale. Per ottenerla basta considerare due rette razionali a, c comm.li in lunghezza come lati di un rettangolo R, poi considerare un secondo rettangolo R', avente per dimensioni uno dei lati di R (ad esempio c) ed una retta $\sqrt{b}$ razionale e incomm.le in lunghezza con c, quindi comm.le con questa soltanto in potenza. Allora il rettangolo R è area razionale, mentre il rettangolo R' è area mediale.

L'area considerata è quella $R + R'$.

Se si costruisce un quadrato equivalente al rettangolo-somma $(R + R')$,

l'area *ANDM*, [cioè all'area-somma,] o è una binomiale, od una prima bimediale, od una «*maggiore*», od una retta il cui quadrato sia uguale alla somma di un'area razionale e

quale specie di linea sarà il lato di tale quadrato? È questa la domanda che Euclide si pone nella X, 71.

E la risposta contiene quattro alternative. E cioè:

1) Euclide suppone dapprima che l'area razionale sia maggiore dell'area mediale.

Assumendo come unità la lunghezza della retta razionale c, altezza comune dei due rettangoli R, R', la somma dei due rettangoli verrà espressa, nei nostri simboli, da:

$$a + \sqrt{b}$$

L'ipotesi fatta è che sia:

$$a > \sqrt{b} \quad \text{ossia:} \quad a^2 > b$$

Ma ora, fermo restando che l'area razionale sia maggiore di quella mediale, Euclide formula un'altra ipotesi: che il quadrato di a superi il quadrato di $\sqrt{b}$ del quadrato di una retta comm.le in lunghezza con a.

Ciò per noi vale quanto dire che: $a^2 - b = \left(\frac{m}{n} a\right)^2$ ossia che la differenza $a^2 - b$ deve essere il quadrato di un numero razionale.

Ecco dunque che le due condizioni che supponiamo soddisfatte in questo primo caso si riducono ad una sola: che $a^2 - b$ sia il quadrato di un numero razionale.

Ebbene: in questo caso il lato del quadrato equivalente al rettangolo-somma è una retta binomiale. Infatti, se poniamo:

$$a + \sqrt{b} = (\sqrt{c} + \sqrt{d})^2$$

troviamo:

$$\begin{cases} c + d = a \\ cd = \dfrac{b}{4} \end{cases}$$

I valori di c, d vengono dati dunque dall'equazione:

$$z^2 - az + \frac{b}{4} = 0$$

e le radici sono razionali se $\Delta = a^2 - b$ è il quadrato di un numero razionale. Ma questa è appunto l'ipotesi fatta, sicché effettivamente $\sqrt{c} + \sqrt{d}$ rappresenta una retta binomiale.

2) Supponiamo ora che, pur essendo $a^2 > b$ la differenza $a^2 - b$ non sia il quadrato di un numero razionale. In tal caso le due radici dell'equazione di secondo grado soprascritte sono irrazionali della forma:

$$c = m + \sqrt{n} \; ; \; d = m - \sqrt{n}$$

di un'area mediale[, ossia « potenziante un'area razionale più un'area mediale »].

Infatti, o l'area *ACBM* è maggiore dell'area *CNDB*, o è minore. Dapprima, sia maggiore; si assuma come data la retta razionale *EF*, si applichi [parabolicamente] ad *EF* il rettangolo *EFGH*, uguale ad *ACBM* (I, 44-45) e formante *EH* quale altezza, e pure [ad *HG* uguale] ad *EF* si applichi poi [parabolicamente] il rettangolo *HGLK*, uguale a *CNDB*

e precisamente:

$$c = \frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}\ ; \quad d = \frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}$$

sicché risulta:

$$a + \sqrt{b} = \left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}\right)^2$$

dove i radicali doppi sono ineliminabili, essendosi supposto che $a^2 - b$ non sia il quadrato di un numero razionale.

Ci si trova dunque di fronte alla somma di due rette incomm.li anche in potenza; la somma dei loro quadrati è un'area razionale $\left(\text{è } \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a\right)$ mentre il loro rettangolo è area mediale (è $\sqrt{b}/2$). La somma di tali due rette è dunque la linea irrazionale detta *maggiore* (X, 39).

Quindi in questa seconda ipotesi il quadrato equivalente al rettangolo-somma ha per lato la retta irrazionale detta *maggiore*.

Ciò si vede anche, coi nostri simboli, osservando che il quadrato della somma dei due radicali doppi è proprio uguale ad $a + \sqrt{b}$. Cioè tutto si riduce alla scrittura:

$$a + \sqrt{b} = \left(\sqrt{a + \sqrt{b}}\right)^2$$

dove al primo membro abbiamo la somma di un'area razionale e di un'area mediale, mentre al secondo membro abbiamo il quadrato di una linea *maggiore*.

3) Sia ora $a < \sqrt{b}$ cioè $b > a^2$.

E dapprima sia $b - a^2$ il quadrato di un numero razionale. È facile verificare che in questo caso si ha:

$$a + \sqrt{b} = \left(\sqrt{c\sqrt{d}} + \sqrt{e\sqrt{d}}\right)^2$$

dove al secondo membro si ha il quadrato di una retta prima bimediale.

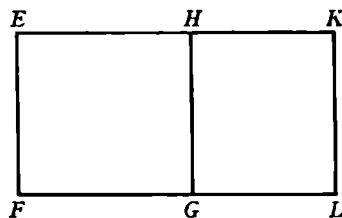
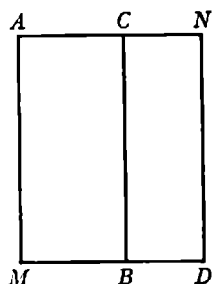
4) Se poi è $a < \sqrt{b}$ e inoltre $b - a^2$ non è il quadrato di un numero razionale si ha al secondo membro il quadrato di quella retta irrazionale che vien chiamata « *retta potenziante la somma di un'area razionale e un'area mediale* ».

e formante *HK* per altezza. E poiché l'area *ACBM* è razionale [per ipotesi] ed è uguale ad *EFGH*, anche *EFGH* è area razionale. Ora, si è applicata l'area *EFGH* alla retta razionale *EF*, risultando così l'altezza *EH*; quindi *EH* è una retta razionale e commensurabile in lunghezza con *EF* (X, 20). Di nuovo, poiché l'area *CNDB* è mediale [per ipotesi] ed è uguale a *HGLK*, anche l'area *HGLK* è mediale. Ed è applicata alla retta razionale [*HG* uguale ad] *EF*, risultando *HK* quale altezza; perciò *HK* è razionale ed incommensurabile in lunghezza con *EF* (X, 22). E poiché l'area *CNDB* è mediale, e quella *ACBM* è razionale, *ACBM* è incommensurabile con *CNDB*; cosicché pure *EFGH* è incommensurabile con *HGLK*. Ma *EFGH* sta a *HGLK* come *EH* sta a *HK* [$EFGH : HGLK = EH : HK$] (VI, 1); perciò anche *EH*, *HK* sono incommensurabili[, ossia incommensurabili] in lunghezza (X, 11). E sono ambedue rette razionali; quindi *EH*, *HK* sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza, e [la loro somma] *EK* è una retta binomiale, divisa nei suoi termini in *H* (X, 36). E poiché l'area *ACBM* è [stata supposta] maggiore di quella *CNDB*, ma *ACBM* è uguale ad *EFGH*, mentre *CNDB* è uguale a *HGLK*, anche *EFGH* è maggiore di *HGLK*; pure la retta *EH* è quindi maggiore della retta *HK* (VI, 1; V, def. V). Il quadrato di *EH*, dunque, o supera allora quello di *HK* del quadrato di una retta commensurabile in lunghezza con *EH*, oppure lo supera del quadrato di una retta incommensurabile con *EH*. Lo superi, dapprima, del quadrato di una retta commensurabile con *EH*; ma *EH* maggiore di *HK* è commensurabile con la retta *EF* che si è assunta come razionale; quindi *EK* [$= EH + HK$] è una prima binomiale (X, deff. seconde, I). Ma *EF* è razionale; e se un'area è compresa da una retta razionale e da una prima binomiale, la retta il cui quadrato sia uguale all'area in questione è una binomiale (X, 54). Perciò la retta il cui quadrato è uguale all'area *EFLK* è una binomiale, cosicché anche quella il cui quadrato sia uguale all'area *AMDN* è una binomiale. Ma sia ora il caso in cui il quadrato di *EH* superi quello di *HK*

del quadrato di una retta incommensurabile con *EH*; la retta *EH* d'altronde, maggiore di *HK*, è commensurabile in lunghezza con la retta *EF* che si è assunta come razionale; quindi *EK* è una quarta binomiale (X, deff. seconde, IV). Ma *EF* è razionale; e se un'area è compresa da una retta razionale e da una quarta binomiale, la retta il cui quadrato sia uguale all'area in questione è l'irrazionale che si chiama «*maggiore*» (X, 57). Perciò una retta il cui quadrato sia uguale all'area *EFLK* è una «*maggiore*», cosicché pure quella il cui quadrato sia uguale all'area *AMDN* è una «*maggiore*».

Ma sia adesso il caso in cui l'area *ACBM* è invece minore dell'area *CNDB*; anche l'area *EFGH* è quindi minore di quella *HGLK*, cosicché pure *EH* è minore di *HK* (VI, 1; V, def. V). Ora, o il quadrato di *HK* supera quello di *EH* del quadrato di una retta commensurabile con *HK*, od esso supera quello di *EH* del quadrato di una retta incommensurabile con *HK*. Dapprima, lo superi del quadrato di una retta commensurabile in lunghezza con *HK*; la minore *EH* è d'altra parte commensurabile in lunghezza con la retta *EF* che si è assunta come razionale; quindi *EK* è una seconda binomiale (X, deff. seconde, II). Ma *EF* è razionale; e se un'area è compresa da una retta razionale e da una seconda binomiale, la retta il cui quadrato sia uguale all'area in questione è una prima bimediale (X, 55). Perciò una retta il cui quadrato sia uguale all'area *EFLK* è una prima bimediale, cosicché pure quella il cui quadrato sia uguale all'area *AMDN* è una prima bimediale. Ma sia adesso il caso in cui il quadrato di *HK* superi quello di *EH* del quadrato di una retta incommensurabile con *HK*. La minore *EH* è d'altra parte commensurabile con la retta *EF* che si è assunta come razionale; quindi *EK* è una quinta binomiale (X, deff. seconde, V). Ma *EF* è razionale; e se un'area è compresa da una retta razionale e da una quinta binomiale, la retta il cui quadrato sia uguale all'area in questione è una retta «potenziante un'area razionale più un'area mediale» (X, 58). Perciò una retta il cui quadrato sia uguale all'area *EFLK* è una il cui quadrato è uguale alla somma di un'area razio-

nale e di un'area mediale, cosicché pure quella il cui quadrato sia uguale all'area *AMDN* è una retta il cui quadrato è uguale alla somma di un'area razionale e di un'area mediale[, cioè sono tutt'e due « potenzianti un'area razionale più un'area mediale »].

Dunque, se si sommano un'area razionale ed un'area mediale... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 44-45; VI, 1; X, 11, 20, 22, 54, 55, 57, 58.

PROPOSIZIONE 72.

Se si sommano due aree mediali incommensurabili fra loro, si originano le rimanenti due rette irrazionali[, *ossia il quadrato uguale alla somma in questione ha per lato una delle due rimanenti rette irrazionali*], *e cioè od una seconda bimediale, od una retta « potenziante la somma di due aree mediali »*.

Infatti, si sommino le due aree mediali *ACBM*, *CNDB*, incommensurabili fra loro; dico che una retta il cui quadrato sia uguale all'area[-somma] *ANDM* è una seconda bimediale, od una retta « potenziante la somma di due aree mediali ».

L'area *ACBM* è difatti o maggiore di quella *CNDB*, od è minore. Supponiamo dapprima che *ACBM* sia maggiore di *CNDB*, si assuma come data la retta razionale *EF*, si applichi [parabolicamente] ad *EF* il rettangolo *EFGH*, uguale ad *ACBM* e formante *EH* quale altezza (I, 44-45), e si applichi poi ad [*HG* =] *EF* il rettangolo *HGLK*, uguale

a *CNDB* e formante *HK* quale altezza. Ora, poiché ciascuna delle due aree *ACBM*, *CNDB* è mediale [per ipotesi], è pure mediale ciascuna delle due aree *EFGH*, *HGLK* [ad esse rispettivamente uguali]. E quest'ultime sono applicate alla retta razionale *EF*, e formano le altezze *EH*, *HK*; quindi ciascuna delle due rette *EH*, *HK* è razionale ed incommensurabile in lunghezza con *EF* (X, 22). E poiché l'area *ACBM* è [per ipotesi] incommensurabile con l'area *CNDB*, ma *ABCM* è uguale ad *EFGH*, mentre *CNDB* è uguale a *HGLK*, anche *EFGH* è così incommensurabile con *HGLK*. Ma *EFGH* sta a *HGLK* come *EH* sta a *HK* [$EFGH : HGLK = EH : HK$] (VI, 1); perciò *EH* è incommensurabile in lunghezza con *HK* (X, 11). Quindi *EH*, *HK* sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza, e [la loro somma] *EK* è una binomiale (X, 36). Ma *EH* o è una retta il cui quadrato supera quello di *HK* del quadrato di una retta commensurabile con *EH*, oppure il suo quadrato supera quello di *HK* del quadrato di una retta con *EH* incommensurabile. Dapprima, il suo quadrato superi quello di *HK* del quadrato di una retta commensurabile con *EH*; ora, nessuna delle due rette *EH*, *HK* è commensurabile in lunghezza[, come è stato sopra mostrato,] con la retta *EF* che si è assunta come razionale; perciò [la loro somma] *EK* è una terza binomiale (X, deff. seconde, III). Ma *EF* è razionale; e se un'area è compresa da una retta razionale e da una terza binomiale, la retta il cui quadrato sia uguale all'area in questione è una seconda bimediale[, ossia: il quadrato ad essa uguale ha per lato una seconda bimediale] (X, 56); quindi una retta il cui quadrato sia uguale all'area *EFLK*, vale a dire all'area *ANDM*, è una seconda bimediale (X, 56). Ma sia invece il caso in cui il quadrato di *EH* supera quello di *HK* del quadrato di una retta incommensurabile in lunghezza con *EH*; ora, ciascuna delle due rette *EH*, *HK* è incommensurabile in lunghezza con *EF*; quindi [la loro somma] *EK* è una sesta binomiale (X, deff. seconde, VI). Ma se un'area è compresa da una retta razionale e da una sesta binomiale, il quadrato ad essa uguale ha per lato una retta

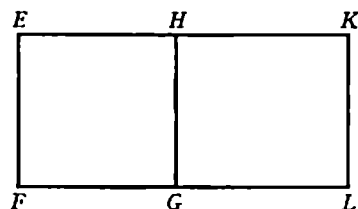
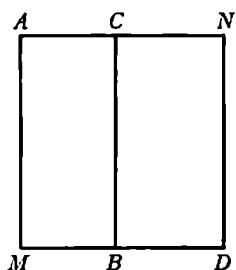
irrazionale « potenziante la somma di due aree mediali » (X, 59); cosicché pure quella il cui quadrato sia uguale all'area *ANDM* è una retta il cui quadrato è uguale alla somma di due aree mediali.

Dunque, se si sommano due aree mediali incommensurabili fra loro... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 44-45; VI, 1; X, 11, 36, 56, 59.

Una binomiale e le rette irrazionali che da essa derivano non sono uguali né ad una mediale né fra loro[a]. Infatti, il quadrato di una mediale, se applicato ad una retta razionale, forma [un rettangolo avente] per altezza una retta razionale ed incommensurabile in lunghezza con quella a cui è applicato (X, 22). Il quadrato di una binomiale, poi, se applicato ad una retta razionale, forma [un rettangolo avente] per altezza una prima binomiale (X, 60). Il quadrato di una prima bimediale, se applicato ad una retta razionale, forma [un rettangolo avente] per altezza una seconda binomiale (X, 61). Il quadrato di una seconda bimediale, se applicato ad una retta razionale, forma [un rettangolo avente] per altezza una terza binomiale (X, 62). Il quadrato di una *maggiore*, se applicato ad una retta razionale, forma [un rettangolo avente] per altezza una quarta binomiale (X, 63). Il quadrato di una retta « potenziante un'area razionale più un'area mediale », se applicato ad una retta razionale, forma [un rettangolo avente] per altezza una quinta binomiale (X, 64). Infine, il quadrato di una retta « potenziante la somma di due aree mediali », se applicato ad una retta razionale, forma [un rettangolo avente] per altezza una sesta binomiale (X, 65). Ora, le suddette altezze differiscono dalla prima altezza e fra loro, dalla prima perché

a. Letteralmente è il solito *non sono le stesse di una mediale, né fra loro*.

è razionale, fra loro perché non sono dello stesso ordine; cosicché pure le rette irrazionali, che a quelle altezze corrispondono, differiscono fra loro [a].

APPLICA: X, 22, 60, 61, 62, 63, 64, 65.

a. Letteralmente: pure le stesse (rette) irrazionali differiscono fra loro.

NOTA SULLA SECONDA PARTE DEL LIBRO DECIMO

Con la X, 73 comincia la seconda parte del libro decimo, la quale, come è stato più volte avvertito, è fondamentalmente simmetrica rispetto alla prima parte, intendendo qui per prima parte quella che ha inizio con la X, 36, nella quale si introduce la *retta binomiale*.

La prima parte si riferisce al segno *più*, cioè all'addizione: la seconda al segno *meno*, cioè alla sottrazione.

Ci limitiamo, perciò, a stabilire una corrispondenza tra le proposizioni più importanti della prima parte e della seconda, rimandando, per il commento, alle note che a più riprese si trovano nella prima parte.

L'unica linea irrazionale che non entra in questo processo di simmetria è la retta mediale (X, 21): ma essa, così come le rette razionali, è elemento costitutivo, per addizione o per sottrazione, di linee irrazionali rispettivamente della prima o della seconda parte.

Proposizioni del libro decimo.

36: binomiale (definiz.).	73: apotome (def.).
37: prima bimediale (def.).	74: prima apotome di mediale (def.).
38: seconda bimediale (def.).	75: seconda apotome di mediale (def.).
39: « maggiore » (def.).	76: « minore » (def.).
40: potenziante spazio razionale più spazio mediale (def.).	77: potenziante la differenza tra spazio mediale e spazio razionale (def.).
41: potenziante la somma di due spazi mediali (def.).	78: potenziante la differenza tra due spazi mediali (def.)
42: univocità della generazione della binomiale.	79: univocità della generazione dell'apotome.
43: univocità della generazione della prima bimediale.	80: univocità della generazione della prima apotome di mediale.
44: univocità della generazione della seconda bimediale.	81: univocità della generazione della seconda apotome di mediale.

45: univocità della generazione della « maggiore ».
46: univocità della generazione della retta potenziante uno spazio razionale più uno spazio mediale.

47: univocità della generazione della retta potenziante la somma di due spazi mediali

82: univocità della generazione della « minore ».
83: univocità della generazione della retta potenziante la differenza tra uno spazio mediale ed uno spazio razionale.
84: univocità della generazione della retta potenziante la differenza tra due spazi mediali.

Seconda serie di definizioni (binomiale prima, seconda, terza, quarta, quinta, sesta).

48: costruire una prima binomiale.
49: costruire una seconda binomiale.
50: costruire una terza binomiale.
51: costruire una quarta binomiale.
52: costruire una quinta binomiale.
53: costruire una sesta binomiale.
54: il rettangolo di una retta razionale e di una prima binomiale è uguale al quadrato di una retta binomiale.
55: il rettangolo di una raz. e di una seconda binomiale è uguale al quadrato di una prima bimediale.
56: il rettangolo di una raz. e di una terza binomiale è uguale al quadrato di una seconda bimediale.
57: il rettangolo di una raz. e di una quarta binomiale è

Terza serie di definizioni (apotome prima, seconda, terza, quarta, quinta, sesta).

85: costruire una prima apotome.
86: costruire una seconda apotome.
87: costruire una terza apotome.
88: costruire una quarta apotome.
89: costruire una quinta apotome.
90: costruire una sesta apotome.
91: il rettangolo di una retta razionale e di una prima apotome è uguale al quadrato di una apotome.
92: il rettangolo di una raz. e di una seconda apotome è uguale al quadrato di una prima apotome di mediale.
93: il rettangolo di una raz. e di una terza apotome è uguale al quadrato di una seconda apotome di mediale.
94: il rettangolo di una raz. e di una quarta apotome è

uguale al quadrato di una « maggiore ».

58: il rettangolo di una raz. e di una quinta binomiale è uguale al quadrato di una « potenziante spazio raz. più spazio mediale ».

59: il rettangolo di una raz. e di una sesta binomiale è uguale al quadrato di una « potenziante la somma di due spazi mediali ».

60: il quadrato di una retta binomiale, applicato ad una retta razionale, dà per altezza una prima binomiale.

61: il quadrato di una prima bimediale, applicato ad una retta razionale, dà per altezza una seconda binomiale.

62: il quadrato di una seconda bimediale, applicato ad una retta razionale, dà per altezza una terza binomiale.

63: il quadrato di una retta « maggiore », applicato ad una retta razionale, dà per altezza una quarta binomiale.

64: il quadrato di una « potenziante area raz. più area mediale », applicato ad una retta raz., dà per altezza una quinta binomiale.

65: il quadrato di una « potenziante la somma di due aree mediali », applicato ad una retta raz., dà per altezza una sesta binomiale.

uguale al quadrato di una « minore ».

95: il rettangolo di una raz. e di una quinta apotome è uguale al quadrato di una « potenziante spazio mediale meno spazio razionale ».

96: il rettangolo di una raz. e di una sesta apotome è uguale al quadrato di una « potenziante la differenza tra due spazi mediali ».

97: il quadrato di un'apotome, applicato ad una retta razionale, dà per altezza una prima apotome.

98: il quadrato di una prima apotome di mediale, applicato a una retta raz. dà per altezza una seconda apotome.

99: il quadrato di una seconda apotome di mediale, applicato a una retta raz., dà per altezza una terza apotome.

100: il quadrato di una retta « minore », applicato a una retta raz., dà per altezza una quarta apotome.

101: il quadrato di una « potenziante area mediale meno area raz. », dà per altezza una quinta apotome.

102: il quadrato di una « potenziante la differenza tra due aree mediali, applicato a una retta raz., dà per altezza una sesta apotome.

66: una retta comm.le in lunghezza con una binomiale è una binomiale dello stesso ordine.

67: una retta comm.le in lunghezza con una bimediale è una bimediale dello stesso ordine.

68: una retta comm.le con una « maggiore » è una « maggiore ».

69: una retta comm.le con una « potenziante un'area raz. più un'area mediale » è una retta irrazionale dello stesso genere.

70: una retta comm.le con una « potenziante la somma di due aree mediali » è una retta irrazionale dello stesso genere.

71: il quadrato uguale alla somma di un'area raz. e di una area mediale ha per lato o una binomiale, o una prima bimediale o una « maggiore » o una « potenziante una area raz. più un'area mediale ».

72: il quadrato uguale alla somma di due aree mediali tra loro incomm.li ha per lato o una seconda bimediale o una « potenziante la somma di due aree mediali ».

103: una retta comm.le in lunghezza con un'apotome è una apotome dello stesso ordine.

104: una retta comm.le con una apotome di mediale è una apotome di mediale dello stesso ordine.

105: una retta comm.le con una « minore » è una « minore ».

106: una retta comm.le con una « potenziante la differenza tra un'area mediale ed una area raz. » è una retta irrazionale dello stesso genere.

107: una retta comm.le con una « potenziante la differenza tra due aree mediali », è una retta irrazionale dello stesso genere.

108: il quadrato uguale alla differenza tra un'area raz. ed un'area mediale ha per lato o un'apotome o una « minore ».

109: il quadrato uguale alla differenza tra un'area mediale e un'area raz. ha per lato o una prima apotome di mediale o una «potenziante la differenza tra un'area mediale e un'area raz.».

110: il quadrato uguale alla differenza tra due aree mediali incomm.li tra loro, ha per lato o una seconda apotome di mediale o una « potenziante la differenza tra due aree mediali ».

A. F.

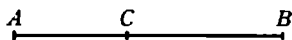
PROPOSIZIONE 73.

Se da una retta razionale si sottrae un'altra retta razionale che sia commensurabile con la prima[a] *soltanto in potenza, la parte che della prima rimane è una retta irrazionale: si chiami apotome*[b].

Infatti, dalla retta razionale AB si sottragga la retta razionale CB, che sia commensurabile soltanto in potenza con tutta quanta AB; dico che la parte rimanente AC è una retta irrazionale: sia chiamata *apotome*[c].

Poiché AB è difatti incommensurabile in lunghezza con CB, ed AB sta a CB come il quadrato di AB sta al rettangolo di AB, CB [$AB : CB = q(AB) : r(AB, CB)$] (X, 21, lemma), il quadrato di AB è incommensurabile col rettangolo di AB, CB (X, 11). Ma la somma $q(AB) + q(CB)$ dei quadrati di AB, CB è commensurabile col quadrato $q(AB)$ di AB (X, 15), mentre col rettangolo $r(AB, CB)$ di AB, CB è commensurabile il doppio $2r(AB, CB)$ del rettangolo in questione (X, 6). [Quindi la somma dei due quadrati è incommensurabile col suddetto doppio rettangolo.] E poiché la somma dei quadrati di AB, CB è uguale alla somma del doppio del rettangolo di AB, CB e del quadrato di AC [$q(AB) + q(CB) = 2r(AB, CB) + q(AC)$] (II, 7), si ha che la somma $q(AB) + q(CB)$ è incommensurabile pure col quadrato rimanente $q(AC)$ di AC (X, 16). Ma la somma dei quadrati di AB, CB è un'area razionale [essendo per ipotesi razionali le rette AB, CB]; dunque la retta AC[, il quadrato della quale è incommensurabile con un'area razionale,] è una retta irrazionale (X, def. IV), e sia chiamata apotome. – C.D.D.

A C B

APPLICA: II, 7; X, 11, 15, 16, 21 lemma.

È APPLICATA IN: X, 75, 78, 79, 81, 84, 85, 86, 87, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 108, 109, 110, 111, 112, 113; XIII, 11.

a. Letteralmente: con la tutta quanta, con l'intiera.

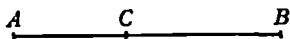
b. Letteralmente: la (retta) restante è irrazionale; e la si chiami apotome.

c. Letteralmente: la (retta) rimanente AC è quella irrazionale che si chiama apotome.

PROPOSIZIONE 74.

Se da una retta mediale si sottrae un'altra retta mediale che sia commensurabile con la prima soltanto in potenza, e che, insieme alla prima, comprenda un'area razionale, la parte rimanente della prima è una retta irrazionale: si chiami prima apotome di mediale.

Infatti, dalla retta mediale AB si sottragga un'altra retta mediale CB, che sia commensurabile soltanto in potenza con AB e che, insieme ad AB, formi il rettangolo razionale $r(AB, CB)$ di AB, CB; dico che la parte rimanente AC è una retta irrazionale: sia chiamata *prima apotome di mediale.*

Poiché difatti AB, CB sono rette mediali, pure i quadrati $q(AB)$, $q(CB)$ di AB, CB sono aree mediali. Ora, il doppio del rettangolo di AB, CB è razionale[, essendo razionale $r(AB, CB)$]; perciò la somma $q(AB) + q(CB)$ dei quadrati di AB, CB è incommensurabile col doppio $2r(AB, CB)$ del rettangolo di AB, CB; [e poiché si ha: $q(AB) + q(CB) = 2r(AB, CB) + q(AC)$ (II, 7),] si ha quindi che $2r(AB, CB)$ è incommensurabile pure col rimanente quadrato $q(AC)$ di AC, dato che, se la somma di due grandezze è incommensurabile con una delle grandezze componenti [a], pure tali grandezze prese inizialmente[, cioè in questo caso le due grandezze componenti $2r(AB, CB)$ e $q(AC)$,] saranno incommensurabili (X, 16). Ma $2r(AB, CB)$ è razionale; perciò il quadrato di AC è irrazionale; dunque AC è una retta irrazionale (X, def. IV): sia chiamata *prima apotome di mediale.* - C.D.D.

APPLICA: II, 7; X, 16.

È APPLICATA IN: X, 80, 92, 98, 104.

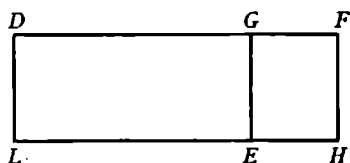
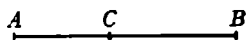
a. Letteralmente sarebbe: « se la (grandezza presa) tutta quanta è incommensurabile con una di esse, pure le grandezze inizialmente poste (cioè, le componenti) saranno incommensurabili ».

PROPOSIZIONE 75.

Se da una retta mediale si sottrae un'altra retta mediale che sia commensurabile con la prima soltanto in potenza, e che, insieme alla prima, comprenda un'area mediale, la parte rimanente della prima è una retta irrazionale: si chiami seconda apotome di mediale.

Infatti, dalla retta mediale *AB* si sottragga un'altra retta mediale *CB*, che sia commensurabile soltanto in potenza con tutta quanta *AB* e che, insieme all'intiera retta *AB*, comprenda il rettangolo mediale *r*(*AB*, *CB*) di *AB*, *CB* (X, 28); dico che la rimanente *AC* è una retta irrazionale: sia chiamata *seconda apotome di mediale.*

Si assuma difatti come data la retta razionale *DL*, e si applichi [parabolicamente] a *DL* il rettangolo *DLEG*, uguale alla somma *q*(*AB*) + *q*(*CB*) dei quadrati di *AB*, *CB* e formante *DG* quale altezza (I, 44-45); si applichi inoltre a *DL* il rettangolo *DLHF*, uguale al doppio 2*r*(*AB*, *CB*) del rettangolo di *AB*, *CB* e formante *DF* quale altezza; perciò il rettangolo *FHEG* che rimane è uguale al quadrato di *AC* (II, 7). Ora, poiché i quadrati di *AB*, *CB* sono aree mediali e commensurabili fra loro, anche [la loro somma] *DLEG* è area mediale (X, 15 e 23 coroll.). E [la suddetta somma di quadrati] è applicata alla retta razionale *DL*, venendo così a formare l'altezza *DG*; quindi *DG* è razionale ed incommensurabile in lunghezza con *DL* (X, 22). Di nuovo, poiché il rettangolo *r*(*AB*, *CB*) è area mediale, anche il doppio 2*r*(*AB*, *CB*) del rettangolo in questione è area mediale (X, 23, coroll.). Ma esso è uguale a *DLHF*; perciò anche *DLHF* è area mediale. E *DLHF* è applicato alla retta razionale *DL*, formando l'altezza *DF*; quindi *DF* è razionale ed incommensurabile in lunghezza con *DL* (X, 22). E poiché *AB*, *CB* sono commensurabili soltanto in potenza, *AB* è incommensurabile in lunghezza con *CB*; pure il quadrato *q*(*AB*) è perciò incommensurabile col rettangolo *r*(*AB*, *CB*) (X, 21, lemma; X, 11). Ma la somma *q*(*AB*) + *q*(*CB*) dei quadrati di *AB*, *CB* è commensurabile con *q*(*AB*) (X, 15), mentre

col rettangolo $r(AB, CB)$ è commensurabile il doppio $2r(AB, CB)$ del rettangolo di *AB*, *CB* (X, 6); quindi $2r(AB, CB)$ è incommensurabile con la somma $q(AB) + q(CB)$ (X, 13). Ma il rettangolo *DLEG* è uguale alla somma dei quadrati di *AB*, *CB*, mentre il rettangolo *DLHF* è uguale al doppio del rettangolo di *AB*, *CB*; perciò *DLEG* è incommensurabile con *DLHF*. Ma *DLEG* sta a *DLHF*[, cioè l'un rettangolo sta all'altro,] come la retta *DG* sta alla retta *DF* (VI, 7); quindi *DG* è incommensurabile [in lunghezza] con *DF* (X, 11). E sono ambedue razionali; perciò *DG*, *DF* sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza, e *FG* è dunque un'apotome (X, 73). Ma *DL* [uguale a *FH*] è razionale; ora, un'area compresa da una retta razionale, [*FH*,] e da una irrazionale, [*FG*,] è irrazionale (deduzione da X, 20), ed una retta il cui quadrato sia uguale all'area in questione, [cioè *FGEH* in questo caso,] è irrazionale. Ma il quadrato di *AC* è uguale all'area *FGEH*; dunque *AC* è una retta irrazionale (X, def. IV): sia chiamata *seconda apotome di mediale*. – C.D.D.

APPLICA: I, 44-45; II, 7; VI, 1; X, 6, 11, 13, 15, 20, 22, 23 coroll., 73.

È APPLICATA IN: X, 81, 93, 99, 104.

PROPOSIZIONE 76.

Se da una retta se ne sottrae un'altra che sia con essa incommensurabile in potenza [a], *e tale che la somma dei rispettivi quadrati sia area razionale, ed area mediale, invece, il rettangolo da esse compreso, la parte rimanente della prima è una retta irrazionale: si chiami* « minore ».

Infatti, dalla retta *AB* si sottragga la retta *CB*, incommensurabile con essa in potenza e tale da soddisfare alle

a. È sempre, naturalmente, « incommensurabile in potenza con la (retta) tutta quanta ».

condizioni sopra enunciate[a] (X, 33). Dico che la parte rimanente AC è una retta irrazionale: sia chiamata «*minore*».

Poiché la somma dei quadrati di AB, CB è difatti razionale, mentre il doppio del rettangolo di AB, CB è mediale, la somma dei quadrati di AB, CB è incommensurabile col doppio del rettangolo di AB, CB; e poiché $q(AB) + q(CB) = 2r(AC, CB) + q(AC)$ (II, 7), si ha che la somma $q(AB) + q(CB)$ è incommensurabile col quadrato $q(AC)$ di AC (X, 16)[b]. Ma la somma dei quadrati di AB, CB è razionale; è quindi irrazionale il quadrato di AC; dunque AC è una retta irrazionale (X, def. IV): sia chiamata *minore*. – C.D.D.

APPLICA: II, 7; X, 16, 33.

È APPLICATA IN: X, 82, 94, 100, 105.

PROPOSIZIONE 77.

Se da una retta se ne sottrae un'altra che sia con essa incommensurabile in potenza, e tale che la somma dei rispettivi quadrati sia area mediale, ed area razionale, invece, il rettangolo da esse compreso[c], *la parte rimanente della prima è una retta irrazionale: sia chiamata «retta potenziante la differenza fra un'area mediale ed un'area razionale»*[d].

Infatti, dalla retta AB si sottragga la retta CB, incommensurabile con essa in potenza e tale da soddisfare alle condizioni sopra enunciate (X, 34); dico che la parte rimanente AC è la retta irrazionale suindicata.

a. Letteralmente: producente (cioè: e tale da dare) quanto stabilito.

b. Essendo più fedeli al testo sarebbe: «e si ha, *convertendo*, che la somma dei quadrati di AB, CB è incommensurabile col rimanente quadrato di AC», quello che rimane tolta l'eccedenza $2r(AC, CB)$ per cui la somma $q(AB) + q(CB)$ è maggiore di quel quadrato; e così si spiega anche il termine *convertendo*.

c. Letteralmente sarebbe piuttosto *il doppio del rettangolo*, sùbito all'inizio.

d. Si tratta nel testo di una retta *che, con un'area, uno spazio, razionale, fa, produce l'intiero mediale*, cioè che se si aggiunge al suo quadrato un'area razionale, dà per somma un'area mediale.

Poiché la somma dei quadrati di AB, CB è difatti mediale, mentre il doppio del rettangolo di AB, CB è razionale[, essendo razionale per ipotesi $r(AB, CB)$], la somma dei quadrati di AB, CB è incommensurabile col doppio del rettangolo di AB, CB; perciò[, essendo $q(AB) + q(CB) = 2r(AB, CB) + q(AC)$ (II, 7),] anche il quadrato di AC, che rimane [se si sottrae $2r(AB, CB)$], è incommensurabile col doppio del rettangolo di AB, CB (X, 16). Ma il doppio del rettangolo di AB, CB è razionale; è quindi irrazionale il quadrato di AC; dunque AC è una retta irrazionale (X, def. IV): sia chiamata « retta potenziante la differenza fra un'area mediale ed un'area razionale »[, ossia il suo quadrato $q(AC)$, se ad esso si aggiunge un'area razionale $2r(AB, CB)$, dà per risultato un'area mediale $q(AB) + q(CB)$]. – C.D.D.

APPLICA: II, 7; X, 16, 34.

È APPLICATA IN: X, 83, 95, 101, 106, 108.

PROPOSIZIONE 78.

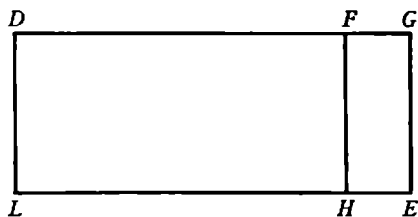
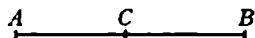
Se da una retta se ne sottrae un'altra che sia con essa incommensurabile in potenza, e tale che la somma dei rispettivi quadrati sia un'area mediale, area mediale anche il doppio del rettangolo da esse compreso, ed infine tale che la somma dei quadrati [delle rette di cui sopra] sia incommensurabile col rettangolo da esse compreso, la parte che rimane della prima è una retta irrazionale: sia chiamata « retta potenziante la differenza fra due aree mediali »[a].

Infatti, dalla retta AB si sottragga la retta CB, incommensurabile in potenza con AB e tale da soddisfare alle

a. Si tratta nel testo di una retta *che, con un'area mediale, fa, produce l'intiero mediale.* La retta sottratta è poi una retta « che dia, insieme alla intiera, la messa insieme, la composizione dei loro quadrati mediale, il (rettangolo) due volte da esse (compreso) mediale, ed infine i loro quadrati incommensurabili col (rettangolo) due volte da esse (compreso) ».

condizioni sopra enunciate (X, 35); dico che la parte rimanente *AC* è una retta irrazionale: sia chiamata « retta potenziante la differenza fra due aree mediali ».

Si assuma difatti come data la retta razionale *DL*, e si applichi a *DL* il rettangolo *DLEG*, uguale alla somma dei quadrati di *AB*, *CB* e formante *DG* quale altezza (I, 44-45); dal rettangolo *DLEG* si sottragga poi il rettangolo *DLHF*, uguale al doppio del rettangolo di *AB*, *CB*. Il rettangolo rimanente *FHEG* è perciò uguale al quadrato di *AC* (II, 7), cosicché *AC* potenzia l'area *FHEG*. Ora, poiché la somma dei quadrati di *AB*, *CB* è mediale ed è uguale a *DLEG*, il rettangolo *DLEG* è area mediale. Ed è applicato alla retta razionale [*FH* uguale a] *DL*, formando l'altezza *DG*; quindi *DG* è una retta razionale ed incommensurabile in lunghezza con *DL* (X, 22). Di nuovo, poiché il doppio del rettangolo di *AB*, *CB* è area mediale ed è uguale a *DLHF*, il rettangolo *DLHF* è area mediale. Ed è applicato alla retta razionale *DL*, formando l'altezza *DF*; perciò anche *DF* è una retta razionale ed incommensurabile in lunghezza con *DL* (X, 22). E poiché la somma dei quadrati di *AB*, *CB* è incommensurabile col doppio del rettangolo di *AB*, *CB*, [essendo incommensurabile con tale rettangolo,] pure l'area *DLEG* è incommensurabile con l'area *DLHF*. Ma *DLEG* sta a *DLHF* come *DG* sta a *DF* [$DLEG : DLHF = DG : DF$] (VI, 1), per cui *DG* è incommensurabile [in lunghezza] con *DF* (X, 11). E sono ambedue rette razionali; quindi *DG*, *DF* sono razionali commensurabili soltanto in potenza. Perciò [la loro differenza] *FG* è un'apotome (X, 73), mentre *FH* è d'altra parte una retta razionale. Ma un rettangolo[, cioè in questo caso *FHEG*,] compreso da una retta razionale[, in questo caso *FH*,] e da un'apotome[, in questo caso *FG*,] è irrazionale (deduzione da X, 20), ed una retta il cui quadrato sia uguale all'area in questione è irrazionale. Ma il quadrato di *AC* è[, come si è veduto,] uguale al rettangolo *FHEG* [ed è irrazionale]; dunque [anche il suo lato, ossia] la retta *AC* è irrazionale: sia chiamata « retta potenziante la differenza fra due aree mediali »[, ossia se al suo quadrato

$q(AC)$, uguale all'area $FHEG$, si aggiunge un'area mediale $r(AC, CB)$, uguale all'area mediale $DLHF$, si ha per risultato un'area mediale $q(AB) +$ $+ q(CB) = 2r(AB,CB) =$ $= DLEG$]. - C.D.D.

APPLICA: I, 44-45; II, 7; VI, 1; X, 11, 20, 22, 35, 73.

È APPLICATA IN: X, 84, 96, 102, 107.

PROPOSIZIONE 79.

Ad un'apotome può aggiungersi una sola retta razionale, la quale sia commensurabile soltanto in potenza con tutta quanta la retta [risultante dall'aggiunzione].

Sia AB un'apotome, [generata come differenza fra due rette razionali AC, BC,] e sia BC [quindi] che risulta aggiungersi ad essa [a]; perciò AC, BC sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza (X, 73); dico che non può aggiungersi ad AB nessun'altra retta razionale [diversa da BC], la quale sia commensurabile soltanto in potenza con tutta quanta la retta [risultante dall'aggiunzione].

Infatti, se possibile, sia BD tale che si aggiunga ad AB; quindi pure AD, BD siano razionali commensurabili soltanto in potenza (X, 73). E poiché la somma dei quadrati di AD, BD supera il doppio del rettangolo di AD, BD di quanto anche la somma dei quadrati di AC, BC supera il doppio del rettangolo di AC, BC{, ossia: $q(AD) + q(BD) - 2r(AD,$

a. Euclide chiama appunto, d'ora innanzi, la retta razionale che può aggiungersi ad un'apotome ἡ προσαρμόζουσα, cioè la retta che si accorda, conviene, con un'apotome, vale a dire che può aggiungersi; insomma, *la retta congruente*, termine che dopo useremo, seppure usando altra via di significazione.

$BD) = q(AB)$, ed anche: $q(AC) + q(BC) - 2r(AC, BC) = = q(AB)$ (II, 7), da cui segue: $[q(AD) + q(BD)] - 2r(AD, BD) = [q(AC) + q(BC)] - 2r(AC, BC)\}$ – e difatti ambedue le somme [di partenza] sono eccedenti di un medesimo quadrato, cioè quello di AB[a] –, si ha allora, *permutando*: $[q(AD) + q(BD)] - [q(AC) + q(BC)] = 2r(AD, BD) - - 2r(AC, BC)$, ossia la somma dei quadrati di AD, BD supera quella dei quadrati di AC, BC di quanto il doppio del rettangolo di AD, BD supera il doppio del rettangolo di AC, BC. Ma [la somma dei quadrati di AD, BD essendo area razionale, e tale essendo anche la somma dei quadrati di AC, BC, si ha che] la somma dei quadrati di AD, BD supera quella dei quadrati di AC, BC di un'area razionale – difatti ambedue le somme sono razionali[, e differiscono quindi fra loro di un'area razionale]. Perciò anche il doppio del rettangolo di AD, BD differirebbe in tal caso di un'area razionale dal doppio del rettangolo di AC, BC: il che è impossibile, poiché tutte e due le aree sono mediali (X, 21), ed un'area mediale non eccede di un'area razionale un'altra area mediale (X, 26). Non può aggiungersi quindi ad AB nessun'altra retta razionale, che sia commensurabile soltanto in potenza con la intiera [risultante dall'aggiunzione].

Dunque, ad un'apotome può aggiungersi... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: II, 7; X, 21, 26, 73.
È APPLICATA IN: X, 81, 84.

PROPOSIZIONE 80.

Ad una prima apotome di mediale può aggiungersi una sola retta mediale, la quale sia commensurabile soltanto in potenza con tutta quanta la retta [risultante dall'aggiunzione][b] *e che, insieme a questa, comprenda un'area razionale.*

Infatti, sia AB una prima apotome di mediale[, generata come differenza fra due rette mediali AC, BC], e sia [perciò]

a. Letteralmente: del medesimo quadrato di AB.
b. Letteralmente: con la (retta) tutta quanta, con l'intiera.

BC che risulta aggiungersi ad *AB*; quindi *AC*, *BC* sono rette mediali commensurabili soltanto in potenza e comprendenti il rettangolo razionale $r(AC, BC)$ di *AC*, *BC* (X, 74); dico che non può aggiungersi ad *AB* nessun'altra retta mediale, commensurabile soltanto in potenza con tutta quanta la retta [risultante dall'aggiunzione] e che comprenda, insieme a questa, un'area razionale.

Se fosse difatti possibile, sia anche *BD* [una retta mediale] tale che si aggiunga ad *AB*; quindi *AD*, *BD* sono [in tal caso] rette mediali commensurabili soltanto in potenza e comprendenti il rettangolo razionale $r(AD, BD)$ (X, 74). E poiché $q(AD) + q(BD) - 2r(AD, BD) = q(AB)$, ed anche: $q(AC) + q(BC) - 2r(AC, BC) = q(AB)$ (II, 7), segue [come nella precedente proposizione X, 79]: $[q(AD) + q(BD)] - [q(AC) + q(BC)] = 2r(AD, BD) - 2r(AC, BC)$ [a]. Ma il doppio del rettangolo di *AD*, *BD* supera il doppio del rettangolo di *AC*, *BC* di un'area razionale – i doppi rettangoli sono ambedue difatti razionali. Pure la somma dei quadrati di *AD*, *BD* supererebbe perciò quella dei quadrati di *AC*, *BC* di un'area razionale: il che è impossibile, poiché ambedue le somme sono mediali (X, 24), ed un'area mediale non eccede di un'area razionale un'altra area mediale (X, 26).

Dunque, ad una prima apotome di mediale può aggiungersi una sola retta mediale... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

A B C D

APPLICA: II, 7; X, 24, 26, 74.

PROPOSIZIONE 81.

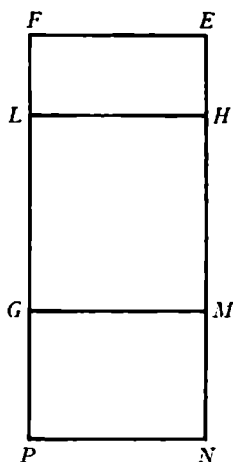
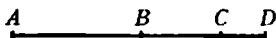
Ad una seconda apotome di mediale può aggiungersi una sola retta mediale, la quale sia commensurabile soltanto in

a. Per brevità e chiarezza traduciamo secondo le formule già impiegate alla proposizione precedente e che permettevano, col sistema di parentesi, di seguire o ricostruire il testo originario sufficientemente; lo stesso si può fare ora.

potenza con tutta quanta la retta [risultante dall'aggiunzione] e che, insieme a questa, comprenda un'area mediale.

Sia *AB* una seconda apotome di mediale[, generata come differenza fra due rette mediali *AC*, *BC*], e sia [perciò] *BC* che risulta aggiungersi ad *AB*; quindi *AC*, *BC* sono mediali commensurabili soltanto in potenza e comprendenti il rettangolo mediale *r*(*AC*, *BC*) di *AC*, *BC* (X, 75); dico che non potrà aggiungersi ad *AB* nessun'altra retta mediale, commensurabile soltanto in potenza con tutta quanta la retta [risultante dall'aggiunzione] e che, insieme a questa, comprenda un'area mediale.

Infatti, se possibile, sia anche *BD* [una retta mediale] tale che si aggiunga ad *AB*; pure *AD*, *BD* sarebbero quindi in tal caso rette mediali commensurabili soltanto in potenza e comprendenti il rettangolo mediale *r*(*AD*, *BD*) (X, 75). Si assuma inoltre come data la retta razionale *EF*, e si applichi [parabolicamente] ad *EF* il rettangolo *EFGM*, uguale alla somma dei quadrati di *AC*, *BC* e formante *EM* quale altezza (I, 44-45); dal rettangolo *EFGM* si sottragga poi il rettangolo *HLGM*, uguale al doppio del rettangolo di *AC*, *BC* e che forma l'altezza *HM*; il rettangolo rimanente *EFLH* è perciò uguale al quadrato di *AB* (II, 7), cosicché *AB* è una retta potenziante l'area *EFLH*. Di nuovo, si applichi ad *EF* il rettangolo *EFPN*, uguale alla somma dei quadrati di *AD*, *BD* e che forma *EN* quale altezza; si ha inoltre che *EFLH* è uguale al quadrato di *AB*; quindi il rimanente rettangolo *HLPN* è uguale al doppio del rettangolo di *AD*, *BD* (II, 7). E poiché *AC*, *BC* sono [per ipotesi] rette mediali, è anche area mediale la somma dei quadrati di *AC*, *BC*. Ma tale somma è uguale al rettangolo *EFGM*; pure *EFGM* è quindi area mediale (X, 23, coroll.). Ed esso è applicato alla retta razionale *EF*, formando l'altezza *EM*; perciò *EM* è una retta razionale ed incommensurabile in lunghezza con *EF* (X, 22). Di nuovo, poiché il rettangolo di *AC*, *BC* è area mediale, anche il doppio del rettangolo di *AC*, *BC* è area mediale (X, 23, coroll.). Ma 2*r*(*AC*, *BC*) è uguale al rettangolo *HLGM*; quindi anche *HLGM* è area mediale. E *HLGM*

è applicato alla retta razionale EF, formando l'altezza HM; pure HM è perciò una retta razionale ed incommensurabile in lunghezza con EF (X, 22). Ora, poiché AC, BC sono rette commensurabili soltanto in potenza, AC è incommensurabile in lunghezza con BC. Ma AC sta a BC come il quadrato di AC sta al rettangolo di AC, BC [$AC : BC = q(AC) : r(AC, BC)$] (X, 21, coroll.); quindi il quadrato $q(AC)$ è incommensurabile [col rettangolo $r(AC, BC)$ (X, 11), ed anche] col doppio rettangolo $2r(AC, BC)$. Ma la somma dei quadrati $q(AC) + q(BC)$ è commensurabile con $q(AC)$, [poiché AC, BC sono commensurabili in potenza,] mentre $2r(AC, BC)$ è commensurabile con $r(AC, BC)$, per cui la somma $q(AC) + q(BC)$ è incommensurabile con $2r(AC, BC)$, (X, 13). Ma il rettangolo $EFGM$ è uguale alla somma $q(AC) + q(BC)$, mentre il rettangolo $HLGM$ è uguale a $2r(AC, BC)$; quindi $EFGM$ è incommensurabile con $HLGM$. Ma $EFGM$ sta a $HLGM$ come EM sta a HM [$EFGM : HLGM = EM : HM$] (VI, 1); perciò la retta EM è incommensurabile in lunghezza con la retta HM (X, 11). E sono ambedue rette razionali; dunque EM, HM sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza, [la loro differenza] EH è un'apotome (X, 73), e HM risulta aggiungersi ad essa. Similmente potremo dimostrare che pure [EN, HN sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza, e quindi]

all'apotome EH può aggiungersi HN; perciò ad un'apotome[, cioè EH,] verrebbero ad aggiungersi due rette HM, HN ambedue commensurabili soltanto in potenza rispettivamente con ciascuna delle rette EM, EN risultanti dall'aggiunzione: il che è impossibile (X, 79).

Dunque, ad una seconda apotome

di mediale può aggiungersi una sola retta mediale... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 44-45; II, 7; VI, 1; X, 11, 13, 22, 23 coroll., 73, 75, 79.

PROPOSIZIONE 82.

Ad una retta [irrazionale] « minore » *può aggiungersi soltanto una retta, la quale sia incommensurabile in potenza con tutta quanta la retta [risultante dall'aggiunzione] e che dia, insieme a questa, la somma dei rispettivi quadrati area razionale, ed area mediale, invece, il doppio del rettangolo da esse compreso.*

Sia *AB* una retta [irrazionale] « *minore* », [generata come differenza fra le due rette *AC*, *BC*,] e sia [perciò] *BC* che risulta aggiungersi ad *AB*; quindi *AC*, *BC* sono rette incommensurabili in potenza e tali che la somma dei loro quadrati sia un'area razionale, ed area mediale sia invece il doppio del rettangolo da esse compreso (X, 76); dico che ad *AB* non può aggiungersi nessun'altra retta che dia il medesimo [risultato].

Infatti, se possibile, si aggiunga *BD* ad *AB*; quindi anche *AD*, *BD* sono rette incommensurabili in potenza e tali da dare quanto detto prima (X, 76). In modo allora del tutto simile a quanto esposto nelle proposizioni X, 79 e X, 80, si dimostra che [a] il doppio del rettangolo di *AD*, *BD* dovrebbe in tal caso eccedere di un'area razionale il doppio del rettangolo di *AC*, *BC*: il che è impossibile (X, 26), dato che i doppi rettangoli in questione sono ambedue mediali.

Dunque, ad una retta [irrazionale] « minore » può aggiungersi soltanto una retta... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: X, 26, 76.

a. Data la effettiva similarità del procedimento, che può essere quindi con facilità ricostruito, ci limitiamo a riassumere con: *In modo allora del tutto simile... si dimostra che*, dopo di cui riprende il testo.

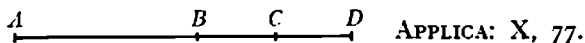
PROPOSIZIONE 83.

Ad una retta [irrazionale] « potenziante la differenza fra un'area mediale ed un'area razionale » può aggiungersi solo un'altra retta, la quale sia incommensurabile in potenza con tutta quanta la retta [risultante dall'aggiunzione] e che dia, insieme a questa, la somma dei rispettivi quadrati area mediale, ed area razionale, invece, il doppio del rettangolo da esse compreso.

Sia *AB* una retta [irrazionale] « potenziante la differenza fra un'area mediale ed un'area razionale », [generata come differenza fra le due rette *AC*, *BC*,] e sia [perciò] *BC* che risulta aggiungersi ad *AB*; quindi *AC*, *BC* sono rette incommensurabili in potenza e tali da soddisfare alle condizioni sopra enunciate (X, 77); dico che non potrà aggiungersi ad *AB* nessun'altra retta che soddisfi alle stesse condizioni [a].

Infatti, se possibile, si aggiunga *BD* ad *AB*; quindi anche *AD*, *BD* sarebbero rette incommensurabili in potenza e tali da dare quanto proposto (X, 77). In modo allora del tutto simile a ciò che si espose nelle precedenti proposizioni X, 79 e X, 80, si dimostra che la somma dei quadrati di *AD*, *BD* supererebbe in tal caso quella dei quadrati di *AC*, *BC* di un'area razionale: il che è impossibile, dato che ambedue le somme sono mediali (X, 26). Non potrà quindi aggiungersi ad *AB* nessun'altra retta che sia incommensurabile in potenza con tutta la retta risultante dall'aggiunzione e che, insieme a questa, dia quanto detto sopra, e dunque se ne aggiungerà una, ed una soltanto. – C.D.D.

A B C D

APPLICA: X, 77.

PROPOSIZIONE 84.

Ad una retta [irrazionale] « potenziante la differenza fra due aree mediali » può aggiungersi solo un'altra retta, la quale sia incommensurabile in potenza con tutta quanta la retta

a. Il testo corrisponde a: « che dia il medesimo risultato », come alla proposizione precedente.

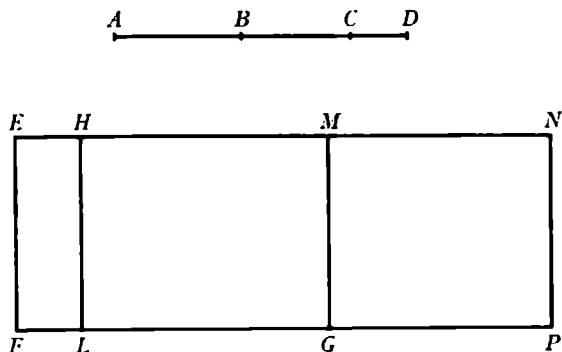
[risultante dall'aggiunzione], e che dia, insieme a questa, la somma dei rispettivi quadrati area mediale, mentre il doppio del rettangolo da esse compreso sia pure un'area mediale, incommensurabile inoltre con la somma dei quadrati.

Sia AB una retta [irrazionale] « potenziante la differenza fra due aree mediali », [generata come differenza fra le due rette AC, BC,] e sia [perciò] BC che risulta aggiungersi ad essa; quindi AC, BC sono rette incommensurabili in potenza e tali da soddisfare[a] a quanto detto sopra (X, 78). Dico che non potrà aggiungersi ad AB nessun'altra retta che dia quanto suindicato.

Infatti, se possibile, si aggiunga BD ad AB, così che pure AD, BD siano rette incommensurabili in potenza e tali da dare la somma dei quadrati $q(AD) + q(BD)$ che sia area mediale, il doppio rettangolo $2r(AD, BD)$ che sia anch'esso area mediale, ed infine la somma $q(AD) + q(BD)$ incommensurabile con $2r(AD, BD)$ (X, 78). Si assuma come data la retta razionale EF, si applichi [parabolicamente] ad EF il rettangolo $EFGM$, uguale alla somma dei quadrati di AC, BC e che formi l'altezza EM, e si applichi poi [a MG uguale] ad EF il rettangolo $HLGM$, uguale al doppio del rettangolo di AC, BC e che formi l'altezza HM (I, 44-45); il quadrato di AB, che così rimane (II, 7), è perciò uguale al rettangolo $EFLH$, per cui AB è una retta potenziante l'area $EFLH$. Di nuovo, si applichi ad EF il rettangolo $EFPN$, uguale alla somma dei quadrati di AD, BD e formante l'altezza EN. Ma si ha pure che il quadrato di AB è uguale al rettangolo $EFLH$; perciò il doppio del rettangolo di AD, BD, che così rimane (II, 7), è uguale al rettangolo $HNPL$. E poiché la somma dei quadrati di AC, BC è area mediale ed è uguale al rettangolo $EFGM$, anche $EFGM$ è area mediale. Ed è applicato alla retta razionale EF, formando l'altezza EM; quindi EM è una retta razionale ed incommensurabile in lunghezza con EF (X, 22). Di nuovo, poiché il doppio del rettangolo di AC, BC è area mediale ed è uguale al ret-

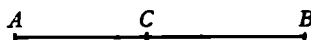
a. Letteralmente: da dare, da produrre.

tangolo $HLGM$, pure $HLGM$ è area mediale. Ed è applicato alla retta razionale EF, formando l'altezza HM; quindi HM è una retta razionale ed incommensurabile in lunghezza con EF (X, 22). Ma poiché la somma dei quadrati di AC, BC è [per ipotesi] incommensurabile col doppio del rettangolo di AC, BC, pure $EFGM$ è incommensurabile con $HLGM$; è perciò anche la retta EM incommensurabile in lunghezza con la retta MH (VI, 1; X, 11). E sono ambedue razionali; dunque EM, HM sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza, la retta EH è un'apotome (X, 73), e ad essa risulta aggiungersi HM[, che soddisfa alle note condizioni]. Di nuovo, potremo dimostrare similmente che, essendo EH un'apotome, ad essa si aggiunge anche HN [a][, soddisfacente alle stesse condizioni]. Quindi, ad un'apotome EH verrebbero ad aggiungersi due rette diverse HM, HN commensurabili soltanto in potenza con tutta quanta la retta [risultante dall'aggiunzione, cioè rispettivamente con EM, EN]: il che fu dimostrato impossibile (X, 79). Perciò nessun'altra retta [oltre a BC] potrà aggiungersi ad AB[, soddisfacendo alle note condizioni].

Dunque, ad AB non può aggiungersi che una sola retta, la quale sia incommensurabile in potenza... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

Applica: I, 44-45; II, 7; VI, 1; X, 11, 22, 73, 78, 79.

a. Il testo piuttosto ripete: « che EH è un'apotome, e che HN può aggiungersi ad essa ».

TERZA SERIE DI DEFINIZIONI

Se *AB*, *CB* sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza, la loro differenza *AC* è la linea irrazionale detta apotome. La retta *CB* che

è sottratta da *AB* viene indicata col nome di «retta congruente», cioè retta che *si sovrappone* ad *AB* per lasciare la differenza *AC*. Tutta la retta *AB* viene indicata invece col nome di «retta totale».

Sia data una retta razionale, e sia data un'apotome[, generata come differenza fra una retta totale ed una retta congruente]; ora, se il quadrato della retta totale supera il quadrato della retta congruente del quadrato di un'altra retta commensurabile in lunghezza con quella totale:

I. Se la retta totale è commensurabile in lunghezza con la retta razionale che si sia assunta come data, l'apotome si chiami *prima apotome*.

II. Se la retta congruente è commensurabile in lunghezza con la retta razionale che si sia assunta come data, l'apotome si chiami *seconda apotome*.

III. E se né la retta totale né la retta congruente sono commensurabili in lunghezza con la retta razionale che si sia assunta come data, l'apotome si chiami *terza apotome*.

Di nuovo, se il quadrato della retta totale supera quello della retta congruente del quadrato di una retta incommensurabile in lunghezza con la retta totale:

IV. Se la retta totale è commensurabile in lunghezza con la retta razionale che si sia assunta come data, l'apotome si chiami *quarta apotome*.

V. Se la retta congruente è commensurabile in lunghezza con la retta razionale che si sia assunta come data, l'apotome si chiami *quinta apotome*.

VI. E se né la retta totale né la retta congruente sono commensurabili in lunghezza con la retta razionale che

si sia assunta come data, l'apotome si chiami *sesta apotome* [a].

PROPOSIZIONE 85.

Trovare una prima apotome.

Si assuma come data la retta razionale A, e [si prenda una retta] BG [che] sia commensurabile in lunghezza con A; quindi anche BG è una retta razionale. E si assumano i due numeri quadrati d^2, e^2, la cui differenza $d^2 - e^2$ non sia un numero quadrato (X, 28, lemma) [b]; perciò d^2 non ha

a. Abbiamo qui, per ragioni di chiarezza ed agilità, modificato il testo, seguendo anche l'esempio della Seconda serie di definizioni. Il termine *retta totale* corrisponde evidentemente a *tutta quanta la retta risultante dall'aggiunzione*, quello di *retta congruente* invece alla *retta che può aggiungersi* ad un'apotome, in questo caso, e quest'uso è senza dubbio un discostarsi dalla stretta fedeltà testuale. Inoltre, come nella Seconda serie, la I e la IV definizione comprendono nel testo quanto è stato da noi estratto rispetto alle loro condizioni: la I dice – « Date una retta razionale ed un'apotome, se il quadrato di tutta quanta la retta risultante dalla loro aggiunzione supera quello della retta che possa aggiungersi all'apotome del quadrato di una retta commensurabile in lunghezza con la intiera, e se tutta quanta la retta risultante dall'aggiunzione è commensurabile in lunghezza con la retta che si sia assunta come razionale... ecc. », e la IV procede ugualmente; la II e la III inoltre, dopo l'inizio rispettivo: « Se la retta congruente..., ecc. », « E se né la retta totale né la retta congruente.., ecc. » (secondo la nostra traduzione), ripetono come seconda condizione: « e se il quadrato..., ecc. », che noi abbiamo appunto estratto all'inizio. La V e la VI, poi, dicono semplicemente: « E se la retta che si aggiunga è commensurabile (sott. con la razionale), quinta », « E se né l'una né l'altra (sott. lo è, commensurabile con la razionale), sesta », rimanendo sempre sottinteso anche il « l'apotome si chiami ».

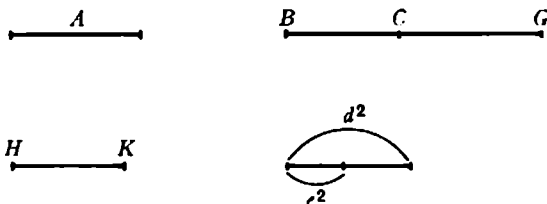
b. Naturalmente sarebbe: « i due numeri quadrati DE, EF, la cui differenza FD », secondo la simbologia letterale euclidea; per agevole comprensione, dobbiamo usare d'ora innanzi la simbologia moderna, ed in modo assai esteso.

con $d^2 - e^2$ il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato. Si determini la retta CG tale che si abbia [a]: $d^2 : (d^2 - e^2) = q(BG) : q(CG)$ (X, 6, coroll.); quindi il quadrato di BG è commensurabile con quello di CG (X, 6). Ma il quadrato di BG è razionale; è perciò razionale pure il quadrato di CG, per cui anche la retta CG è razionale. E poiché il numero d^2 non ha col numero $d^2 - e^2$ il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato, neppure il quadrato di BG ha con quello di CG il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato; quindi la retta BG è incommensurabile in lunghezza con la retta CG (X, 9). Ma sono ambedue razionali; dunque BG, CG sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza, e [la loro differenza] BC è un'apotome (X, 73).

Dico adesso che è anche una prima apotome.

Infatti, [si determini la retta HK tale che: $q(HK) = q(BG) - q(CG)$, ossia in modo che] il quadrato della retta HK [b] sia uguale alla differenza tra il quadrato di BG e il quadrato di CG (X, 13, lemma). E poiché $d^2 : (d^2 - e^2) = q(BG) : q(CG)$, si ha pure, *convertendo*: $\{d^2 : [d^2 - (d^2 - e^2)] = q(BG) : [q(BG) - q(CG)]$, ossia:$\}$ $d^2 : e^2 = q(BG) : q(HK)$ (V, 19, coroll.). Ma d^2 ha con e^2 il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato – difatti ciascuno dei due è un numero quadrato –; perciò anche il quadrato di BG ha con quello di HK il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato; quindi la retta BG è commensurabile in lunghezza con la retta HK (X, 9). Ma il quadrato di BG supera quello di CG del quadrato di HK; il quadrato di BG supera quindi quello di CG del quadrato di una retta commensurabile in lunghezza con BG. Ora, tutta quanta BG è commensurabile in lunghezza con la retta A che si è assunta come razionale. Perciò BC è una prima apotome (X, deff. terze, I).

a. È il solito: « Si faccia in modo che (il numero) ED stia a (quello) DF come il quadrato di BG sta al quadrato di CG ».
b. Letteralmente: della (retta) H.

Dunque, è stata trovata la prima apotome BC. – C.D.D.[a]

Applica: X, 6, 9, 13 lemma, 28 lemma I, 73.

Proposizione 86.

Trovare una seconda apotome.

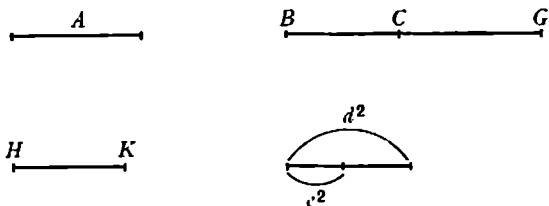
Si assumano come date la retta razionale A e la retta CG commensurabile in lunghezza con A. Quindi CG è una retta razionale. E si assumano i due numeri quadrati d^2, e^2, la cui differenza $d^2 - e^2$ non sia un numero quadrato (X, 28, lemma I). Si determini la retta BG in modo che si abbia: $(d^2 - e^2) : d^2 = q(CG) : q(BG)$ (X, 6, coroll.). Il quadrato di CG è perciò commensurabile con quello di BG (X, 6). Ma il quadrato di CG è area razionale. È perciò area razionale anche il quadrato di BG, per cui BG è una retta razionale. E poiché il quadrato di CG non ha con quello di BG il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato, la retta CG è incommensurabile in lunghezza con quella BG (X, 9). Ma sono ambedue razionali; dunque CG, BG sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza, e [la loro differenza] BC è un'apotome (X, 73).

Dico adesso che è anche una seconda apotome.

Infatti, [si determini la retta HK tale che: $q(HK) = q(BG) - q(CG)$, ossia in modo che] il quadrato della retta HK sia uguale alla differenza tra il quadrato di BG e il quadrato di CG (X, 13, lemma). Poiché dunque $q(BG) : q(CG) = d^2 : (d^2 - e^2)$, [come si ricava *invertendo* dalla proporzione sopra stabilita,] si ha, *convertendo*: $q(BG) : q(HK) =$

a. Letteralmente: come si doveva trovare.

$= d^2 : e^2$ (V, 19, coroll.). Ma ciascuno dei due numeri d^2, e^2 è un quadrato; il quadrato di BG ha perciò con quello di HK il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato; quindi BG è commensurabile in lunghezza con HK (X, 9). Ma il quadrato di BG supera quello di CG del quadrato di HK; quindi il quadrato di BG supera quello di CG del quadrato di una retta commensurabile in lunghezza con BG. Ora, la retta [congruente] CG aggiunta all'apotome è commensurabile con la retta A che si è assunta come razionale. Perciò BG è una seconda apotome (X, deff. terze, II).

Dunque, è stata trovata la seconda apotome BC. – C.D.D.

APPLICA: V, 19 coroll.; X, 6, 6 coroll., 9, 13 lemma, 28 lemma I, 73.

PROPOSIZIONE 87.

Trovare una terza apotome.

Si assuma come data la retta razionale A, e si assumano i tre numeri m, n, p non aventi fra loro [a due a due] il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato, mentre m abbia con $m - n$ il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato; si determini la retta FG in modo che si abbia: $p : m = q(A) : q(FG)$ (X, 6, coroll.), e si determini la retta HG in modo che si abbia: $m : n = q(FG) : q(HG)$ (X, 6, coroll.). Poiché dunque $p : m = q(A) : q(FG)$, il quadrato di A è commensurabile col quadrato di FG (X, 6). Ma il quadrato di A è razionale; è perciò razionale anche quello di FG, per cui FG è una retta razionale. E poiché p non ha con m il rapporto che un

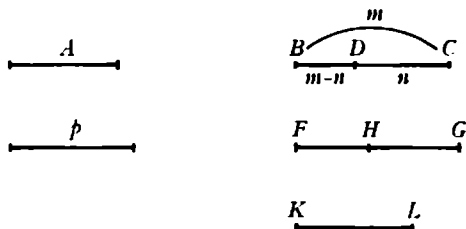
numero quadrato ha con un numero quadrato, neppure il quadrato di A ha con quello di FG il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato; quindi A è incommensurabile in lunghezza con FG (X, 9). Di nuovo, poiché $m : n = q(FG) : q(HG)$, il quadrato di FG è commensurabile con quello di HG (X, 6). Ma [si è visto che] il quadrato di FG è razionale; è perciò razionale anche quello di HG, per cui HG è una retta razionale. E poiché m non ha con n il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato, neppure il quadrato di FG ha con quello di HG il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato; quindi FG è incommensurabile in lunghezza con HG (X, 9). Ma sono ambedue rette razionali; dunque FG, HG sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza, e [la loro differenza] FH è un'apotome (X, 73).

Dico adesso che è anche una terza apotome.

Infatti, poiché $p : m = q(A) : q(FG)$, e $m : n = q(FG) : : q(HG)$, si ha, *ex aequo*: $p : n = q(A) : q(HG)$ (V, 22). Ma p non ha con n il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato; neppure il quadrato di A ha perciò con quello di HG il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato; quindi A è incommensurabile in lunghezza con HG (X, 9). Nessuna delle due rette FG, HG è quindi commensurabile in lunghezza con la retta A che si è assunta come razionale. Ora, [si determini la retta KL tale che sia: $q(KL) = q(FG) - q(HG)$, ossia in modo che]. il quadrato della retta KL sia uguale alla differenza tra il quadrato di FG e il quadrato di HG (X, 13, lemma). Poiché dunque[, come si è visto,] $m : n = q(FG) : q(HG)$, si ha, *convertendo*: $m : (m - n) = q(FG) : q(KL)$ (V, 19, coroll.). Ma [si è supposto in principio che] m ha con $m - n$ il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato; pure il quadrato di FG ha quindi con quello di KL il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato. Perciò FG è commensurabile in lunghezza con KL (X, 9), cioè il quadrato di FG supera quello di HG del quadrato di una retta commensurabile [in lunghezza] con FG. Ma nessuna delle due rette FG, HG è commensurabile in lun-

ghezza con la retta A che si è assunta come razionale; quindi [la loro differenza] FH è una terza apotome (X, deff. terze, III).

Dunque, è stata trovata la terza apotome FH. – C.D.D.

APPLICA: V, 19 coroll., 22; X, 6, 6 coroll., 9, 13 lemma, 73.

PROPOSIZIONE 88.

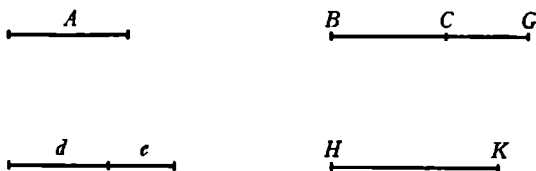
Trovare una quarta apotome.

Si assumano come date la retta razionale A e la retta BG commensurabile in lunghezza con A; anche BG è quindi razionale. E si assumano i due numeri d, e, tali che la loro somma $d + e$ non abbia con nessuno di essi il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato. Si determini la retta CG in modo che si abbia: $(d + e) : e =$ $= q(BG) : q(CG)$ (X, 6, coroll.); il quadrato di BG è perciò commensurabile con quello di CG (X, 6). Ma il quadrato di BG è razionale; è quindi razionale anche quello di CG, per cui CG è una retta razionale. E poiché $(d + e)$ non ha con e il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato, neppure il quadrato di BG ha con quello di CG il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato; quindi la retta BG è incommensurabile in lunghezza con la retta CG (X, 9). Ma sono ambedue razionali; dunque BG, CG sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza, e [la loro differenza] BC è un'apotome (X, 73).

Dico adesso che è anche una quarta apotome.

Si determini dunque la retta HK in modo che si abbia: $q(HK) = q(BG) - q(CG)$, (X, 13, lemma). Poiché ora[, come avanti si è visto,] $(d + e) : e = q(BG) : q(CG)$, si ha pure,

convertendo: $(d + e) : d = q(BG) : q(HK)$ (V, 19, coroll.). Ma $d + e$ non ha con d il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato; neppure il quadrato di BG ha perciò col quadrato di HK il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato, per cui BG è incommensurabile in lunghezza con HK (X, 9). Ma il quadrato di BG supera quello di CG del quadrato di HK; si ha quindi[, vale a dire,] che il quadrato di BG supera quello di CG del quadrato di una retta incommensurabile [in lunghezza] con BG. Inoltre tutta quanta BG è commensurabile in lunghezza con la retta A che si è assunta come razionale; perciò BC è una quarta apotome (X, deff. terze, IV).

Dunque, è stata trovata una quarta apotome. – C.D.D.

APPLICA: V, 19 coroll.; X, 6 coroll., 9, 19 coroll.

PROPOSIZIONE 89.

Trovare una quinta apotome.

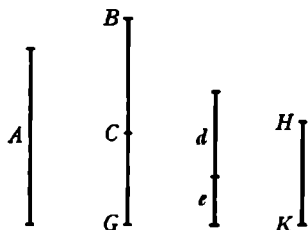
Si assuma come data la retta razionale A, e sia la retta CG commensurabile in lunghezza con A; quindi CG è razionale. Si assumano i due numeri d, e, tali, di nuovo, che la loro somma $d + e$ non abbia con nessuno di essi il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato; e si determini la retta BG in modo che si abbia: $e : (d + e) =$ $= q(CG) : q(BG)$ (X, 6, coroll.). Pure il quadrato di BG è quindi razionale (X, 6), per cui anche BG è una retta razionale. E poiché $(d + e) : e = q(BG) : q(CG)$, ma $(d + e)$ non ha con e il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato, BG è una retta incommensurabile in lunghezza con quella CG (X, 9). Ma sono ambedue razionali;

dunque BG, CG sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza, e [la loro differenza] BC è un'apotome (X, 73).

Dico adesso che è anche una quinta apotome.

Infatti, si determini la retta HK in modo che si abbia: $q(HK) = q(BG) — q(CG)$, ossia in modo che il quadrato della retta HK sia uguale alla differenza tra il quadrato di BG e il quadrato di CG (X, 13, lemma). Poiché dunque $q(BG) : q(CG) = (d + e) : e$, si ha, *convertendo*: $q(BG) : q(HK) = (d + e) : d$ (V, 19, coroll.). Ma $(d + e)$ non ha con d il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato; neppure il quadrato di BG ha perciò con quello di HK il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato, per cui BG è incommensurabile in lunghezza con HK (X, 9). Ma il quadrato di BG supera quello di CG del quadrato di HK; si ha quindi[, vale a dire,] che il quadrato di BG supera quello di CG del quadrato di una retta incommensurabile in lunghezza con BG. E la retta [congruente] CG aggiunta all'apotome è commensurabile in lunghezza con la retta A che si è assunta come razionale [cfr. in principio]; perciò BC è una quinta apotome (X, deff. terze, V).

Dunque, è stata trovata la quinta apotome BC. – C.D.D.

A B C G d e H K

APPLICA: V, 19 coroll.; X, 6, 9, 13 lemma, 28 lemmi I e II, 73.

PROPOSIZIONE 90.

Trovare una sesta apotome.

Si assuma come data la retta razionale A, e si assumano i tre numeri m, n, p, non aventi fra loro [a due a due] il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato; inoltre, neppure m abbia con $(m — n)$ il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato, e si

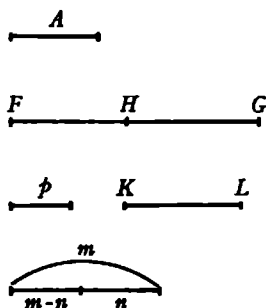
determini la retta FG in modo che si abbia: $p : m = q(A) : q(FG)$ (X, 6, coroll.), ed infine si determini la retta HG in modo che si abbia: $m : n = q(FG) : q(HG)$ (X, 6, coroll.).

Poiché dunque $p : m = q(A) : q(FG)$, il quadrato di A è commensurabile col quadrato di FG (X, 6). Ma il quadrato di A è razionale; è perciò razionale pure quello di FG, per cui anche FG è una retta razionale. E poiché p non ha con m il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato, neppure il quadrato di A ha con quello di FG il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato; quindi A è incommensurabile in lunghezza con FG (X, 9). Di nuovo, poiché $m : n = q(FG) : q(HG)$, il quadrato di FG è commensurabile col quadrato di HG (X, 6). Ma il quadrato di FG è razionale; è perciò razionale pure quello di HG, per cui anche HG è una retta razionale. Inoltre, poiché m non ha con n il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato, neppure il quadrato di FG ha con quello di HG il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato; quindi FG è incommensurabile in lunghezza con HG (X, 9). Ma sono ambedue razionali; dunque FG, HG sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza, e [la loro differenza] FH è un'apotome (X, 73).

Dico adesso che è anche una sesta apotome.

Infatti, poiché $p : m = q(A) : q(FG)$, e poiché $m : n = q(FG) : q(HG)$, si ha, *ex aequo*: $p : n = q(A) : q(HG)$ (V, 22). Ma p non ha con n il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato; neppure il quadrato di A ha perciò con quello di HG il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato; quindi A è incommensurabile in lunghezza con HG (X, 9), e nessuna delle due rette FG, HG è [così] commensurabile in lunghezza con la retta A che si è assunta come razionale. Si determini ora la retta KL in modo che si abbia: $q(KL) = q(FG) - q(HG)$, ossia in modo che il quadrato della retta KL sia uguale alla differenza tra quadrato di FG e il quadrato di HG (X, 13, lemma). Poiché dunque [si è visto che] $m : n = q(FG) : q(HG)$, si ha, *convertendo*: $m : (m - n) = q(FG) :$

: $q(KL)$ (V, 19, coroll.). Ma m non ha con $(m - n)$ il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato; neppure il quadrato di FG ha perciò con quello di KL il rapporto che un numero quadrato ha con un numero quadrato; quindi FG è incommensurabile in lunghezza con KL (X, 9). Ma il quadrato di FG supera quello di HG del quadrato di KL; si ha quindi[, vale a dire,] che il quadrato di FG supera quello di HG del quadrato di una retta incommensurabile in lunghezza con FG. Ora, nessuna delle due rette FG, HG è commensurabile in lunghezza con la retta A che si è assunta come razionale. Perciò FH è una sesta apotome (X, deff. terze, VI).

Dunque, è stata trovata la sesta apotome FH. - C.D.D.

APPLICA: V, 19 coroll., 22; X, 6, 9, 13 lemma, 28 lemmi I e II, 73.

PROPOSIZIONE 91.

Se un'area [rettangolare] è compresa da una retta razionale e da una prima apotome, la retta il cui quadrato sia uguale a quell'area è un'apotome.

Infatti, l'area [rettangolare] $ACBD$ sia compresa dalla retta razionale AC e dalla prima apotome AD; dico che la retta il cui quadrato sia uguale all'area $ACBD$ è un'apotome.

Poiché AD è difatti una prima apotome, [generata come differenza fra le due rette AG, DG,] sia [quindi] DG che risulta aggiungersi ad essa; perciò AG, DG sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza (X, 73). Ora, la retta totale AG è commensurabile [in lunghezza] con la retta AC che si è assunta come razionale, ed il quadrato di AG supera quello di DG del quadrato di una retta commensurabile in lunghezza con AG (X, deff. terze, I); se

quindi si applica [ellitticamente] ad AG un rettangolo, uguale alla quarta parte del quadrato di DG e mancante di un quadrato (VI, 28), esso divide la retta in parti commensurabili [in lunghezza] (X, 17). Si divida [così] DG per metà in E, si applichi [ellitticamente] ad AG un rettangolo, uguale al quadrato di EG e mancante di un quadrato (VI, 28), ed esso sia il rettangolo avente per dimensioni AF, FG; quindi AF è commensurabile [in lunghezza] con FG. Inoltre, per i punti E, F, G si conducano EH, FL, GK parallele ad AC [fino ad incontrare il prolungamento di CB] (I, 31). Poiché AF è commensurabile in lunghezza con FG, pure AG è commensurabile in lunghezza con ciascuna delle due rette AF, FG (X, 15). Ma AG è commensurabile [in lunghezza] con AC, [essendo $AD = AG - DG$ una prima apotome, ed essendo AC la retta razionale di partenza,] per cui ciascuna delle due rette AF, FG è commensurabile in lunghezza con AC (X, 12). Ed AC è razionale; sono quindi razionali anche le due AF, FG; cosicché pure ognuno dei due rettangoli $AFLC$, $FGKL$ è razionale (VI, 1; X, 19). E poiché DE[, essendo uguale ad EG,] è commensurabile in lunghezza con EG, anche DG è commensurabile in lunghezza con ciascuna delle due rette DE, EG (X, 15). Ma DG è razionale [e commensurabile soltanto in potenza con AG,] ed [è così] incommensurabile in lunghezza con [AG e dunque anche con] AC; pure ciascuna delle due rette DE, EG è perciò razionale ed incommensurabile in lunghezza con AC [$= DB =$ $= EH = GK$]; quindi ognuno dei due rettangoli $DEHB$, $EGKH$ è area mediale (X, 21).

Si ponga ora il quadrato $MNOP$ [detto Q] uguale al rettangolo $AFLC$ (II, 14), e se ne sottragga il quadrato $RNTS$ [detto q], uguale al rettangolo $FGKL$ ed avente in comune con $MNOP$ l'angolo [retto] MNO; quindi i quadrati $MNOP = Q$, $RNTS = q$ sono posti intorno alla stessa diagonale (VI, 26). Sia NP la loro diagonale, e si descriva la figura (vedi II, 7). Poiché dunque il rettangolo $r(AF, FG)$ compreso da AF, FG è uguale al quadrato $q(EG)$ di EG [in base all'applicazione ellittica eseguita], si ha che AF : : $EG = EG : FG$ (VI, 17)[, ossia che EG è media propor-

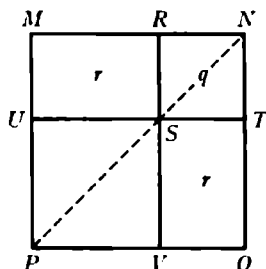
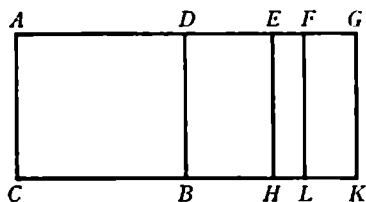
zionale fra AF, FG]. Ma $AF : EG = AFLC : EGKH$ (VI, 1), ed $EG : FG = EGKH : FGKL$ (VI, 1); quindi [si ha (V, 11): $AFLC : EGKH = EGKH : FGKL$, ossia] il rettangolo $EGKH$ è medio proporzionale fra i rettangoli $AFLC$, $FGKL$ [32]. Ma pure il rettangolo $RNOV$ è medio proporzionale fra i quadrati $MNOP = Q$, $RNTS = q$, come fu dimostrato più sopra, [cioè nel lemma successivo alla proposizione X, 53,] ed il rettangolo $AFLC$ è d'altra parte uguale al quadrato $MNOP = Q$, mentre il rettangolo $FGKL$ è uguale al quadrato $RNTS = q$; perciò il rettangolo $RNOV$ è uguale al rettangolo $EGKH$ [per l'unicità del medio proporzionale]. Ma il rettangolo $EGKH$ è uguale al rettangolo $DEHB$, [essendosi divisa DG per metà in E e risultando $DB = EH = GK$,] ed il rettangolo $RNOV$ è uguale d'altra parte al rettangolo $MNTU$[, dato che il rettangolo $MRSU = r$ è uguale a quello $STOV = r$ (I, 43) ed il quadrato $RNTS = q$ è comune]; quindi il rettangolo $DGKB$[, uguale al rettangolo $EGKH = RNOV$ più il rettangolo $DEHB = EGKH = RNOV$,] è uguale al gnomone $r + q + r$ più il quadrato $RNTS = q$. Ma è anche uguale il rettangolo $AGKC$ alla somma dei quadrati Q, q[, cioè $MNOP = AFLC$ e $RNTS = FGKL$]; perciò il rettangolo $ADBC$ che rimane [sottraendo quello $DGKB$] è uguale al quadrato $USVP$. Ma $USVP$ è il quadrato di MR, per cui il quadrato di MR è uguale ad $ADBC$; dunque MR è una retta il cui quadrato è uguale all'area $ADBC$. [Tutto ciò è come dire: ai due rettangoli $AFLC$, $FGKL$ sono rispettivamente uguali i due quadrati $MNOP = Q$ e $RNTS = q$ – così appunto sono stati costruiti –; l'ultima proporzione $AFLC : EGKH = EGKH : FGKL$ equivale dunque all'altra: $Q : EGKH = EGKH : q$. Ma pure il rettangolo $RNOV = q + r$ è medio proporzionale fra Q e q, ossia: $Q : (q + r) = (q + r) : q$. Dalle due proporzioni, per l'unicità della media proporzionale fra due grandezze date, si ricava: $EGKH = q + r = RNOV$.

[32] Per la parte immediatamente seguente il lettore troverà poco dopo, tra parentesi quadre, una specie di parafrasi facilitata.

Ma i due rettangoli $MRSU$, $STOV$ sono uguali fra loro (I, 43), e perciò li abbiamo indicati con la stessa lettera r: quindi sono fra loro uguali anche i rettangoli $MNTU$ e $RNOV$, ambedue uguali a $(q + r)$. Ma si è visto pure che $EGKH = q + r$, e quindi il doppio di $EGKH$, ossia il rettangolo $DGKB$, è uguale al doppio di $(q + r)$, ossia a: $q + r + q + r$. Tanto vale dire che $DGKB$ è uguale al gnomone costituito da $r + q + r$, cioè $MNOVSUM$, con l'aggiunta di $q = RNTS$, cioè: $DGKB =$ gnomone $+ q$. Ma per la costruzione eseguita di Q e q, si ha anche: $AGKC =$ $= Q + q$; sottraendo quindi membro a membro da quest'ultima uguaglianza la precedente, si ha: $AGKC - DGKB =$ $= Q -$ gnomone, ossia: $ADBC = USVP$. Ma $USVP$ è il quadrato di $US = MR$, per cui $ADBC = q(MR)$. Dunque la retta MR è il lato del quadrato uguale al rettangolo $ADBC$.]

Dico adesso che MR è un'apotome.

Infatti, poiché ciascuno dei due rettangoli $AFLC$, $FGKL$ è area razionale, [come sopra si è veduto,] e l'uno è uguale al quadrato $MNOP = Q$, mentre l'altro è uguale al quadrato $RNTS = q$ [secondo la costruzione eseguita], pure ciascuno dei due quadrati Q, q è area razionale, vale a dire che è area razionale il quadrato di ciascuna delle due rette MN, RN; quindi anche ciascuna delle due rette MN, RN è razionale. Di nuovo, poiché il rettangolo $EGKH$ è area mediale, [come pure si è visto sopra,] ed esso è uguale a $RNOV = q + r$, è area mediale pure $RNOV$. Poiché dunque $RNOV = q + r$ è area mediale e $RNTS = q$ è area razionale, $RNOV$ è incommensurabile con $RNTS$. Ma $RNOV$: $: RNTS = NO : NT = MN : RN$ (VI, 1), per cui la retta MN è incommensurabile in lunghezza con la retta RN (X, 11). Ma sono ambedue razionali,[come sopra si è veduto]; quindi MN, RN sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza, e [la loro differenza] MR è un'apotome (X, 73). Ed il suo quadrato $USVP$ è [stato dimostrato] uguale all'area [rettangolare] $ADBC$; perciò la retta il cui quadrato sia uguale all'area [rettangolare] $ADBC$ è un'apotome.

Dunque, se un'area [rettangolare] è compresa da una retta razionale, eccetera.

Applica: I, 31, 43; II, 14; VI, 1, 17, 26, 28; X, 11, 12, 15, 17, 19, 21, 53 lemma, 73.

È applicata in: X, 108.

Proposizione 92.

Se un'area [rettangolare] è compresa da una retta razionale e da una seconda apotome, la retta il cui quadrato sia uguale a quell'area è una prima apotome di mediale.

Infatti, l'area [rettangolare] *ACBD* sia compresa dalla retta razionale *AC* e dalla seconda apotome *AD*; dico che la retta il cui quadrato sia uguale all'area *ACBD* è una prima apotome di mediale.

Sia difatti *DG* che risulta aggiungersi ad *AD*[, essendo la seconda apotome *AD* generata come differenza fra le due rette *AG*, *DG*]; quindi *AG*, *DG* sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza (X, 73), e la retta congruente *DG* è inoltre commensurabile [in lunghezza] con la retta *AC* che si è assunta come razionale, mentre il quadrato di tutta quanta *AG* supera il quadrato della congruente *DG* del quadrato di una retta commensurabile in lunghezza con *AG* (X, deff. terze, II). Ora, poiché il quadrato di *AG* supera quello di *DG* del quadrato di una retta commensurabile in lunghezza con *AG*, se si applica [ellitticamente] ad *AG* un rettangolo, uguale alla quarta parte del quadrato di *DG* e mancante di un quadrato, esso divide *AG* in parti commen-

surabili [in lunghezza] (X, 17). Si divida dunque *DG* per metà in *E*, si applichi [ellitticamente] ad *AG* un rettangolo, uguale al quadrato di *EG* e mancante di un quadrato (VI, 28), e sia esso il rettangolo avente per dimensioni *AF*, *FG*; perciò *AF* è commensurabile in lunghezza con *FG*. Pure *AG* è quindi commensurabile in lunghezza con ciascuna delle due rette *AF*, *FG* (X, 15). Ma *AG* è razionale ed incommensurabile in lunghezza con *AC* [essendo $AD = AG - DG$ una seconda apotome, e perciò essendo *DG*, e non *AG*, commensurabile in lunghezza con la retta razionale *AC*]; pure ognuna delle due rette *AF*, *FG* è perciò razionale ed incommensurabile in lunghezza con *AC* (X, 13); quindi ciascuno dei due rettangoli *AFLC*, *FGKL* è area mediale (X, 21). Di nuovo, poiché *DE*[, essendo uguale ad *EG*,] è commensurabile [in lunghezza] con *EG*, anche [la somma] *DG* è commensurabile [in lunghezza] con ciascuna delle due rette *DE*, *EG* (X, 15). Ma *DG* è commensurabile in lunghezza con *AC*, per cui è razionale e commensurabile in lunghezza con *AC* pure ognuna delle due rette *DE*, *EG*. Quindi ognuno dei due rettangoli *DEHB*, *EGKH* è razionale (X, 19).

Si costruisca ora[, come nella proposizione precedente X, 91,] il quadrato *MNOP* [detto *Q*], uguale al rettangolo *AFLC*, e se ne sottragga il quadrato *RNTS* [detto *q*], uguale al rettangolo *FGKL* ed avente lo stesso angolo [retto] di *MNOP*, cioè *MNO*; i quadrati $MNOP = Q$, $RNTS = q$ sono quindi disposti intorno alla medesima diagonale (VI, 26). Sia *NP* la loro diagonale, e si descriva la figura (cfr. II, 7). Poiché dunque i rettangoli *AFLC*, *FGKL* sono aree mediali e sono uguali ai quadrati *Q*, *q* pure i quadrati *Q*, *q* sono aree mediali, per cui anche [i loro lati] *MN*, *RN* sono rette mediali commensurabili soltanto in potenza[33].

[33] C'è qui una evidente « pecca » del testo (della quale sembra si sia già avveduto Teone: cfr. HEATH, vol. III, p. 197). A questo punto, infatti, si è soltanto dimostrato che sono comm.li i quadrati *Q*, *q*, e quindi che i loro lati *MN*, *RN* sono comm.li *almeno* in potenza (s'è veduto, infatti, che *AF* è comm.le in lunghezza con *FG*, e se ne ricava subito che *AFLC* è comm.le con *FGKL*, ossia che *Q* è comm.le con *q*). Che poi *MN*, *RN* siano incomm.li in lunghezza verrà dimostrato sol-

E poiché il rettangolo di AF, FG è uguale al quadrato di EG [per l'applicazione ellittica eseguita], si ha: $AF : EG = EG : FG$ (VI, 17); ma $AF : EG = AFLC : EGKH$ (VI, 1), ed $EG : FG = EGKH : FGKL$ (id.); si ha perciò [che $AFLC : EGKH = EGKH : FGKL$ (V, 11), ossia] che il rettangolo $EGKH$ è medio proporzionale fra i rettangoli $AFLC$, $FGKL$. Ma è anche medio proporzionale il rettangolo $RNOV$ fra i quadrati $MNOP = Q$, $RNTS = q$, ed il rettangolo $AFLC$ è d'altra parte uguale al quadrato Q, mentre il rettangolo $FGKL$ è uguale al quadrato q; sono quindi uguali pure i rettangoli $RNOV = q + r$, $EGKH$[, data l'unicità del medio proporzionale]. Ma il rettangolo $DEHB$ è uguale al rettangolo $EGKH$, mentre il rettangolo $RNOV$ è uguale a quello $MNTU$[, essendo $RNOV$ uguale a $q + r$, e $MNTU$ a $r + q$]; perciò tutto quanto il rettangolo $DGKB$ è uguale al gnomone $MNOVSUM$ più il quadrato $RNTS$[, cioè a $r + q + r + q$]. Ora, poiché tutto quanto il rettangolo $AGKC$ è uguale alla somma dei quadrati $MNOP = Q$, $RNTS = q$, [cioè $2r + 2q + q(US)$,] e di tali aree il rettangolo $DGKB$ è uguale alla somma del gnomone $MNOVSUM$ e di $RNTS$, [cioè $2r + 2q$,] l'area $ADBC$ che rimane[, sottraendo da $AGKB$ il rettangolo $DGKB$,] è uguale al quadrato $USVP$. Ma $USVP$ è il quadrato di [US =] MR; il quadrato di MR è perciò uguale all'area $ADBC$, e dunque MR è la retta il cui quadrato è uguale all'area $ADBC$. [Tutto ciò è come dire: ai due rettangoli $AFLC$, $FGKL$ essendo rispettivamente uguali i due quadrati $MNOP = Q$ e $RNTS = q$, si ha quindi: $Q : EGKH = EGKH : q$. Ma anche il rettangolo $RNOV = q + r$ è medio proporzionale fra Q e q (cfr. lemma suc-

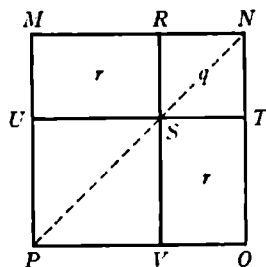
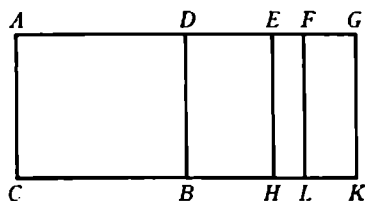
tanto alla fine della proposizione: risulterà pertanto allora che sono comm.li *soltanto* in potenza. Osserviamo che basterebbe dunque sostituire alla parola μόνον (« soltanto ») quella corrispondente alla nostra parola « almeno » perché tutto andasse a posto, a prescindere dalla omissione del passaggio dal rapporto $AF : FG$ tra le basi a quello uguale $AFLC : FGKL$ tra i rettangoli di uguale altezza. Tale « passaggio » si trova, del resto, nei passi paralleli X, 93, 94, 96.

Avvertiamo poi che per la parte immediatamente seguente del testo il lettore troverà poco dopo, tra parentesi quadre, una specie di parafrasi facilitata.

cessivo alla proposizione X, 53). Segue: $EGKH = q + r = RNOV$. Ma per la I, 43 risultano uguali i due rettangoli $MNTU$ e $RNOV$, ambedue uguali a $(q + r)$. Quindi il doppio di $EGKH$, ossia il rettangolo $DGKB$, è uguale al doppio di $(q + r)$, ossia a $q + r + q + r$. Si ha dunque che $DGKB$ è uguale al gnomone costituito da $r + q + r$, cioè $MNOVSUM$ con l'aggiunta di $q = RNTS$, cioè: $DGKB =$ gnomone $+ q$. Ma $AGKC = Q + q$, per cui $AGKC - DGKB = Q -$ gnomone, ossia: $ADBC = USVP = q(MR)$.]

Dico adesso che MR è una prima apotome di mediale.

Infatti, poiché il rettangolo $EGKH$[, come si è visto,] è area razionale ed è uguale al rettangolo $RNOV = q + r$, si ha che il rettangolo $RNOV$, vale a dire il rettangolo [di RN, NO, ossia] di RN, MN, è razionale. Ma fu dimostrato che $RNTS = q$ è area mediale; quindi $RNOV$ è incommensurabile con $RNTS$. Ma $RNOV : RNTS [= NO : NT] = MN : RN$ (VI, 1); quindi MN, RN sono rette incommensurabili in lunghezza (X, 11). Perciò MN, RN sono rette mediali commensurabili soltanto in potenza e comprendono un'area razionale; [la loro differenza] MR è quindi una prima apotome di mediale (X, 74), ed il suo quadrato è uguale all'area $ADBC$.

Dunque, la retta il cui quadrato sia uguale all'area [rettangolare] $ADBC$ è una prima apotome di mediale. – C.D.D.

APPLICA: V, 11; VI, 1, 28; X, 11, 13, 15, 17, 19, 53 lemma, 73, 74.

È APPLICATA IN: X, 109, 114.

PROPOSIZIONE 93.

Se un'area [rettangolare] è compresa da una retta razionale e da una terza apotome, la retta il cui quadrato sia uguale a quell'area è una seconda apotome di mediale.

Infatti, l'area [rettangolare] *ACBD* sia compresa dalla retta razionale *AC* e dalla terza apotome *AD*; dico che la retta il cui quadrato sia uguale all'area *ACBD* è una seconda apotome di mediale.

Sia difatti *DG* che risulta aggiungersi ad *AD*[, essendo la terza apotome *AD* generata come differenza fra le due rette *AG*, *DG*]; quindi *AG*, *DG* sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza (X, 73), nessuna delle due rette *AG*, *DG* è commensurabile in lunghezza con la retta *AC* che si è assunta come razionale, ed il quadrato della retta totale *AG* supera [infine] quello della congruente *DG* del quadrato di una retta commensurabile [in lunghezza] con *AG* (X, deff. terze, III). Ora, poiché il quadrato di *AG* supera quello di *DG* del quadrato di una retta commensurabile [in lunghezza] con *AG*, se si applica [ellitticamente] ad *AG* un rettangolo, uguale alla quarta parte del quadrato di *DG* e mancante di un quadrato, esso dividerà *AG* in parti commensurabili [in lunghezza] (X, 17). Si divida dunque *DG* per metà in *E*, si applichi [ellitticamente] ad *AG* un rettangolo, uguale al quadrato di *EG* e mancante di un quadrato (VI, 28), e sia esso il rettangolo avente per dimensioni *AF*, *FG*. Per i punti *E*, *F*, *G* si conducano *EH*, *FL*, *GK* parallele ad *AC* [fino a incontrare il prolungamento di *CB*]; le rette *AF*, *FG* sono quindi commensurabili in lunghezza; è perciò commensurabile pure il rettangolo *AFLC* con quello *FGKL* (VI, 1; X, 11). E poiché *AF*, *FG* sono commensurabili in lunghezza, anche *AG* è commensurabile in lunghezza con ciascuna delle due rette *AF*, *FG* (X, 15). Ma *AG* è razionale ed è incommensurabile in lunghezza con *AC*, cosicché tali sono pure *AF*, *FG* (X, 13). Quindi ognuno dei due rettangoli *AFLC*, *FGKL* è area mediale (X, 21). Di nuovo, poiché *DE* è commensurabile in lunghezza con *EG*

[ad essa uguale], anche [la somma] *DG* è commensurabile in lunghezza con ciascuna delle due rette *DE*, *EG* (X, 15). Ma *DG* è razionale ed incommensurabile in lunghezza con *AC*; ciascuna delle due rette *DE*, *EG* è perciò razionale ed incommensurabile in lunghezza con *AC* (X, 13), per cui ognuno dei due rettangoli [uguali] *DEHB*, *EGKH* è area mediale (X, 21). E poiché *AG*, *DG* sono commensurabili soltanto in potenza, *AG* è incommensurabile in lunghezza con *DG*. Ma *AG* è commensurabile in lunghezza con *AF*, e *DG* lo è con *EG*; perciò *AF* è incommensurabile in lunghezza con *EG* (X, 13). Ma $AF : EG = AFLC : EGKH$ (VI, 1); quindi il rettangolo *AFLC* è incommensurabile col rettangolo *EGKH* (X, 11).

[Si esegua ora la stessa costruzione del quadrato *MNOP* uguale al rettangolo *AFLC*, e del quadrato *RNTS* uguale al rettangolo *FGKL*, come nelle proposizioni X, 91 e 92, e si completi la figura come nelle proposizioni suddette. Se ne ricavano le stesse conseguenze: così il quadrato *USVP*, avente il lato $US = MR$, è uguale al rettangolo *ADBC*.][a]

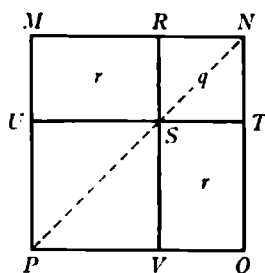
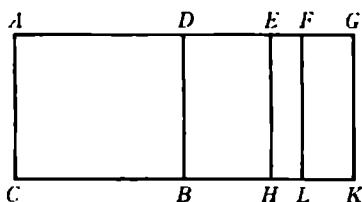
Dico [adesso] che *MR* è una seconda apotome di mediale.

Infatti, poiché fu dimostrato che le aree *AFLC*, *FGKL* sono mediali ed esse sono [rispettivamente] uguali ai quadrati di *MN*, *RN*, pure ognuno dei quadrati di *MN*, *RN* è area mediale; quindi ciascuna delle due rette *MN*, *RN* è mediale. E poiché il rettangolo *AFLC* è commensurabile con quello *FGKL* (VI, 1; X, 11), anche il quadrato di *MN* è commensurabile con quello di *RN*. Di nuovo, poiché fu dimostrato che l'area *AFLC* è incommensurabile con quella *EGKH*, anche il quadrato *MNOP*[, cioè il quadrato di *MN*,] è incommensurabile col rettangolo *RNOV* [che si è dimostrato, nelle propp. X, 91 e 92, essere uguale al rettangolo *EGKH*]; cosicché sono pure incommensurabili in lunghezza [le basi] *MN*, *RN* (VI, 1; X, 11), e quindi *MN*, *RN* sono rette mediali commensurabili soltanto in potenza.

a. Il brano fra parentesi quadre riassume quanto Euclide espone nel testo con le stesse parole usate nelle propp. X, 91 e 92. Lo stesso procedimento adotteremo in séguito.

Dico ora che comprendono inoltre un'area mediale.

Infatti, poiché fu dimostrato che il rettangolo *EGKH* è area mediale, ed *EGKH* è d'altra parte uguale al rettangolo [*RNOV*, cioè al rettangolo] di *MN*, *RN*, è area mediale pure il rettangolo di *MN*, *RN*, cosicché *MN*, *RN* sono rette mediali commensurabili soltanto in potenza e comprendenti un'area mediale. Quindi [la loro differenza] *MR* è una seconda apotome di mediale (X, 75), ed il suo quadrato è uguale all'area *ADBC*.

Dunque, la retta il cui quadrato sia uguale all'area [rettangolare] *ADBC* è una seconda apotome di mediale. – C.D.D.

APPLICA: VI, 1, 28; X, 11, 13, 15, 17, 21, 73, 75.

È APPLICATA IN: X, 110.

PROPOSIZIONE 94.

Se un'area [rettangolare] è compresa da una retta razionale e da una quarta apotome, la retta il cui quadrato sia uguale a quell'area è una « minore ».

Infatti, l'area [rettangolare] *ACBD* sia compresa dalla retta razionale *AC* e dalla quarta apotome *AD*; dico che la retta il cui quadrato sia uguale all'area *ACBD* è una « *minore* ».

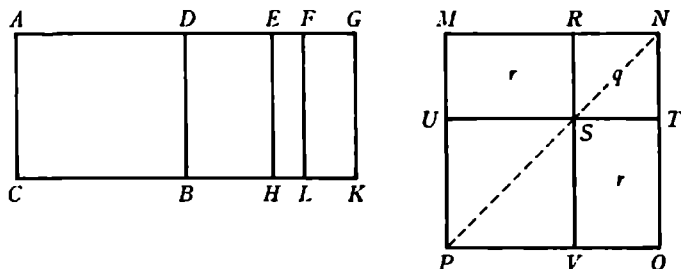
Sia difatti *DG* che risulta aggiungersi ad *AD*[, essendo la quarta apotome *AD* generata come differenza fra le due rette *AG*, *DG*]; quindi *AG*, *DG* sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza (X, 73), ed inoltre [la retta totale] *AG* è commensurabile in lunghezza con la retta *AC*

che si è assunta come razionale, mentre il quadrato della retta totale *AG* supera quello della [congruente] *DG* del quadrato di una retta incommensurabile in lunghezza con *AG* (X, deff. terze, IV). Ora, poiché il quadrato di *AG* supera quello di *DG* del quadrato di una retta incommensurabile in lunghezza con *AG*, se ad *AG* si applica [ellitticamente] un rettangolo, uguale alla quarta parte del quadrato di *DG* e mancante di un quadrato, esso dividerà *AG* in parti incommensurabili [in lunghezza] (X, 18). Si divida dunque *DG* per metà in *E*, si applichi [ellitticamente] ad *AG* un rettangolo, uguale al quadrato di *EG* e mancante di un quadrato (VI, 28), e sia esso il rettangolo avente per dimensioni *AF*, *FG*; quindi *AF* è incommensurabile in lunghezza con *FG* (X, 18). Per i punti *E*, *F*, *G* si conducano *EH*, *FL*, *GK* parallele ad *AC* [fino ad incontrare il prolungamento di *CB*]. Poiché dunque *AG* è razionale e commensurabile in lunghezza con *AC*, tutta quanta l'area *AGKC* [cioè il rettangolo *AGKC*,] è razionale (X, 19). Di nuovo, poiché *DG* è incommensurabile in lunghezza con [*AG*, e quindi con] *AC* [= *DB*], e [*DG*, *DB*] sono ambedue rette razionali [commensurabili perciò soltanto in potenza], il rettangolo *DGKB* è un'area mediale (X, 21). Di nuovo, poiché *AF* è incommensurabile in lunghezza con *FG*, è incommensurabile anche il rettangolo *AFLC* con quello *FGKL* (VI, 1; X, 11). [Si esegua ora la stessa costruzione del quadrato *MNOP* uguale al rettangolo *AFLC*, e del quadrato *RNTS* uguale al rettangolo *FGKL*, come nelle propp. X, 91, 92 e 93, e si completi la figura come nelle proposizioni suddette. Se ne ricavano le stesse conseguenze: così il quadrato *USVP*, avente il lato *US* = *MR*, è uguale al rettangolo *ADBC*.]

Dico [adesso] che *MR* è la retta irrazionale che si chiama « *minore* ».

Infatti, poiché il rettangolo *AGKC* è area razionale ed è uguale alla somma dei quadrati di *MN*, *RN*, la somma dei quadrati di *MN*, *RN* è razionale. Di nuovo, poiché il rettangolo *DGKB* è area mediale, ed è uguale al doppio del rettangolo di *NO*, *RN*, ossia al doppio del rettangolo

di *MN*, *RN*, quest'ultimo rettangolo è area mediale. E poiché fu dimostrato che il rettangolo *AFLC* è incommensurabile col rettangolo *FGKL*, anche il quadrato di *MN* è incommensurabile col quadrato di *RN*. Perciò *MN*, *RN* sono rette incommensurabili in potenza e tali che la somma dei loro quadrati è un'area razionale, ed area mediale, invece, è il doppio del rettangolo da esse compreso. Quindi [la loro differenza] *MR* è la retta irrazionale che si chiama «*minore*» (X, 76), ed il suo quadrato è uguale all'area *ADBC*.

Dunque, la retta il cui quadrato sia uguale all'area [rettangolare] *ADBC* è una «*minore*». – C.D.D.

APPLICA: VI, 1, 28; X, 11, 18, 19, 73, 76.

È APPLICATA IN: X, 108; XIII, 11.

PROPOSIZIONE 95.

Se un'area [rettangolare] è compresa da una retta razionale e da una quinta apotome, la retta il cui quadrato sia uguale a quell'area è una retta [irrazionale] «potenziante la differenza fra un'area mediale ed un'area razionale».

Infatti, l'area [rettangolare] *ACBD* sia compresa dalla retta razionale *AC* e dalla quinta apotome *AD*; dico che la retta il cui quadrato sia uguale all'area in questione è una retta [irrazionale], il cui quadrato è differenza fra un'area mediale ed un'area razionale (X, 77).

Sia difatti *DG* che risulta aggiungersi ad *AD*[, essendo la quinta apotome *AD* generata come differenza fra le due

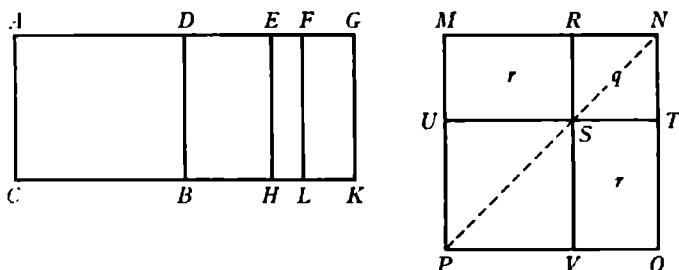
rette *AG*, *DG*]; quindi *AG*, *DG* sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza (X, 73), ed inoltre la retta congruente *DG* è commensurabile in lunghezza con la retta *AC* che si è assunta come razionale, mentre il quadrato della retta totale *AG* supera quello della congruente *DG* del quadrato di una retta incommensurabile [in lunghezza] con *AG* (X, deff. terze, V). Se quindi si applica [ellitticamente] ad *AG* un rettangolo, uguale alla quarta parte del quadrato di *DG* e mancante di un quadrato, esso dividerà *AG* in parti incommensurabili [in lunghezza] (X, 18). Si divida dunque *DG* per metà nel punto *E*. Si applichi [ellitticamente] ad *AG* un rettangolo, uguale al quadrato di *EG* e mancante di un quadrato, e sia esso il rettangolo avente per dimensioni *AF*, *FG* (VI, 28); quindi *AF* è incommensurabile in lunghezza con *FG* (X, 18). E poiché *AG* è incommensurabile in lunghezza con *AC*, ed ambedue sono rette razionali, il rettangolo *AGKC* è area mediale (X, 21). Di nuovo, poiché *DG* è razionale e commensurabile in lunghezza con *AC*, il rettangolo *DGKB* è area razionale (X, 19). Si costruisca adesso il quadrato *MNOP*, uguale al rettangolo *AFLC*, e se ne sottragga il quadrato *RNTS*, uguale al rettangolo *FGKL* (II, 14) e con lo stesso angolo[a] *RNT* di *MNOP*; perciò i due quadrati *MNOP*, *RNTS* sono disposti intorno alla medesima diagonale (VI, 26). Sia *NP* la loro diagonale, e si descriva la figura [come nelle precedenti proposizioni X, 91, 92, 93, 94]. Potremo similmente dimostrare che *MN* è la retta il cui quadrato è uguale all'area *ADBC*.

Dico [ora] che *MN* è una retta [irrazionale] « potenziante la differenza fra un'area mediale ed un'area razionale » (X, 77).

Infatti, poiché fu dimostrato che il rettangolo *AGKC* è area mediale, ed esso è uguale alla somma dei quadrati di *MN*, *RN* [come venne appunto dimostrato nelle precedenti citate proposizioni], la somma dei quadrati di *MN*, *RN* è area mediale. Di nuovo, poiché *DGKB* è area razionale

a. Letteralmente: intorno allo stesso angolo.

ed è uguale al doppio del rettangolo di *MN*, *RN*, anche il doppio rettangolo in questione è razionale. E poiché il rettangolo *AFLC* è incommensurabile con quello *FGKL*, pure il quadrato di *MN* è incommensurabile con quello di *RN*; quindi *MN*, *RN* sono rette incommensurabili in potenza, tali che la somma dei loro quadrati è un'area mediale, ed area razionale, invece, è il doppio del rettangolo da esse compreso. Perciò la [differenza *MN* — *RN*, cioè la] retta rimanente *MR* è la retta irrazionale che si chiama « potenziante la differenza fra un'area mediale ed un'area razionale » (X, 77), ed il suo quadrato è uguale all'area *ADBC*.

Dunque, la retta il cui quadrato sia uguale all'area [rettangolare] *ADBC* è tale che il suo quadrato è uguale alla differenza fra un'area mediale ed un'area razionale. – C.D.D.

APPLICA: II, 14; VI, 26, 28; X, 18, 73, 77.

PROPOSIZIONE 96.

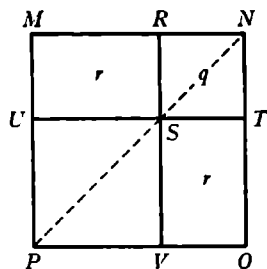
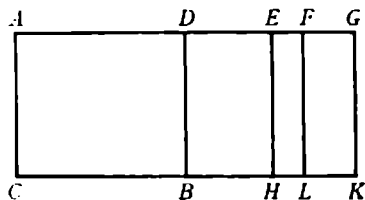
Se un'area [rettangolare] è compresa da una retta razionale e da una sesta apotome, la retta il cui quadrato sia uguale a quell'area è una retta [irrazionale] « potenziante la differenza fra due aree mediali ».

Infatti, l'area [rettangolare] *ACBD* sia compresa dalla retta razionale *AC* e dalla sesta apotome *AD*; dico che la retta il cui quadrato sia uguale all'area *ACBD* è una retta [irrazionale] il cui quadrato è uguale alla differenza fra due aree mediali.

Sia difatti DG che risulta aggiungersi ad AD[, essendo la sesta apotome AD generata come differenza fra le due rette AG, DG]; quindi AG, DG sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza (X, 73), ed inoltre nessuna delle due è commensurabile in lunghezza con la retta AC che si è assunta come razionale, mentre il quadrato della retta totale AG supera quello della retta congruente DG del quadrato di una retta incommensurabile in lunghezza con AG (X, deff. terze, VI). Ora, poiché il quadrato di AG supera quello di DG del quadrato di una retta incommensurabile in lunghezza con AG, se si applica [ellitticamente] ad AG un rettangolo, uguale alla quarta parte del quadrato di DG e mancante di un quadrato, esso dividerà AG in parti incommensurabili [in lunghezza] (X, 18). Si divida dunque DG per metà in E, si applichi [ellitticamente] ad AG un rettangolo, uguale al quadrato di EG e mancante di un quadrato (VI, 28), e sia esso il rettangolo avente per dimensioni AF, FG; quindi AF è incommensurabile in lunghezza con FG. Ma $AF : FG = AFLC : FGKL$ (VI, 1), per cui il rettangolo $AFLC$ è incommensurabile con quello $FGKL$ (X, 11). E poiché AG, DG sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza, il rettangolo $AGKC$ è area mediale (X, 21). Di nuovo, poiché AC, DG sono rette razionali, ed incommensurabili in lunghezza, pure il rettangolo $DGKB$ è area mediale (id.). Poiché dunque AG, DG sono commensurabili soltanto in potenza, AG è incommensurabile in lunghezza con DG. Ma $AG : DG = AGKC : DGKB$ (VI, 1); perciò [i due rettangoli] $AGKC$, $DGKB$ sono incommensurabili (X, 11). Si costruisca adesso il quadrato $MNOP$, uguale al rettangolo $AFLC$, e se ne sottragga il quadrato $RNTS$, uguale al rettangolo $FGKL$ (II, 14) e con lo stesso angolo RNT di $MNOP$, per cui i quadrati $MNOP$, $RNTS$ sono disposti intorno alla medesima diagonale (VI, 26). Sia NP la loro diagonale, e si descriva la figura (cfr. II, 7). Potremo dimostrare similmente a quanto fatto sopra[, cioè nelle precedenti proposizioni X, 91, 92, 93, 94, 95,] che MR è una retta il cui quadrato è uguale all'area $ADBC$.

Dico [ora] che *MR* è una retta [irrazionale] « potenziante la differenza fra due aree mediali ».

Infatti, poiché fu dimostrato che il rettangolo *AGKC* è area mediale, ed esso è uguale alla somma dei quadrati di *MN*, *RN*, la somma dei quadrati di *MN*, *RN* è area mediale. Di nuovo, poiché fu dimostrato che [anche] il rettangolo *DGKB* è area mediale, ed esso è uguale al doppio del rettangolo [di *NO*, *RN*, ossia] di *MN*, *RN*, è area mediale pure il doppio del rettangolo di *MN*, *RN*. Ora, poiché il rettangolo *AFLC* è[, come si è dimostrato,] incommensurabile con quello *FGKL*, anche il quadrato di *MN* è incommensurabile con quello di *RN*, per cui *MN*, *RN* sono rette incommensurabili in potenza e tali[, come si è visto,] che la somma dei loro quadrati è un'area mediale, è area mediale pure il doppio del rettangolo da esse compreso, ed infine la somma dei loro quadrati è incommensurabile col doppio di tale rettangolo. Perciò [la loro differenza *MN* — *RN* =]*MR* è la retta irrazionale che si chiama « potenziante la differenza fra due aree mediali » (X, 78), ed il suo quadrato è uguale all'area *ADBC*.

Dunque, la retta il cui quadrato sia uguale all'area suddetta è una retta [irrazionale] il quadrato della quale è uguale alla differenza fra due aree mediali. – C.D.D.

APPLICA: II, 14; VI, 11, 26, 28; X, 18, 21, 73, 78.

È APPLICATA IN: X, 110.

PROPOSIZIONE 97.

Il quadrato di un'apotome, applicato ad una retta razionale, forma [un rettangolo avente] per altezza una prima apotome.

Siano *AB* un'apotome e *CD* una retta razionale, e si applichi a *CD* il rettangolo *CDEF*, uguale al quadrato dell'apotome *AB* e che formi *CF* quale altezza (I, 44-45); dico che *CF* è una prima apotome.

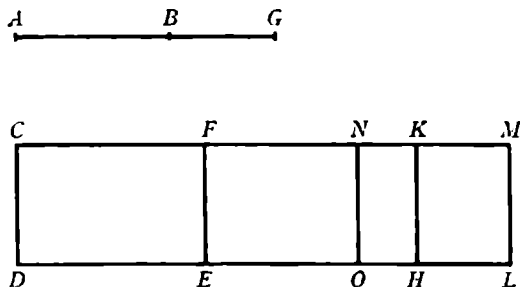
Infatti, sia *BG* che risulta aggiungersi ad *AB*[, essendo l'apotome *AB* generata come differenza fra le due rette *AG*, *BG*]; quindi *AG*, *BG* sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza (X, 73). Ora, a *CD* si applichi [anche] il rettangolo *CDHK*, uguale al quadrato della retta [totale] *AG*, ed a [$KH =$] *CD* si applichi il rettangolo *KHLM*, uguale al quadrato della retta [congruente] *BG*. Tutto quanto il rettangolo *CDLM* è perciò uguale alla somma dei quadrati di *AG*, *BG*, e di tali aree *CDEF* è uguale al quadrato di *AB*; [ma si ha: $q(AB) + 2r(AG, BG) = q(AG) + q(BG)$ (II, 7);] quindi la [parte] *FELM* che rimane[, tolto $CDEF = q(AB)$,] è uguale al doppio del rettangolo di *AG*, *BG*. Si divida *FM* per metà nel punto *N*, e per *N* si conduca *NO* parallela a *CD* (I, 31); ciascuno dei due rettangoli *FEON*, *NOLM* è perciò uguale al rettangolo di *AG*, *BG*. Ma poiché la somma dei quadrati di *AG*, *BG* è razionale [dal momento che *AG*, *BG* sono rette razionali], e [tutto il rettangolo] *CDLM* è uguale alla somma dei quadrati di *AG*, *BG*, il rettangolo *CDLM* è area razionale. Ed è applicato alla retta razionale *CD*, formando [un rettangolo dal]l'altezza *CM*; quindi *CM* è una retta razionale e commensurabile in lunghezza con *CD* (X, 20). Di nuovo, poiché il doppio rettangolo $2r(AG, BG)$ è area mediale, [dato che *AG*, *BG* sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza (X, 73, X, 21, X, 23),] e l'area *FELM* è uguale a $2r(AG, BG)$, il rettangolo *FELM* è area mediale. Ed è applicato alla retta razionale [$FE =$] *CD*, formando [un rettangolo dal]l'altezza *FM*, per cui *FM* è una retta razionale

ed incommensurabile in lunghezza con CD (X, 22). Ora, poiché la somma dei quadrati $q(AG) + q(BG)$ è area razionale, mentre il doppio rettangolo $2r(AG, BG)$ è area mediale, la somma $q(AG) + q(BG)$ è incommensurabile con $2r(AG, BG)$. Ma $CDLM$ è uguale a $q(AG) + q(BG)$, mentre a $2r(AG, BG)$ è uguale $FELM$; perciò il rettangolo $CDLM$ è incommensurabile col rettangolo $FELM$. Ma $CDLM : FELM = CM : FM$ (VI, 1). Quindi CM è incommensurabile in lunghezza con FM (X, 11). Ma CM, FM[, come si è sopra veduto,] sono ambedue razionali; dunque CM, FM sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza, e [la loro differenza] CF è un'apotome (X, 73).

Dico adesso che CF è anche una prima apotome.

Infatti, poiché il rettangolo di AG, BG è medio proporzionale fra i quadrati di AG, BG, [ossia: $q(AG) : r(AG, BG) = r(AG, BG) : q(BG)$] (X, 21, lemma), ed inoltre il rettangolo $CDHK$ è uguale al quadrato di AG, quello $KHLM$ è uguale al quadrato di BG, e quello $NOLM$ al rettangolo di AG, BG, si ha che $NOLM$ è medio proporzionale fra $CDHK$, $HKLM$, e perciò $CDHK : NOLM = NOLM : HKLM$. Ma $CDHK : NOLM = CK : NM$ (VI, 1), e $NOLM : HKLM = NM : KM$ (id.); quindi [$CK : NM = NM : KM$ (V, 11), ed] il rettangolo $r(CK, KM)$ è uguale al quadrato $q(NM)$ (VI, 17), vale a dire alla quarta parte del quadrato di FM. E poiché il quadrato di AG è commensurabile con quello di BG, anche $CDHK$ è commensurabile con $KHLM$. Ma [si ha:] $CDHK : KHLM = CK : KM$ (VI, 1), per cui CK è commensurabile [in lunghezza] con KM (X, 11). Poiché dunque CM, FM sono due rette disuguali, [delle quali CM è maggiore di FM,] risulta applicato [ellitticamente] a CM il rettangolo di CK, KM, uguale [al quadrato di NM, ossia] alla quarta parte del quadrato di FM e mancante di un quadrato, e CK è commensurabile [in lunghezza] con KM, [come si è poco sopra veduto,] il quadrato di CM supera quello di FM del quadrato di una retta commensurabile in lunghezza con CM (X, 17). Ma CM è commensurabile in lunghezza con la retta CD che si è assunta come razionale;

quindi CF è una prima apotome (X, deff. terze, I)[, essendosi verificate tutte le condizioni richieste dalla definizione].

Dunque, il quadrato di un'apotome... (secondo l'enunciato). - C.D.D.

APPLICA: I, 31, 44-45; II, 7; VI, 1, 17; X, 11, 17, 20, 21, 21 lemma, 22, 23, 73.

È APPLICATA IN X, 111, 111 scolio; XIII, 6.

PROPOSIZIONE 98.

Il quadrato di una prima apotome di mediale, applicato ad una retta razionale, forma [un rettangolo avente] per altezza una seconda apotome.

Siano AB una prima apotome di mediale, CD una retta razionale, ed a CD si applichi il rettangolo $CDEF$, uguale al quadrato di AB e che formi CF quale altezza (I, 44-45); dico che CF è una seconda apotome.

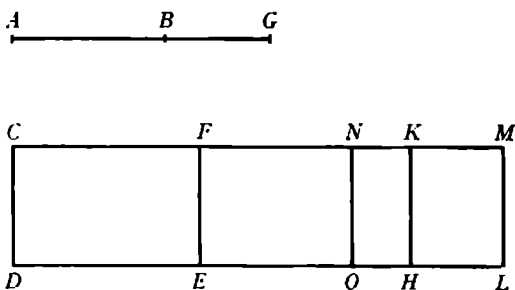
Infatti, sia BG che risulta aggiungersi ad AB[, essendo la prima apotome di mediale AB generata come differenza fra le due rette mediali AG, BG]; quindi AG, BG sono rette mediali commensurabili soltanto in potenza e comprendenti un'area razionale (X, 74). Ora, a CD si applichi il rettangolo $CDHK$, uguale al quadrato di AG e che forma così l'altezza CK; si applichi inoltre a [$KH =$] CD il rettangolo $KHLM$, uguale al quadrato di BG e formante l'altezza KM (I, 44-45): tutto quanto il rettangolo $CDLM$ è perciò uguale alla somma dei quadrati di AG, BG, per cui si ha anche che $CDLM$ è area mediale (X, 15 e 23, coroll.). Ed esso è

applicato alla retta razionale CD, formando [un rettangolo dal]l'altezza CM; quindi CM è una retta razionale, ed incommensurabile in lunghezza con CD (X, 22). E poiché $CDLM$ è uguale alla somma dei quadrati $q(AG) + q(BG)$, [e si ha: $q(AB) + 2r(AG, BG) = q(AG) + q(BG)$ (II, 7), si ha anche che $CDLM$ è uguale alla somma $q(AB) + 2r(AG, BG)$;] ma [dato che in tali aree] il quadrato $q(AB)$ è uguale al rettangolo $CDEF$, il doppio $2r(AG, BG)$, che così rimane, è uguale a [$CDLM - CDEF$, cioè è uguale a] $FELM$. Ma il doppio del rettangolo di AG, BG è area razionale[, data la definizione di prima apotome di mediale,] per cui $FELM$ è area razionale. Ed è applicato alla retta razionale $FE[= CD]$, formando [un rettangolo dal]l'altezza FM; quindi anche FM è una retta razionale, e commensurabile in lunghezza con CD (X, 20). Poiché dunque la somma dei quadrati $q(AG) +$ $+ q(BG)$, vale a dire[, come si è sopra veduto,] il rettangolo $CDLM$ [ad essa uguale], è area mediale, ed è invece area razionale il doppio $2r(AG, BG)$, vale a dire il rettangolo $FELM$, si ha che $CDLM$ è incommensurabile con $FELM$. Ma $CDLM : FELM = CM : FM$ (VI, 1); quindi la retta CM è incommensurabile in lunghezza con la retta FM (X, 11). Ma ambedue sono razionali; dunque CM, FM sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza, e [la loro differenza] CF è un'apotome (X, 73).

Dico adesso che è anche una seconda apotome.

Infatti, si divida FM per metà in N, e per N si conduca NO parallela a CD; ciascuno dei due rettangoli $FEON$, $NOLM$ è perciò uguale al rettangolo di AG, BG. E poiché il rettangolo di AG, BG è medio proporzionale fra i quadrati di AG, BG[, ossia: $q(AG) : r(AG, BG) = r(AG, BG) : q(BG)$,] (X, 21, lemma), ed il quadrato $q(AG)$ è uguale al rettangolo $CDHK$, mentre il rettangolo $r(AG, BG)$ è uguale a quello $NOLM$, ed il quadrato $q(BG)$ è uguale al rettangolo $KHLM$, si ha che pure $NOLM$ è medio proporzionale fra $CDHK$, $KHLM$, e quindi $CDHK : NOLM = NOLM : KHLM$. Ma $CDHK : NOLM = CK : NM$, e $NOLM : KHLM = NM :$ $: MK$ (VI, 1), per cui (V, 11): $CK : NM = NM : MK$; il rettangolo di CK, KM è perciò uguale al quadrato di NM

(VI, 17), vale a dire alla quarta parte del quadrato di *FM*. Poiché dunque *CM*, *FM* sono due rette disuguali, ed alla maggiore *CM* risulta applicato [ellitticamente] il rettangolo di *CK*, *KM*, uguale alla quarta parte del quadrato della retta [minore] *FM* e mancante di un quadrato, ed esso divide *CM* in parti[, cioè *CK*, *KM*,] commensurabili [in lunghezza] [34], il quadrato di *CM* supera quello di *FM* del quadrato di una retta commensurabile in lunghezza con *CM* (X, 17). Ma la retta congruente *FM* è[, come si è sopra veduto,] commensurabile in lunghezza con la retta *CD* che si è assunta come razionale; quindi *CF* è una seconda apotome (X, deff. terze, II)[, essendosi verificate tutte le condizioni richieste dalla definizione].

Dunque, il quadrato di una prima apotome di mediale... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 44-45; II, 7; V, 11; VI, 17; X, 15, 17, 23 coroll., 73, 74.

È APPLICATA IN: X, 111 scolio.

PROPOSIZIONE 99.

Il quadrato di una seconda apotome di mediale, applicato ad una retta razionale, forma [un rettangolo avente] per altezza una terza apotome.

Siano *AB* una seconda apotome di mediale, *CD* una retta razionale, ed a *CD* si applichi il rettangolo *CDEF*,

[34] Heiberg aggiunge la spiegazione: infatti $q(AG)$ e $q(BG)$ sono commensurabili, e: $q(AG) : q(BG) = CDHK : KHLM = CK : KM$; dunque anche *CK*, *KM* sono commensurabili, come $q(AG)$ e $q(BG)$.

uguale al quadrato di *AB* e che formi *CF* quale altezza; dico che *CF* è una terza apotome.

Infatti, sia *BG* che risulta aggiungersi ad *AB*[, essendo la seconda apotome di mediale *AB* generata come differenza fra le due rette mediali *AG*, *BG*]; quindi *AG*, *BG* sono rette mediali commensurabili soltanto in potenza e comprendenti un'area mediale (X, 75). Ora, si applichi a *CD* il rettangolo *CKHD*, uguale al quadrato della retta [totale] *AG* e che forma così l'altezza *GK*, ed a *KH* si applichi il rettangolo *KHLM*, uguale al quadrato della retta [congruente] *BG* e che forma l'altezza *KM*; tutto quanto il rettangolo *CDLM* è perciò uguale alla somma dei quadrati di *AG*, *BG*, [che sono rette mediali,][a] per cui [anche] *CDLM* è area mediale (X, 15 e 23, coroll.). Ed esso è applicato alla retta razionale *CD*, formando l'altezza *CM*; quindi *CM* è una retta razionale ed incommensurabile in lunghezza con *CD* (X, 22). E poiché tutto quanto *CDLM* è uguale alla somma dei quadrati di *AG*, *BG*, ma, di tali aree, [la parte] *CDEF* è uguale al quadrato di *AB*, si ha che [la parte] *FELM* che rimane è uguale al doppio del rettangolo di *AG*, *BG*[, dato che deve essere: $q(AB) + 2r(AG, BG) = q(AG) + q(BG)$] (II, 7). Si divida dunque *FM* per metà nel punto *N*, e si conduca *NO* parallela a *CD*; ognuno dei due rettangoli *FEON*, *NOLM* è perciò uguale al rettangolo $r(AG, BG)$ di *AG*, *BG*. Ma il rettangolo $r(AG, BG)$ è area mediale; perciò è area mediale pure il rettangolo *FELM*[$= 2FEON$]. Ed esso è applicato alla retta razionale *FE* [$= CD$], formando l'altezza *FM*; quindi anche *FM* è una retta razionale, ed incommensurabile in lunghezza con *CD* (X, 22). E poiché *AG*, *BG* sono commensurabili soltanto in potenza, *AG* è incommensurabile in lunghezza con *BG*; [ma: $AG : BG = q(AG) : r(AG, BG)$ (VI, 1; X, 21, lemma);] perciò anche $q(AG)$ è incommensurabile con $r(AG, BG)$ (X, 11). Ma la somma dei quadrati $q(AG) + q(BG)$ è commensurabile con $q(AG)$, mentre il ret-

a. È omesso da vari codici un passo trovabile nel testo, e che abbiamo sostituito con *che sono rette mediali*: «e sono aree mediali i quadrati di *AG*, *BG*».

tangolo $r(AG, BG)$ è commensurabile col doppio $2r(AG, BG)$; la somma dei quadrati di AG, BG è quindi incommensurabile col doppio del rettangolo di AG, BG (X, 13). Ma [tutto il rettangolo] $CDLM$ è uguale alla somma dei quadrati di AG, BG, mentre al doppio del rettangolo di AG, BG è uguale il rettangolo $FELM$; quindi $CDLM$ è incommensurabile con $FELM$. Ma $CDLM : FELM = CM : FM$ (VI, 1), per cui la retta CM è incommensurabile in lunghezza con la retta FM (X, 11). Ora, ambedue sono razionali; dunque CM, FM sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza, e [la loro differenza] CF è un'apotome (X, 73).

Dico adesso che è anche una terza apotome.

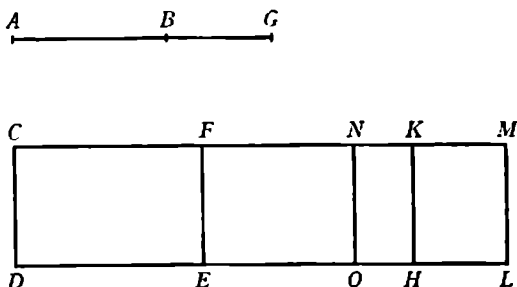
Infatti, poiché il quadrato di AG è commensurabile con quello di BG, pure il rettangolo $CDHK$ è commensurabile con quello $KHLM$; cosicché anche le rette CK, KM sono commensurabili [in lunghezza] (VI, 1; X, 11). E poiché il rettangolo di AG, BG è medio proporzionale fra i quadrati di AG, BG, [ossia: $q(AG) : r(AG, BG) = r(AG, BG) : q(BG)$,] ma $CDHK$ è uguale a $q(AG)$, mentre $KHLM$ è uguale a $q(BG)$, e $NOLM$ è uguale a $r(AG, BG)$, si ha che pure $NOLM$ è medio proporzionale fra $CDHK$, $KHLM$, e quindi $CDHK : NOLM = NOLM : KHLM$. Ma $CDHK : NOLM = CK : NM$, e $NOLM : KHLM = NM : KM$ (VI, 1); quindi $CK : NM = NM : KM$, e di conseguenza il rettangolo di CK, KM è uguale al quadrato di NM, vale a dire[a] alla quarta parte del quadrato di FM. Poiché dunque CM, FM sono due rette disuguali, ed alla retta [maggiore] CM risulta applicato [ellitticamente] un rettangolo [$r(CK, KM)$], uguale alla quarta parte del quadrato della retta [minore] FM e mancante di un quadrato, ed esso divide CM in parti commensurabili [in lunghezza], [cioè CK, KM, come si è sopra dimostrato,] il quadrato di CM supera quello di FM del quadrato di una retta commensurabile in lunghezza con CM. Ma nessuna delle due rette CM, FM è commensurabile in

a. Il codice P sembra dubitare della lezione « al quadrato di *NM*, vale a dire alla quarta parte ». Sarebbe piuttosto, semplicemente: « uguale alla quarta parte del quadrato di *FM* ».

Tavoletta matematica babilonese

(London, British Museum).

lunghezza con la retta *CD* che si è assunta come razionale; quindi *CF* è una terza apotome (X, deff. terze, III)[, essendosi verificate tutte le condizioni richieste dalla definizione].

Dunque, il quadrato di una seconda apotome di mediale... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 44-45; II, 7; VI, 1; X, 11, 13, 15, 22, 23 coroll., 73, 75.

È APPLICATA IN: X, 111, scolio.

PROPOSIZIONE 100.

Il quadrato di una retta [irrazionale detta] « minore », *applicato ad una retta razionale, forma [un rettangolo avente] per altezza una quarta apotome.*

Sia *AB* una retta [irrazionale detta] « *minore* », *CD* sia una retta razionale, ed alla razionale *CD* si applichi il rettangolo *CDEF*, uguale al quadrato di *AB* e che formi *CF* quale altezza (I, 44-45); dico che *CF* è una quarta apotome.

Infatti, sia *BG* che risulta aggiungersi ad *AB*[, essendo la retta « *minore* » *AB* generata come differenza fra le due rette *AG*, *BG*]; quindi *AG*, *BG* sono rette incommensurabili in potenza, tali che la somma dei loro quadrati sia un'area razionale e sia invece area mediale il rettangolo di *AG*, *BG* (X, 76)[a]. Ora, si applichi alla retta [razionale] *CD* il rettangolo *CDHK*, uguale al quadrato di *AG* e che forma così l'altezza *CK*, ed inoltre alla retta [*KH* =] *CD* si applichi il rettangolo *KHLM*, uguale al quadrato di *BG* e che forma

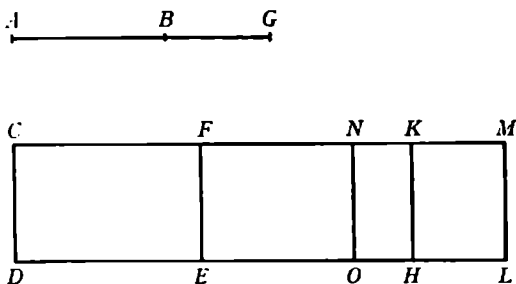
a. Letteralmente: il doppio del rettangolo di *AG*, *BG*.

l'altezza *KM* (I, 44-45); tutto quanto il rettangolo *CDLM* è perciò uguale alla somma dei quadrati di *AG*, *BG*. Ma la somma $q(AG) + q(BG)$ è area razionale [per definizione di retta «*minore*»]; è perciò area razionale pure il rettangolo *CDLM*. Ed esso è applicato alla retta razionale *CD*, formando l'altezza *CM*; quindi *CM* è una retta razionale, e commensurabile in lunghezza con *CD* (X, 20). E poiché tutto quanto il rettangolo *CDLM* è uguale alla somma dei quadrati di *AG*, *BG*, ma, di tali aree, [la parte] *CDEF* è uguale al quadrato di *AB*, [e poiché è: $q(AB) + 2r(AG, BG) = q(AG) + q(BG)$ (II, 7),] il rettangolo *FELM* che così rimane di *CDLM* è uguale a $2r(AG, BG)$. Si divida dunque *FM* per metà nel punto *N* (I, 10), e per *N* si conduca *NO* parallela all'una o all'altra indifferentemente delle due rette *CD*, *ML*; ognuno dei due rettangoli *FEON*, *NOLM* è quindi uguale al rettangolo di *AG*, *BG*. E poiché il doppio del rettangolo di *AG*, *BG* è area mediale [per definizione di retta «*minore*», essendo area mediale il rettangolo $r(AG, BG)$], e poiché il doppio $2r(AG, BG)$ è uguale al rettangolo *FELM*, anche *FELM* è area mediale. Ed esso è applicato alla retta razionale *FE*[$= CD$], formando l'altezza *FM*; quindi *FM* è una retta razionale, ed incommensurabile in lunghezza con *CD* (X, 22). Ma poiché la somma dei quadrati di *AG*, *BG* è area razionale, ed il doppio del rettangolo di *AG*, *BG* è area mediale, la somma dei quadrati di *AG*, *BG* è incommensurabile col doppio del rettangolo di *AG*, *BG*. Ma *CDLM* è uguale alla somma dei quadrati di *AG*, *BG*, mentre al doppio del rettangolo di *AG*, *BG* è uguale *FELM*; perciò *CDLM* è incommensurabile con *FELM* (X, 11). Ma $CDLM : FELM = CM : FM$ (VI, 1), per cui la retta *CM* è incommensurabile in lunghezza con la retta *FM* (X, 11). Ora, ambedue sono razionali; dunque *CM*, *FM* sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza, e [la loro differenza] *CF* è un'apotome (X, 73).

Dico che è anche una quarta apotome.

Infatti, poiché *AG*, *BG* sono rette incommensurabili in potenza, anche il quadrato di *AG* è incommensurabile con quello di *BG*. Ma *CDHK* è uguale al quadrato di *AG*,

mentre al quadrato di BG è uguale $KHLM$; perciò i [due] rettangoli $CDHK$, $KHLM$ sono incommensurabili. Ma $CDHK : KHLM = CK : KM$ (VI, 1); la retta CK è quindi incommensurabile in lunghezza con quella KM (X, 11). E poiché il rettangolo $r(AG, BG)$ è medio proporzionale fra i quadrati $q(AG)$, $q(BG)$ (X, 21, lemma), ma il quadrato di AG è uguale a $CDHK$, il quadrato di BG è uguale a $KHLM$, ed il rettangolo di AG, BG è uguale a $NOLM$, si ha che $NOLM$ è medio proporzionale fra $CDHK$, $KHLM$, e quindi $CDHK : NOLM = NOLM : KHLM$. Ma $CDHK : NOLM = CK : NM$, e $NOLM : KHLM = NM : KM$ (VI, 1); perciò $CK : NM = NM : KM$ (V, 11), ed il rettangolo di CK, KM è così uguale al quadrato di NM (VI, 17), vale a dire alla quarta parte del quadrato di FM. Poiché dunque CM, FM sono due rette disuguali, ed alla retta [maggiore] CM risulta applicato [ellitticamente] il rettangolo di CK, KM, uguale alla quarta parte del quadrato di FM e mancante di un quadrato, ed esso divide CM in parti incommensurabili [in lunghezza, cioè CK, KM, come si è sopra dimostrato], il quadrato di CM supera quello di FM del quadrato di una retta incommensurabile [in lunghezza] con CM (X, 18). Ma tutta quanta la retta CM è commensurabile in lunghezza con la retta CD che si è assunta come razionale; quindi CF è una quarta apotome (X, deff. terze, IV)[, essendosi verificate tutte le condizioni richieste dalla definizione].

Dunque, il quadrato di una retta [irrazionale detta] « *minore* », eccetera.

APPLICA: I, 10, 44-45; II, 7; V, 11; VI, 1, 17; X, 11, 18, 20, 22, 76.
È APPLICATA IN: X, 111 scolio.

PROPOSIZIONE 101.

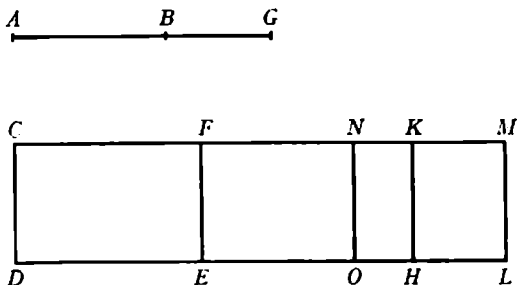
Il quadrato di una retta [irrazionale] « potenziante la differenza fra un'area mediale ed un'area razionale », se applicato ad una retta razionale, forma [un rettangolo avente] per altezza una quinta apotome.

Sia *AB* una retta [irrazionale] « potenziante la differenza fra un'area mediale ed un'area razionale », *CD* sia una retta razionale, ed a *CD* si applichi il rettangolo *CDEF*, uguale al quadrato di *AB* e che formi *CF* quale altezza (I, 44-45); dico che *CF* è una quinta apotome.

Infatti, sia *BG* che risulta aggiungersi ad *AB*[, essendo la retta irrazionale *AB* generata come differenza fra le due rette *AG*, *BG*]; quindi *AG*, *BG* sono rette incommensurabili in potenza, tali che la somma dei loro quadrati è un'area mediale ed è invece area razionale il rettangolo da esse compreso (X, 77). Ora, si applichi alla retta [razionale] *CD* il rettangolo *CDHK*, uguale al quadrato di *AG*, ed a *CD* si applichi [pure] il rettangolo *KHLM*, uguale al quadrato di *BG*; tutto quanto il rettangolo *CDLM* è perciò uguale alla somma dei quadrati di *AG*, *BG* (I, 44-45). Ma la somma dei quadrati di *AG*, *BG* è area mediale, ed è quindi area mediale anche il rettangolo *CDLM*. Ma esso è applicato alla retta razionale *CD*, formando l'altezza *CM*; quindi *CM* è una retta razionale, ed incommensurabile [in lunghezza] con *CD* (X, 22). E poiché tutto quanto il rettangolo *CDLM* è uguale alla somma dei quadrati di *AG*, *BG*, ma, di tali aree, [la parte] *CDEF* è uguale al quadrato di *AB*, si ha [– vedi proposizioni precedenti –] che [l'altra parte, cioè] il rettangolo *FELM* che rimane di *CDLM* è uguale al doppio del rettangolo di *AG*, *BG* (II, 7). Si divida dunque *FM* per metà in *N*, e per *N* si conduca *NO* parallela all'una o all'altra indifferentemente delle rette *CD*, *ML*; ognuno dei due rettangoli *FEON*, *NOLM* è perciò uguale al rettangolo di *AG*, *BG*. E poiché il doppio del rettangolo di *AG*, *BG* è area razionale, [essendo area razionale il rettangolo *r*(*AG*,

BG) per definizione di «retta potenziante la differenza fra un'area mediale ed un'area razionale»,] ma tale doppio rettangolo è uguale a *FELM*, si ha che *FELM* è area razionale. Ed il rettangolo *FELM* è applicato alla retta razionale *EF*[= *CD*], formando l'altezza *FM*; quindi *FM* è una retta razionale, e commensurabile in lunghezza con *CD* (X, 20). Ora, poiché *CDLM* è area mediale, mentre *FELM* è area razionale, i rettangoli *CDLM*, *FELM* sono incommensurabili. Ma *CDLM* : *FELM* = *CM* : *FM* (VI, 1), per cui la retta *CM* è incommensurabile in lunghezza con la retta *FM* (X, 11). Ma ambedue sono razionali; dunque *CM*, *FM* sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza, e [la loro differenza] *CF* è un'apotome (X, 73).

Dico adesso che è anche una quinta apotome.

Infatti, potremo dimostrare similmente [a quanto è stato fatto nelle proposizioni precedenti] che il rettangolo di *CK*, *KM* è uguale al quadrato di *NM*, vale a dire alla quarta parte del quadrato di *FM*. E poiché il quadrato di *AG* è incommensurabile con quello di *BG*, ma il quadrato di *AG* è uguale al rettangolo *CDHK*, mentre quello di *BG* è uguale al rettangolo *KHLM*, si ha che *CDHK* è incommensurabile con *KHLM*. Ma *CDHK* : *KHLM* = *CK* : *KM* (VI, 1); quindi *CK* è incommensurabile in lunghezza con *KM* (X, 11). Poiché dunque *CM*, *FM* sono due rette disuguali, ed a *CM*[, che è maggiore di *FM*,] risulta applicato [ellitticamente] un rettangolo, uguale alla quarta parte del quadrato di *FM* e mancante di un quadrato, ed esso divide *CM* in parti incommensurabili [in lunghezza, cioè *CK*, *KM*, come si è veduto sopra], il quadrato di *CM* supera quello di *FM* del quadrato di una retta incommensurabile [in lunghezza] con *CM* (X, 18). Ma la retta *FM* che si aggiunge all'apotome *CF*[, cioè la retta congruente,] è commensurabile [in lunghezza] con la retta *CD* che si è assunta come razionale; dunque *CF* è una quinta apotome (X, deff. terze, V)[, essendosi verificate tutte le condizioni richieste dalla definizione]. – C.D.D.

APPLICA: I, 44-45; II, 7; X, 11, 18, 20, 22, 73, 77.

È APPLICATA IN: X, 111 scolio.

PROPOSIZIONE 102.

Il quadrato di una retta [irrazionale] « potenziante la differenza fra due aree mediali », se applicato ad una retta razionale, forma [un rettangolo avente] per altezza una sesta apotome.

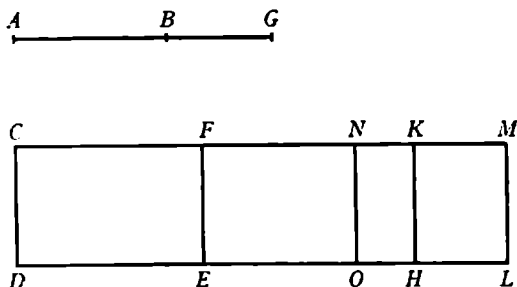
Sia AB una retta [irrazionale] « potenziante la differenza fra due aree mediali », CD sia una retta razionale, ed a CD si applichi il rettangolo $CDEF$, uguale al quadrato di AB e che formi CF quale altezza; dico che CF è una sesta apotome.

Infatti, sia BG che risulta aggiungersi ad AB[, essendo la retta irrazionale AB generata come differenza fra le due rette AG, BG]; quindi AG, BG sono rette incommensurabili in potenza, tali che la somma dei loro quadrati sia un'area mediale, area mediale sia anche il doppio del rettangolo di AG, BG, e[d infine tali che] la somma dei loro quadrati $q(AG) + q(BG)$ sia incommensurabile col doppio $2r(AG, BG)$ del rettangolo di AG, BG (X, 78). Ora, si applichi a CD il rettangolo $CDHK$, uguale al quadrato di AG e che forma così l'altezza CK, ed inoltre si applichi alla retta $[KH =]$ CD il rettangolo $KHLM$, uguale al quadrato di BG; tutto quanto il rettangolo $CDLM$ è perciò uguale alla somma dei quadrati di AG, BG, sicché anche $CDLM$ è area mediale[, come quella somma di quadrati]. Ed il rettangolo $CDLM$ è applicato alla retta razionale CD, formando l'altezza CM; quindi CM è una retta razionale, ed incommensurabile in lunghezza con CD (X, 22). Poiché dunque $CDLM$ è uguale alla somma

dei quadrati $q(AG) + q(BG)$, ma, di tali aree, [la parte] $CDEF$ è uguale al quadrato di AB, la rimanente area $FELM$ [come si è veduto nelle proposizioni precedenti,] è uguale al doppio del rettangolo di AG, BG (II, 7). Ma il doppio rettangolo $2r(AG, BG)$ è area mediale; è perciò area mediale anche il rettangolo $FELM$. Ed è applicato alla retta razionale $FE[=CD]$, formando l'altezza FM; quindi FM è una retta razionale ed incommensurabile in lunghezza con CD (X, 22). E poiché la somma dei quadrati $q(AG) + q(BG)$ è incommensurabile col doppio rettangolo $2r(AG, BG)$, ma $CDLM$ è uguale alla somma $q(AG) + q(BG)$, mentre al doppio del rettangolo di AG, BG è uguale $FELM$, sono incommensurabili [fra loro] $CDLM$, $FELM$. Ma $CDLM : FELM =$ $= CM : FM$ (VI, 1), per cui la retta CM è incommensurabile in lunghezza con la retta FM (X, 11). Ma ambedue sono razionali. Dunque CM, FM sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza, e [la loro differenza] CF è un'apotome (X, 73).

Dico adesso che è anche una sesta apotome.

Infatti, poiché $FELM$ è uguale al doppio del rettangolo di AG, BG, si divida per metà FM in N, e per N si conduca NO parallela a CD; ognuno dei due rettangolo $FEON$, $NOLM$ è perciò uguale al rettangolo di AG, BG. E poiché AG, BG sono incommensurabili in potenza, il quadrato di AG è incommensurabile con quello di BG. Ma $CDHK$ è uguale al quadrato di AG, mentre a quello di BG è uguale $KHLM$, per cui $CDHK$, $KHLM$ sono incommensurabili. Ma $CDHK : KHLM = CK : KM$ (VI, 1); quindi sono incommensurabili CK, KM (X, 11). Ora, poiché il rettangolo di AG, BG è medio proporzionale fra i quadrati di AG, BG[, ossia: $q(AG) : r(AG, BG) = r(AG, BG) : q(BG)$] (X, 21, lemma), e poiché $CDHK$ è uguale a $q(AG)$, mentre $KHLM$ è uguale a $q(BG)$, e $NOLM$ è uguale a $r(AG, BG)$, si ha che pure $NOLM$ è medio proporzionale fra $CDHK$, $KHLM$, e perciò $CDHK : NOLM = NOLM : KHLM$. Ma, per le stesse ragioni di prima, [cioè da qui proseguendo con procedimento similare a quello usato nelle proposizioni antecedenti, ossia applicando le proposizioni VI, 1, V, 11, X, 18, si dimostra

che] il quadrato di CM supera quello di FM del quadrato di una retta incommensurabile [in lunghezza] con CM (X, 18). E nessuna di esse è commensurabile [in lunghezza] con la retta CD che si è assunta come razionale; dunque CF è una sesta apotome (X, deff. terze, VI)[, essendosi verificate tutte le condizioni richieste dalla definizione]. – C.D.D.

APPLICA: II, 7; V, 11; VI, 1; X, 11, 18, 21 lemma, 22, 73, 78.

È APPLICATA IN: X, 111 scolio.

PROPOSIZIONE 103.

Una retta commensurabile in lunghezza con un'apotome è un'apotome, e dello stesso ordine della prima.

Sia AB un'apotome, e CD sia commensurabile in lunghezza con AB; dico che anche CD è un'apotome, e dello stesso ordine di AB.

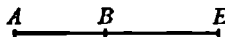
Infatti, poiché AB è un'apotome [generata come differenza fra le due rette AE, BE], sia BE che risulta aggiungersi ad essa; quindi AE, BE sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza (X, 73). Si determini la retta DF come quarta proporzionale dopo AB, CD, BE, sicché si abbia: $AB : CD = BE : DF$ [a] (VI, 12); quindi anche, una delle prime grandezze starà ad una delle seconde come la somma di tutte le prime sta a quella di tutte le seconde,

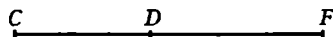
a. Più fedelmente sarebbe invece: « Si ottenga (cioè, risulti venir ad essere) che il rapporto di BE con la retta DF (cioè, con la retta DF che si prenda in considerazione, che si determini) sia lo stesso di quello di AB con CD ».

[ossia: $(AB + BE) : (CD + DF) = AB : CD$,] e perciò $AE : CF = AB : CD$ (V, 12). Ma AB è [per ipotesi] commensurabile in lunghezza con CD. Sono quindi commensurabili [in lunghezza] pure AE con CF, e BE con DF (X, 11). Ma AE, BE sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza; dunque anche CF, DF sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza (X, 13).

Ora, poiché $AE : CF = BE : DF$ (V, 11), si ha, *permutando*, che $AE : BE = CF : DF$ (V, 16). Ma il quadrato di AE supera quello di BE o del quadrato di una retta commensurabile [in lunghezza] con AE, oppure del quadrato di una retta incommensurabile [in lunghezza] con AE. Se dunque il quadrato di AE supera quello di BE del quadrato di una retta commensurabile [in lunghezza] con AE, anche il quadrato di CF supererà quello di FD del quadrato di una retta commensurabile [in lunghezza] con CF (X, 14). E se AE è commensurabile con la retta assunta come razionale, lo sarà pure CF (X, 12), se invece lo è BE, lo sarà anche DF (id.), e se non lo è nessuna delle due rette AE, BE, non lo sarà nemmeno nessuna delle due CF, FD (X, 13). Se poi il quadrato di AE supera quello di BE del quadrato di una retta incommensurabile [in lunghezza] con AE, pure il quadrato di CF supererà quello di FD del quadrato di una retta incommensurabile [in lunghezza] con CF (X, 14). E se AE è commensurabile in lunghezza con la retta assunta come razionale, lo sarà anche CF, se invece lo è BE, lo sarà pure DF (X, 12), e se non lo è nessuna delle due AE, BE non lo sarà nemmeno nessuna delle due CF, FD (X, 13).

Dunque, CD è un'apotome (X, 73), e dello stesso ordine di AB (X, deff. terze, I-VI) [a]. - C.D.D.

A B E

APPLICA: V, 11, 12, 16; X, 11, 12, 13, 14.

C D F

a. È ritrovabile qui un passo che P omette: «e [la loro differenza] CD è un'apotome. Dico ora che è anche dello stesso ordine di AB».

PROPOSIZIONE 104.

Una retta commensurabile con un'apotome di mediale è un'apotome di mediale, e dello stesso ordine della prima.

Sia AB un'apotome di mediale, e CD sia commensurabile in lunghezza con AB; dico che anche CD è un'apotome di mediale, e dello stesso ordine di AB.

Infatti, poiché AB è un'apotome di mediale [generata come differenza fra le due rette AE, BE], sia BE che risulta aggiungersi ad essa. Quindi AE, BE sono rette mediali commensurabili soltanto in potenza (X, 74, 75). E si determini la retta DF in modo che si abbia: $AB : CD = BE : DF$ (VI, 12); sono perciò commensurabili [in lunghezza] anche AE con CF, e BE con DF (V, 12; X, 11), e pure CF, DF sono quindi rette mediali (X, 23). Ma AE, BE sono rette mediali commensurabili soltanto in potenza; dunque anche CF, DF sono commensurabili soltanto in potenza (X, 13) [a], e [la loro differenza] CD è un'apotome di mediale (X, 74, 75).

Dico ora che è anche dello stesso ordine di AB.

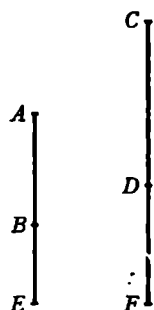
Poiché $AE : BE = CF : DF$ (V, 12; V, 16) [b], si ha pure che $q(AE) : r(AE, BE) = q(CF) : r(CF, DF)$ (VI, 1; X, 21, lemma) [c]. Ma il quadrato $q(AE)$ è commensurabile col quadrato $q(CF)$, e perciò è commensurabile anche il rettangolo $r(AE, BE)$ col rettangolo $r(CF, DF)$ (V, 16; X, 11). Se dunque il rettangolo di AE, BE è area razionale, sarà area razionale pure il rettangolo di CF, DF (X, def. IV); se

a. Il testo dice piuttosto: « sono perciò commensurabili anche AE con CF, e BE con DF. Ma AE, BE sono mediali commensurabili soltanto in potenza; quindi anche CF, FD sono mediali commensurabili soltanto in potenza ».

b. Non si ritrovano in P le seguenti parole, perciò quadrettate da Heiberg: « ma poiché AE sta a BE come il quadrato di AE sta al rettangolo di AE, BE, mentre CF sta a DF come il quadrato di CF sta al rettangolo di CF, DF ».

c. Heiberg nota che qui P omette pure un altro passo: « e *permutando*, che il quadrato di AE sta al quadrato di CF come il rettangolo di AE, BE sta al rettangolo di CF, DF ».

invece il rettangolo di AE, BE è area mediale, anche il rettangolo di CF, DF è area mediale (X, 23, coroll.).

Dunque, CD è un'apotome di mediale e dello stesso ordine di AB. – C.D.D.

APPLICA: V, 12, 16; VI, 1, 12; X, 11, 13, 21 lemma, 23, 23 coroll., 74, 75.

PROPOSIZIONE 105.

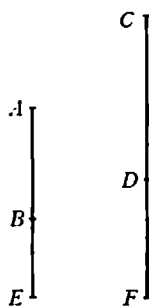
Una retta commensurabile con una retta [irrazionale] « minore » *è una* « minore ».

Infatti, sia AB una retta [irrazionale] *minore* e CD sia commensurabile con AB; dico che anche CD è una *minore*.

Si vengano difatti ad avere le medesime costruzioni [delle due proposizioni precedenti X, 103, 104]; ora, poiché AE, BE sono rette incommensurabili in potenza (X, 76), anche CF, DF sono rette incommensurabili in potenza (X, 13). E poiché $AE : BE = CF : DF$ (V, 12; V, 16), si ha pure che $q(AE) : q(BE) = q(CF) : q(DF)$ (VI, 22). Quindi, *componendo*: $[q(AE) + q(BE)] : q(BE) = [q(CF) + q(DF)] : q(DF)$ (V, 18) [a]; ma il quadrato di BE è commensurabile con quello di DF [– e difatti si è veduto, nelle proposizioni precedenti X, 103, 104, che BE, DF sono commensurabili], perciò anche la somma dei quadrati di AE, BE è commensurabile con quella dei quadrati di CF, DF (V, 16; X, 11). Ma la somma dei quadrati di AE, BE è razionale[, poiché per

a. A questo punto, rileva Heiberg, è omesso da P un « e *permutando* », vale a dire, secondo quanto reca un altro codice, « che il quadrato di BE sta al quadrato di DF come la somma del quadrato di AE e di quello di BE sta alla somma del quadrato di CF e di quello di DF ».

ipotesi AB è una retta *minore*] (X, 76); è quindi razionale pure la somma dei quadrati di CF, DF (X, def. IV). Di nuovo, poiché $q(AE) : r(AE, BE) = q(CF) : r(CF, DF)$ (X, 21, lemma), ed il quadrato $q(AE)$ è commensurabile col quadrato $q(CF)$, anche il rettangolo $r(AE, BE)$ è commensurabile col rettangolo $r(CF, DF)$ (V, 16; X, 11). Ma il rettangolo di AE, BE è area mediale [per definizione di retta *minore*] (X, 76), per cui è area mediale pure il rettangolo di CF, DF (X, 23, coroll.); quindi CF, DF sono rette incommensurabili in potenza, tali che la somma dei loro quadrati sia un'area razionale, e sia invece area mediale il rettangolo da esse compreso.

Dunque, CD è una retta [irrazionale] *minore* (X, 76). - C.D.D.

APPLICA: V, 12, 16, 18; X, 11, 13, 23 coroll., 76.

PROPOSIZIONE 106.

Una retta commensurabile con una retta [irrazionale] « potenziante la differenza fra un'area mediale ed un'area razionale » è anch'essa una retta [irrazionale] « potenziante la differenza fra un'area mediale ed un'area razionale ».

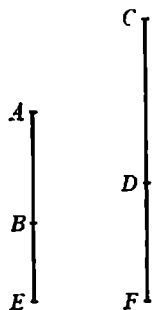
Sia AB una retta il quadrato della quale è differenza fra un'area mediale ed un'area razionale, e CD sia commensurabile con AB; dico che anche CD è una retta « potenziante la differenza fra un'area mediale ed un'area razionale ».

Infatti, sia BE che risulta aggiungersi ad AB, per cui AE, BE sono rette incommensurabili in potenza, tali che la somma dei quadrati di AE, BE sia un'area mediale, e sia invece area razionale il rettangolo da esse compreso (X, 77). Si eseguano [cioè] le medesime costruzioni [delle proposizioni precedenti X, 103, 104, 105]. Potremo dimostrare, similmente a quanto fatto prima (X, 105), che CF, DF stanno fra loro nello stesso rapporto in cui AE, BE stanno

fra loro[, ossia: $CF : DF = AE : BE$], e che la somma dei quadrati di AE, BE è commensurabile con quella dei quadrati di CF, DF, mentre il rettangolo di AE, BE è commensurabile col rettangolo di CF, DF; cosicché pure CF, DF sono rette incommensurabili in potenza tali che la somma dei quadrati di CF, DF è area mediale, ed area razionale invece è il rettangolo da esse compreso.

Dunque, CD è una retta [irrazionale] « potenziante la differenza fra un'area mediale ed un'area razionale » (X, 77). - C.D.D.

A B E C D F

APPLICA: X, 77.

PROPOSIZIONE 107.

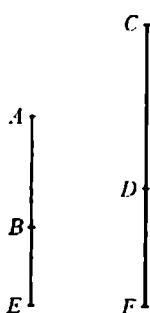
Una retta commensurabile con una retta [irrazionale] « potenziante la differenza fra due aree mediali » è anch'essa[a] *una retta [irrazionale] « potenziante la differenza fra due aree mediali ».*

Sia AB una retta il quadrato della quale è differenza fra due aree mediali, e CD sia commensurabile con AB; dico che anche CD è una retta « potenziante la differenza fra due aree mediali ».

Infatti, sia BE che risulta aggiungersi ad AB, e si esegua la stessa costruzione[, cioè uguale alle costruzioni delle proposizioni immediatamente precedenti]; quindi AE, BE sono rette incommensurabili in potenza, tali che la somma dei loro quadrati sia un'area mediale, area mediale sia pure il rettangolo da esse compreso, e tali infine che la somma dei loro quadrati sia incommensurabile con quel rettangolo (X, 77). Ora, come fu dimostrato (X, 104), AE, BE sono commensurabili [rispettivamente] con CF, DF, e la somma dei quadrati

a. Lo *anch'essa* è letterale nel testo, mentre prima, alla 106, non lo era.

di AE, BE è commensurabile con quella dei quadrati di CF, DF, mentre il rettangolo di AE, BE è commensurabile col rettangolo di CF, DF; quindi anche CF, DF sono rette incommensurabili in potenza, tali che la somma dei loro quadrati è un'area mediale, area mediale è pure il rettangolo

da esse compreso, e tali infine che la somma dei loro quadrati è incommensurabile con quel rettangolo.

Dunque, CD è una retta [irrazionale] « potenziante la differenza fra due aree mediali » (X, 78). - C.D.D.

APPLICA: X, 77, 78.

PROPOSIZIONE 108.

Se da un'area razionale si sottrae un'area mediale, il quadrato uguale alla differenza ha per lato[a] *o l'una o l'altra di due rette irrazionali, quelle [dette] cioè* « apotome » *o* « minore ».

Infatti, dall'area razionale $ABMC$ si sottragga l'area mediale $EBMD$; dico che la retta il cui quadrato sia uguale all'area rimanente $AEDC$ viene ad essere o l'una o l'altra di due rette irrazionali, quelle [dette] cioè « *apotome* » o « *minore* ».

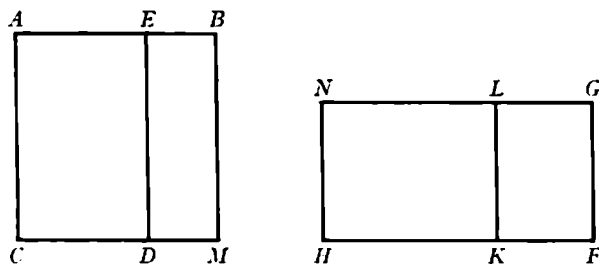
Si assuma difatti FG come retta razionale data, si applichi a FG un rettangolo[b] $FGNH$, uguale ad $ABMC$, e se ne sottragga il rettangolo $FGLK$, uguale ad $EBMD$ (I, 44-45); quindi l'area rimanente $AEDC$ [di $ABMC$] è uguale a quella $LKHN$. Poiché dunque $ABMC$ è area razionale, ed $EBMD$ è area mediale, mentre poi $ABMC$ è uguale a $FGNH$, ed $EBMD$ è uguale a $FGLK$, si ha che il rettangolo $FGNH$ è area razionale e quello $FGLK$ è area mediale. E sono applicati a FG che è retta razionale; quindi [l'altezza]

a. Letteralmente corrisponderebbe piuttosto a *la retta il cui quadrato sia uguale all'area rimanente.*

b. Letteralmente: un parallelogrammo rettangolo, rettangolare.

HF è una retta razionale e commensurabile in lunghezza con *FG* (X, 20), mentre [l'altra altezza] *KF* è una retta razionale ed incommensurabile in lunghezza con *FG* (X, 22); perciò *HF* è incommensurabile in lunghezza con *KF* (X, 13). Dunque, *HF*, *KF* sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza, [la loro differenza] *HK* è un'apotome (X, 73), e *KF* è retta che risulta aggiungersi ad essa. Ora, il quadrato della retta [totale] *HF* o supera quello della [congruente] *KF* del quadrato di una retta commensurabile [in lunghezza] con *HF*, oppure di una non commensurabile.

Dapprima, [il quadrato di *HF*] superi [quello di *KF*] del quadrato di una retta commensurabile [in lunghezza] con *HF*. Ma tutta quanta *HF*[, come si è veduto sopra,] è commensurabile in lunghezza con la retta *FG* che si è assunta come razionale; quindi *KH* è una prima apotome (X, deff. terze, I). Ma una retta il cui quadrato sia uguale ad un'area compresa da una retta razionale e da una prima apotome, è un'apotome (X, 91). Dunque una retta il cui quadrato sia uguale a *LKHN*, vale a dire ad *AEDC*, è un'apotome.

Se invece il quadrato di *HF* supera quello di *KF* del quadrato di una retta incommensurabile [in lunghezza] con *HF*, poiché d'altra parte tutta quanta *HF* è commensurabile in lunghezza con la retta *FG* che si è assunta come razionale si ha che *HK* è una quarta apotome (X, deff. terze, IV). Ma una retta il cui quadrato sia uguale ad un'area compresa da una retta razionale e da una quarta apotome, è una «*minore*» (X, 94). - C.D.D.

APPLICA: I, 44-45; X, 13, 20, 22, 73, 91, 94.

PROPOSIZIONE 109.

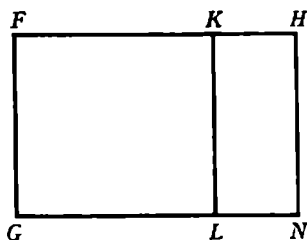
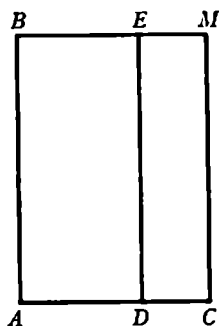
Se da un'area mediale si sottrae un'area razionale, si determinano altre due rette irrazionali[, *ossia il quadrato uguale alla differenza ha per lato una di due altre rette irrazionali*]: *od una prima apotome di mediale, od una retta « potenziante la differenza fra un'area mediale ed un'area razionale ».*

Infatti, dall'area mediale $BMCA$ si sottragga l'area razionale $BEDA$. Dico che una retta il cui quadrato sia uguale all'area rimanente $EMCD$ viene ad essere l'una o l'altra di due rette irrazionali: od una prima apotome di mediale, od una retta « potenziante la differenza fra un'area mediale ed un'area razionale ».

Si assuma difatti FG come retta razionale data, e si applichino similmente le aree [$FGNH = BMCA$, $FGLK =$ $= BEDA$, come si è fatto nella precedente X, 108]. Di conseguenza, [l'altezza] FH è una retta razionale ed incommensurabile in lunghezza con FG, mentre quella FK è razionale e commensurabile in lunghezza con FG; quindi FH, FK sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza (X, 13); [la loro differenza] KH è perciò un'apotome (X, 73), e FK è retta che risulta aggiungersi ad essa. Ora, il quadrato di FH o supera quello di FK del quadrato di una retta commensurabile [in lunghezza] con FH, o lo supera del quadrato di una retta incommensurabile [in lunghezza] con FH.

Se dunque il quadrato di FH supera quello di FK del quadrato di una retta commensurabile con FH [in lunghezza], poiché la retta congruente FK è commensurabile in lunghezza con la retta FG che si è assunta come razionale si ha che KH è una seconda apotome (X, deff. terze, II). Ma FG è razionale, cosicché una retta il cui quadrato sia uguale all'area $KHNL$, vale a dire ad $EMCD$, è una prima apotome di mediale (X, 92).

Se invece il quadrato di FH supera quello di FK del quadrato di una retta incommensurabile [in lunghezza] con FH, mentre la retta congruente FK è commensurabile in

lunghezza con la retta *FG* che si è assunta come razionale, si ha che *KH* è una quinta apotome (X, deff. terze, V); cosicché la retta il cui quadrato sia uguale ad *EMCD* è una retta « potenziante la differenza fra due aree mediali » (X, 95). – C.D.D.

APPLICA: X, 13, 73, 92.

È APPLICATA IN: X, 110.

PROPOSIZIONE 110.

Se da un'area mediale si sottrae un'altra area mediale che sia incommensurabile con la prima[a], *si determinano le due rimanenti rette irrazionali*[, *ossia il quadrato uguale alla differenza ha per lato una delle due rimanenti rette irrazionali*], *e cioè: od una seconda apotome di mediale, od una retta « potenziante la differenza fra due aree mediali ».*

Infatti, come nelle figure già proposte [nella proposizione precedente] (X, 109), dall'area mediale *BMCA* si sottragga l'area mediale *BEDA* incommensurabile con l'intiera *BMCA*; dico che la retta il cui quadrato sia uguale all'area [rimanente] *EMCD* è l'una o l'altra di due rette irrazionali, cioè od una seconda apotome di mediale, od una retta « potenziante la differenza fra due aree mediali ».

Poiché difatti ognuna delle due aree *BMCA*, *BEDA* è mediale, si ha che ciascuna delle due rette *FH*, *FK* è razio-

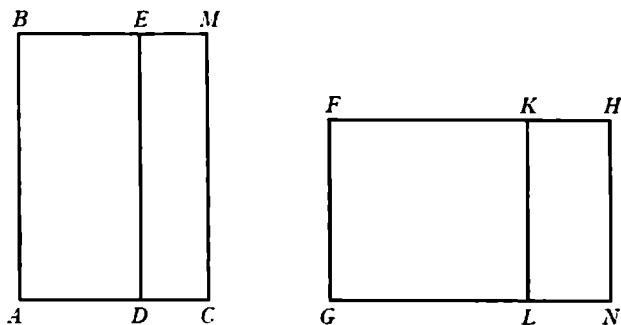
a. Letteralmente: *con l'area tutta quanta.*

nale ed incommensurabile in lunghezza con *FG* (X, 22). E poiché *BMCA* è incommensurabile con *BEDA*, vale a dire *FGNH* con *FGLK*, è pure incommensurabile *FH* con *FK* (VI, 1; X, 11); quindi *FH*, *FK* sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza, e [la loro differenza] *KH* è un'apotome (X, 73) [a].

Se allora il quadrato di *FH* supera quello di *FK* del quadrato di una retta commensurabile [in lunghezza] con *FH*, mentre nessuna delle due *FH*, *FK* è commensurabile in lunghezza con la retta *FG* che si è assunta come razionale, si ha che *KH* è una terza apotome (X, deff. terze, III). Ma *KL* [= *FG*] è retta razionale, ed un rettangolo compreso da una retta razionale e da una terza apotome è un'area irrazionale, mentre la retta il cui quadrato sia uguale ad esso si chiama seconda apotome di mediale (X, 93); cosicché la retta il cui quadrato sia uguale a *KHNL*, vale a dire ad *EMCD*, è una seconda apotome di mediale.

Se invece il quadrato di *FH* supera quello di *FK* del quadrato di una retta incommensurabile [in lunghezza] con *FH*, mentre nessuna delle due *FH*, *FK* è commensurabile in lunghezza con *FG*, si ha che *KH* è una sesta apotome (X, deff. terze, VI). Ma una retta il cui quadrato sia uguale ad un rettangolo compreso da una retta razionale e da una sesta apotome, è la retta [irrazionale] « potenziante la differenza fra due aree mediali » (X, 96). Dunque, la retta il

a. Nel testo, ritroveremmo di séguito: « mentre *FK* è la retta che risulta aggiungersi ad essa. Ora, il quadrato di *FH* supera quello di *FK* o del quadrato di una retta commensurabile [in lunghezza] con *FH*, o del quadrato di una retta incommensurabile [in lunghezza] con *FH* »; Heiberg rileva che P omette il passo. Rileva ancora che August omise le parole « e *BMCA* è incommensurabile con *BEDA* » dopo *Poiché difatti ognuna delle due aree* dell'inizio del passo, non ingiustamente a suo parere, dato che non servono a nulla riguardo al dimostrare quanto segue. Gregory (*op. cit.*, p. 190) tralascia tutto quanto dal « di conseguenza ciascuna delle due rette *FH*, *FK* » sino a « E poiché *BMCA* è incommensurabile con *BEDA* », riprendendo con il *vale a dire...*, *ecc.*

cui quadrato sia uguale a $KHNL$, vale a dire ad $EMCD$, è una retta [irrazionale] « potenziante la differenza fra due aree mediali ». – C.D.D.

APPLICA: VI, 1; X, 22, 73, 93, 96, 109.

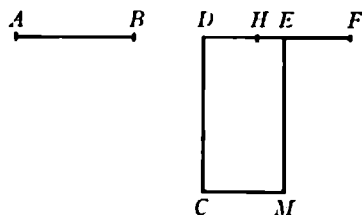
PROPOSIZIONE 111.

Un'apotome non è uguale ad[a] *una binomiale.*

Sia AB un'apotome; dico che AB non può essere uguale ad una binomiale.

Infatti, se possibile, lo sia; si assuma DC come retta razionale data, ed a DC si applichi il rettangolo $CDEM$, uguale al quadrato di AB e che formi DE quale altezza (I, 44-45). Poiché dunque AB è un'apotome, DE è una prima apotome (X, 97). Sia EF che risulta aggiungersi ad essa[, in quanto generata appunto come differenza fra le due rette DF, EF]; quindi DF, EF sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza, il quadrato di DF supera quello di EF del quadrato di una retta commensurabile [in lunghezza] con DF, e DF è commensurabile in lunghezza con la retta DC che si è assunta come razionale (X, deff. terze, I). Di nuovo, poiché AB è [anche] una binomiale, [come si è supposto sia possibile,] DE è in tal caso una prima binomiale (X, 60). La si divida nei suoi termini in H, e DH sia il termine maggiore; quindi DH, HE sono

a. Letteralmente, sempre al solito: « non è la stessa che ».

rette razionali commensurabili soltanto in potenza, il quadrato di *DH* supera quello di *HE* del quadrato di una retta commensurabile [in lunghezza] con *DH*, ed il termine maggiore *DH* è commensurabile in lunghezza con la retta *DC* assunta come razionale (X, deff. seconde, I). Perciò anche *DF* è commensurabile in lunghezza con *DH* (X, 12), e pure la rimanente *HF* è commensurabile in lunghezza con *DF* (X, 15) [a]. Ma *DF* è incommensurabile in lunghezza con *EF*, per cui pure *HF* è incommensurabile in lunghezza con *EF* (X, 13). Quindi *HF*, *EF* sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza, e [la loro differenza] *HE* è un'apotome (X, 73). Ma sarebbe anche una retta razionale[, come si è sopra veduto]: il che è impossibile.

Dunque, un'apotome non è uguale ad una binomiale. – C.D.D [b].

APPLICA: I, 44-45; X, 12, 13, 15, 60, 73, 97.

È APPLICATA IN: X, III scolio.

L'apotome e le rette irrazionali che ne conseguono non sono uguali né ad una retta mediale, né fra loro.

Infatti, il quadrato di una retta mediale, se applicato ad una retta razionale, forma [un rettangolo avente] per altezza una retta razionale ed incommensurabile in lunghezza con quella a cui è applicato (X, 22), mentre il quadrato di un'apotome, se applicato ad una retta razionale, forma [un rettangolo avente] per altezza una prima apotome (X, 97);

il quadrato di una prima apotome di mediale, se appli-

a. Avremmo ancora nel testo: « Poiché dunque *DF* è commensurabile in lunghezza con *HF*, e *DF* è retta razionale, è razionale pure la retta *HF*. Poiché dunque *DF* è commensurabile in lunghezza con *HF* », continuando « e d'altra parte *DF* è incommensurabile in lunghezza con *EF*, anche *HF* è incommensurabile in lunghezza con *EF* »; il passo di cui sopra è omesso, nota Heiberg, da P e da altro codice.

b. Qui avremmo, ma non in P, il termine *Corollario*.

cato ad una retta razionale, forma [un rettangolo avente] per altezza una seconda apotome (X, 98);

il quadrato di una seconda apotome di mediale, se applicato ad una retta razionale, forma [un rettangolo avente] per altezza una terza apotome (X, 99);

il quadrato di una « *minore* », se applicato ad una retta razionale, forma [un rettangolo avente] per altezza una quarta apotome (X, 100);

il quadrato di una retta « potenziante la differenza fra un'area mediale ed un'area razionale », se applicato ad una retta razionale, forma [un rettangolo avente] per altezza una quinta apotome (X, 101);

infine, il quadrato di una retta « potenziante la differenza fra due aree mediali », se applicato ad una retta razionale, forma [un rettangolo avente] per altezza una sesta apotome (X, 102). Poiché dunque le dette altezze differiscono e dalla prima e fra loro, dalla prima perché essa è razionale, e fra loro perché non sono dello stesso ordine, è evidente che pure le stesse rette irrazionali sono diverse fra loro. E poiché si è dimostrato che un'apotome non è uguale ad una binomiale (X, 111), e le aree irrazionali che conseguono dall'apotome, se applicate ad una retta razionale, formano [rettangoli aventi] per altezze rette apotomi, ciascuna secondo il proprio ordine successivo, mentre le aree irrazionali che conseguono dalla binomiale formano [rettangoli aventi] per altezze, anch'esse in ordine successivo, le rette binomiali, si ha che altre sono le rette irrazionali che conseguono dall'apotome, ed altre quelle che conseguono dalla binomiale, così da essere tutte le tredici rette irrazionali, nell'ordine, le seguenti: Mediale; Binomiale; Prima bimediale; Seconda bimediale; « Maggiore »; Retta « potenziante un'area razionale più un'area mediale »; Retta « potenziante la somma di due aree mediali »; Apotome; Prima apotome di mediale; Seconda apotome di mediale; « Minore »; Retta « potenziante la differenza fra un'area mediale ed un'area razionale »; Retta « potenziante la differenza fra due aree mediali ».

APPLICA: X, 22, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 111.

PROPOSIZIONE 112 [a].

Il quadrato di una retta razionale, applicato ad una retta binomiale, forma [un rettangolo avente] per altezza un'apotome, i cui termini sono commensurabili con quelli della retta binomiale e stanno inoltre fra loro nello stesso rapporto; infine, l'apotome che così si determina avrà lo stesso ordine della retta binomiale [35].

Siano A una retta razionale e BC una retta binomiale, di cui DC sia il termine maggiore, e [si determini la retta EF

a. È opinione di Heiberg che X, 112-115 siano una interpolazione antecedente a Teone, forse attinta da Apollonio (di Perga, il «gran geometra», III-II secolo a. C.), e che con X, 111 finisca di completarsi in Euclide la trattazione delle tredici rette irrazionali, mentre X, 112-115 non sono connesse con la precedente esposizione delle tredici irrazionali, non sono usate nei libri stereometrici né direttamente né indirettamente, e sembrano piuttosto l'avvio per uno studio nuovo ed ancora più astratto sugli irrazionali in sé stessi. Ma su questo, e ciò che eventualmente può essere obbiettato, cfr. per esempio HEATH, *op. cit.*, vol. 3, p. 246.

[35] Coi nostri simboli: sia r la retta razionale data, e sia $a + \sqrt{b}$ la data retta binomiale. Si tratta dunque di applicare alla retta $a + \sqrt{b}$ l'area r^2: l'altezza deve risultare essere un'apotome avente i termini comm.li con quelli della binomiale e proporzionali ad essi. Si tratta cioè di una proposizione equivalente alle due uguaglianze aritmetiche:

$$(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - b$$
$$m(a - \sqrt{b}) = ma - m\sqrt{b}$$

Basta infatti scrivere r^2 sotto la forma:

$$r^2 = \frac{r^2}{a^2 - b}(a^2 - b) = m(a^2 - b)$$

dove m è un numero razionale. Si ha allora:

$$r^2 = m(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = (a + \sqrt{b})(ma - m\sqrt{b})$$

relazione che dimostra il teorema anche per quel che riguarda l'ordine dell'apotome. L'analoga formula: $r^2 = (a - \sqrt{b})(ma + m\sqrt{b})$ si riferisce invece alle prop. X, 113 e 114.

Aggiungiamo che se si seguisse l'interpretazione del libro decimo (*l'arte per l'arte*) da noi esposta nella nota introduttiva al libro stesso (p. 568) non vi sarebbe più ragione di dubitare dell'autenticità di questa proposizione e delle seguenti.

in modo che] il rettangolo di BC, EF [che non viene disegnato in figura] sia uguale al quadrato di A (I, 44-45); dico che EF è un'apotome, i cui termini sono commensurabili con DC, BD e nello stesso loro rapporto, e che infine l'apotome EF avrà lo stesso ordine della retta binomiale BC.

Infatti, [si determini la retta G in modo che] il rettangolo di BD, G sia, di nuovo, uguale al quadrato di A (I, 44-45). Poiché dunque il rettangolo di BC, EF è uguale al rettangolo di BD, G, si ha che $BC : BD = G : EF$ (VI, 16). Ma BC è maggiore di BD, per cui anche G è maggiore di EF (V, def. V). Sia EH uguale a G; di conseguenza, $BC : BD = EH : EF$, per cui, *scomponendo*: [$(BC - BD) : BD = (EH - EF) : EF$ (V, 17), ossia:] $DC : BD = FH : EF$. Si [determini ora la retta KE quarta proporzionale dopo FH, EF, KF (VI, 12)[36], ossia tale che si] abbia: $FH : EF = KF : KE$; si ha perciò che tutta quanta KH sta a tutta quanta KF come KF sta a KE: difatti, in una proporzione, uno dei termini antecedenti sta ad uno dei conseguenti come la somma degli antecedenti sta a quella dei conseguenti (V, 12)[, per cui $(FH + KF) : (EF + KE) = KF : KE$, ossia appunto: $KH : KF = KF : KE$]. Ma FK sta a KE come [FH sta ad EF, quindi anche come] DC sta a BD (V, 11); perciò anche, $KH : KF = DC : BD$. Ma il quadrato di DC è commensurabile col quadrato di BD[, essendo DC, BD i due termini di una retta binomiale BC] (X, 36), per cui sono commensurabili pure il quadrato di KH e quello di KF (VI, 22; X, 11). Ed il quadrato di KH sta a quello di KF come KH sta a KE, poiché [si è visto che $KH : KF = KF : KE$, ossia] le tre rette KH, KF, KE sono [continuamente]

[36] Basta trasformare la proporzione:

$$FH : EF = KF : KE$$

nell'altra, scomponendo:

$$(FH - EF) : FH = (KF - KE) : KF$$

ossia:

$$(FH - EF) : FH = EF : KF$$

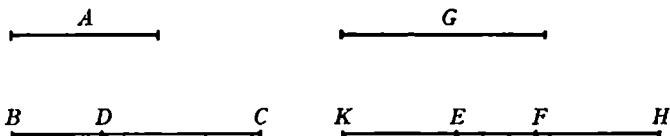
Quindi KF viene determinata come quarta proporzionale dopo la differenza $FH - EF$ e le rette FH, EF.

proporzionali[, e quindi KH ha con KE rapporto duplicato di quello di KH con KF] (V, def. IX; VI, 19, coroll.). Quindi KH [– essendo, come si è veduto, il quadrato di KH commensurabile col quadrato di KE –] è commensurabile in lunghezza con KE (X, 11), [vale a dire la somma $KE + EH$ è commensurabile in lunghezza con KE,] cosicché pure KE è commensurabile in lunghezza con EH (X, 15). Ora, poiché il quadrato di A è uguale al rettangolo di EH, BD, ed il quadrato di A è razionale, pure il rettangolo di EH, BD è razionale. Ed è applicato alla retta razionale BD; quindi [l'altezza] EH è una retta razionale e commensurabile in lunghezza con BD (X, 20), cosicché anche KE, che è commensurabile [in lunghezza] con essa, è razionale (X, def. III) e commensurabile in lunghezza con BD (X, 12). Poiché dunque[, come si è visto sopra,] $DC : BD = KF : KE$, ma DC, BD sono rette commensurabili soltanto in potenza, anche KF, KE sono commensurabili soltanto in potenza (X, 11). Ma KE[, come pure si è poco sopra veduto,] è retta razionale; perciò è razionale pure KF. Quindi KF, KE sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza, e [la loro differenza] EF è un'apotome (X, 73).

Ora, o il quadrato di DC supera quello di BD del quadrato di una retta commensurabile [in lunghezza] con DC, o lo supera del quadrato di una retta incommensurabile con DC.

Se dunque il quadrato di DC supera quello di BD del quadrato di una retta commensurabile [in lunghezza] con DC, anche il quadrato di KF supererà quello di KE del quadrato di una retta commensurabile [in lunghezza] con KF (X, 14). E se DC è commensurabile in lunghezza con la retta che si è assunta come razionale, [ossia anche con BD, che è razionale,] lo sarà pure KF [con la retta razionale KE] (X, 11), se invece lo è BD, lo è anche KE (X, 11), e se non lo è nessuna delle due rette DB, BD, non lo sarà nemmeno nessuna delle due KF, KE.

Se al contrario il quadrato di DC supera quello di BD del quadrato di una retta incommensurabile con DC, anche il quadrato di KF supererà quello di KE del quadrato di

una retta incommensurabile con *KF* (X, 14). E se *CD* è commensurabile in lunghezza con la retta che si è assunta come razionale, lo è pure *KF*, se invece lo è *BD*, lo è anche *KE*, e se non lo è nessuna delle due rette *DC*, *BD*, non lo è nemmeno nessuna delle due *KF*, *KE*. Cosicché *EF* è un'apotome, i cui termini *KF*, *KE* sono commensurabili con i termini *DC*, *BD* di una retta binomiale e stanno fra loro nello stesso rapporto [di quelli], ed è apotome che ha lo stesso ordine della retta binomiale *BC* (X, seconda e terza serie di definizioni). – C.D.D.

APPLICA: V, 12, 17; VI, 16, 20 coroll.; X, 11, 12, 14, 15, 20, 36, 73.

PROPOSIZIONE 113.

Il quadrato di una retta razionale, applicato ad un'apotome, forma [un rettangolo avente] per altezza una retta binomiale, i cui termini sono commensurabili con quelli dell'apotome e stanno fra loro nello stesso rapporto [di quelli]; infine, la retta binomiale che così si determina ha lo stesso ordine dell'apotome.

Siano *A* una retta razionale e *BD* un'apotome, e [si determini la retta *HK* in modo che] il rettangolo di *BD*, *HK* sia uguale al quadrato di *A* (I, 44-45), cosicché il quadrato della razionale *A*, applicato all'apotome *BD*, forma [un rettangolo avente] per altezza *HK*; dico che *HK* è una retta binomiale, i cui termini sono [rispettivamente] commensurabili coi termini dell'apotome *BD* e stanno fra loro nello stesso rapporto [di quelli], e dico infine che *HK* ha lo stesso ordine di *BD*.

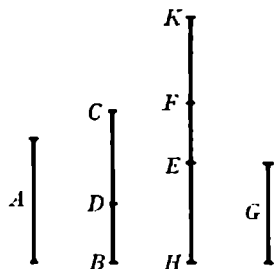
Infatti, sia *DC* che risulta aggiungersi a *BD*[, apotome generata come differenza fra *BC*, *DC*]; quindi *BC*, *DC* sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza (X, 73).

E [si determini ora la retta G in modo che] pure il rettangolo di BC, G sia uguale al quadrato di A. Ma il quadrato di A è razionale, sicché è razionale anche il rettangolo di BC, G. Ed è applicato alla retta razionale BC; quindi G è una retta razionale e commensurabile in lunghezza con BC (X, 20). Ora, poiché il rettangolo di BC, G è uguale al rettangolo di BD, HK, si ha la proporzione $BC : BD =$ $= HK : G$ (VI, 16). Ma BC è maggiore di BD; perciò anche HK è maggiore di G (V, def. V). Si ponga [adesso] HE uguale a G; quindi HE[, così come si è sopra trovato per G,] è commensurabile in lunghezza con BC. Ma poiché $BC : BD =$ $= HK : HE$, si ha, *convertendo*: [$BC : (BC - BD) = HK :$ $: (HK - HE)$, ossia:] $BC : DC = HK : EK$ (V, 19, coroll.). Si [divida ora EK in parti FK, EF proporzionali a HK, EK, sicché] si abbia: $HK : EK = FK : EF$ (VI, 10); perciò pure HF, che rimane [*scomponendo*], sta a FK come HK sta ad EK, vale a dire come BC sta a DC[, ossia: $(HK -$ $- FK) : (EK - EF) = HK : EK$, cioè: $HF : FK = HK :$ $: EK = BC : DC$] (V, 19). Ma BC, DC sono commensurabili soltanto in potenza, per cui anche HF, FK sono rette commensurabili soltanto in potenza (X, 11). E poiché $HK : EK =$ $= HF : FK$, ma $HK : EK = FK : EF$, si ha pure: $HF :$ $: FK = FK : EF$ (V, 11), cosicché anche la prima sta alla terza retta come il quadrato della prima sta a quello della seconda (V, def. IX; VI, 19, coroll.); quindi anche, $HF :$ $: EF = q(HF) : q(FK)$. Ma il quadrato di HF è commensurabile con quello di FK – difatti[, come si è sopra veduto,] HF, FK sono commensurabili in potenza –; sono perciò commensurabili pure HF ed EF (X, 11), cosicché HF è commensurabile in lunghezza anche con HE (X, 15). Ma HE [$= G$] è una retta razionale e commensurabile in lunghezza con BC; quindi anche HF è razionale e commensurabile in lunghezza con BC (X, 12). E poiché $BC : DC =$ $= HF : FK$, si ha, *permutando*, che $BC : HF = DC : FK$ (V, 16). Ma BC è commensurabile [in lunghezza] con HF[, come si è or ora veduto]; perciò pure DC è commensurabile in lunghezza con FK (X, 11). Ma BC, DC sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza; dunque anche HF,

FK sono rette razionali (X, def. III) commensurabili soltanto in potenza (X, 13), e [la loro somma] *HK* è così una retta binomiale (X, 36).

Se ora il quadrato di *BC* supera quello di *DC* del quadrato di una retta commensurabile [in lunghezza] con *BC*, anche il quadrato di *HF* supererà quello di *FK* del quadrato di una retta commensurabile con *HF* (X, 14). E se *BC* è commensurabile in lunghezza con la retta che si è assunta come razionale, lo è [di conseguenza] pure *HF* (X, 12), se invece è *DC* commensurabile in lunghezza con la retta assunta come razionale, lo è anche *FK* (id.), se infine non lo è nessuna delle due rette *BC*, *DC*, non lo è nemmeno nessuna delle due *HF*, *FK* (X, 13).

Se poi il quadrato di *BC* supera quello di *DC* del quadrato di una retta incommensurabile [in lunghezza] con *BC*, anche il quadrato di *HF* supererà quello di *FK* del quadrato di una retta incommensurabile [in lunghezza] con *HF* (X, 14). E se *BC* è commensurabile in lunghezza con la retta che si è assunta come razionale, lo è pure [di conseguenza] *HF* (X, 12), se lo è *DC*, lo è anche *FK* (id.), e se non lo è nessuna delle due rette *BC*, *DC*, non lo è nemmeno nessuna delle due *HF*, *FK*.

Dunque, *HK* è una retta binomiale, i cui termini *HF*, *FK* sono [rispettivamente] commensurabili coi termini *BC*, *DC* dell'apotome *BD* e stanno fra loro nello stesso loro rapporto; ed infine, *HK* avrà lo stesso ordine di *BD* (X, seconda e terza serie di definizioni). – C.D.D.

APPLICA: V, 16, 19, 19 coroll.; VI, 16; X, 11, 12, 13, 14, 15, 20, 36, 73.

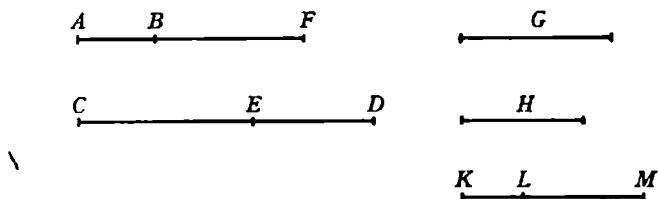
PROPOSIZIONE 114.

Se un'area è compresa da un'apotome e da una retta binomiale, i cui termini siano commensurabili con quelli dell'apotome e che stiano fra loro nello stesso rapporto [di quelli], una retta il cui quadrato sia uguale all'area in questione è razionale.

Infatti, [si abbia un rettangolo, cioè] il rettangolo di AB, CD[, che] sia compreso da un'apotome AB [$= AF - BF$] e da una retta binomiale CD, il cui termine maggiore sia CE: ed i termini CE, ED della retta binomiale siano commensurabili [rispettivamente] con quelli AF, BF dell'apotome AB, e stiano fra loro nello stesso rapporto[, cioè sia: $CE : ED = AF : BF$]; sia G inoltre una retta il cui quadrato sia uguale all'area del [suindicato] rettangolo di AB, CD; dico che G è razionale.

Si assuma difatti come data la retta razionale H, e si applichi a CD un rettangolo, uguale al quadrato di H e formante KL quale altezza; perciò KL è un'apotome, e di essa KM, LM siano i termini, [i quali sono poi] commensurabili coi termini CE, ED della retta binomiale CD e stanno fra loro nello stesso rapporto [di quelli, cioè: $CE : ED = KM : LM$] (X, 112). Ma [per ipotesi] CE, ED sono commensurabili con AF, BF e stanno fra loro nello stesso rapporto di AF, BF; perciò [anche]: $AF : BF = KM : LM$ (V, 11). Si ha di conseguenza, *permutando*, che $AF : KM = BF : LM$ (V, 16); quindi anche, [*scomponendo*,] la parte AB che rimane sta alla rimanente KL come AF sta a KM [, ossia: $(AF - BF) : (KM - LM) = AF : KM$ (V, 19), vale a dire: $AB : KL = AF : KM$]. Ma AF è commensurabile [con CE per ipotesi, ed inoltre CE si è visto esser commensurabile con KM; ne risulta che AF è commensurabile] con KM (X, 12); sono perciò commensurabili pure AB, KL (X, 11). Ora, AB sta a KL come il rettangolo $r(AB, CD)$ sta al rettangolo $r(KL, CD)$ (VI, 1); quindi anche $r(AB, CD)$ è commensurabile con $r(KL, CD)$ (X, 11). Ma il rettangolo $r(KL, CD)$ è uguale al quadrato $q(H)$ [per l'applicazione parabolica prima eseguita]; il rettangolo $r(AB, CD)$ è perciò

commensurabile col quadrato di *H*. Ma il rettangolo *r*(*AB*, *CD*) è uguale al quadrato di *G* [per la costruzione sopra eseguita]; quindi il quadrato di *G* è commensurabile con quello di *H*. Ma il quadrato di *H* è razionale[, essendosi assunta *H* come retta razionale]; perciò anche il quadrato di *G* è razionale; quindi *G* è una retta razionale. Ed il suo quadrato è uguale all'area del rettangolo di *AB*, *CD*.

Dunque, se un'area è compresa da un'apotome e da una retta binomiale... (secondo l'enunciato).

APPLICA: V, 16, 19; VI, 1; X, 9, 11, 12, 92.

COROLLARIO.

Da ciò risulta ed è a noi evidente come sia possibile che un'area razionale sia compresa da rette irrazionali. – C.D.D.

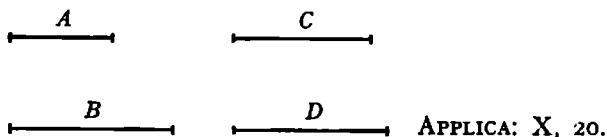
PROPOSIZIONE 115.

Da una retta mediale si generano infinite rette irrazionali, delle quali nessuna è uguale ad alcuna delle precedenti.

Sia *A* una retta mediale; dico che da *A* si originano infinite rette irrazionali, delle quali nessuna è uguale a nessuna delle precedenti.

Si assuma come data la retta razionale *B*, e [si determini una retta *C* tale che] il quadrato di *C* sia uguale al rettangolo di *A*, *B* (II, 14); quindi la retta *C* è irrazionale (X, def. IV) – poiché un'area compresa da una retta irrazionale e da una razionale è irrazionale [deduzione da X, 20: e difatti, se fosse area razionale, tale rettangolo applicato ad una retta razionale darebbe altezza razionale]. La retta *C*,

inoltre, non è uguale a nessuna delle rette precedenti *A*, *B*: infatti il quadrato di nessuna delle precedenti, se applicato ad una retta razionale, forma [un rettangolo avente] per altezza una retta mediale [X, 20 e X, 22: il quadrato di una retta razionale, ed anche il quadrato di una retta mediale, se applicati ad una retta razionale, formano rettangoli aventi altezza razionale]. Di nuovo, adesso, [si determini una retta *D* tale che] il quadrato di *D* sia uguale al rettangolo di *B*, *C* (II, 14); il quadrato di *D* è perciò irrazionale [deduzione da X, 20: se fosse area razionale, dovrebbe essere *C* una retta razionale]. Quindi *D* è retta irrazionale (X, def. IV), e non è uguale a nessuna delle rette precedenti *A*, *B*, *C*: difatti il quadrato di nessuna delle precedenti, se applicato ad una retta razionale, forma [un rettangolo avente] *C* per altezza [- in particolare, il quadrato di *C*, applicato alla retta razionale *B*, dà l'altezza *A*]. Appare allora evidente che, proseguendo allo stesso modo e all'infinito un tale ordinamento, si originano da una mediale infinite rette irrazionali, e che nessuna di esse è uguale a nessuna delle precedenti. - C.D.D.[a]

APPLICA: X, 20.

a. Proposizione, la X, 115, che si concorda con Heiberg generalmente nel ritenere distante dagli scopi del libro X, ed interpolata quindi con ogni probabilità, e pure prima di Teone.

LIBRO UNDICESIMO

Il libro undicesimo è dedicato alla trattazione della geometria solida elementare: relazioni di posizione tra piani e rette nello spazio, proprietà degli angoli solidi (angoloidi), studio dei prismi (casi particolari: parallelepipedi e cubi). In altri termini, potrebbe dirsi che, prescindendo dalla relazione di parallelismo, nel libro undicesimo si tratti di quegli argomenti di stereometria che non richiedano l'intervento dell'infinito. Infatti questioni riguardanti l'uguaglianza di volume di solidi prismatici si risolvono al finito: è in generale possibile, similmente a quanto vale per i poligoni in geometria piana, scomporre due prismi di uguale volume in un numero finito di parti finite a due a due uguali.

La possibilità di ricondurre l'equivalenza alla equicomposizione con parti finite uguali non si ha più in geometria piana con figure che non siano poligoni, in geometria solida con figure che non siano prismi.

Si deve dunque, per paragonare ad esempio un cerchio e un quadrato in geometria piana o due piramidi in geometria solida, ricorrere a procedimenti complessi e delicati, soggiacente ai quali è, in sostanza, l'idea di suddividere figure del genere in un numero infinitamente grande di parti infinitamente piccole a due a due uguali.

Ma un tale crudo *intervento del concetto di infinito, se trova il suo giusto posto in periodi creativi e fluidi, quale ad esempio è quello che condusse al calcolo infinitesimale, dà luogo*

a gravi inconvenienti in una trattazione che voglia essere sistematicamente rigorosa.

Una soluzione della difficoltà venne offerta, anche in questo campo, da Eudosso di Cnido col suo metodo di esaustione.

Ebbene: il libro degli Elementi *che Euclide dedica ai problemi dell'infinito che si presentano nella determinazione di aree e di volumi, e nel quale quindi applica varie volte il rigoroso* metodo di esaustione, *è il libro dodicesimo.*

Conformemente all'indirizzo prettamente teorico degli Elementi, *Euclide non dà vere e proprie regole di misura, ma ne fornisce i presupposti. Così, per esempio, nella XII, 2 viene dimostrato che i cerchi stanno tra loro come i quadrati dei rispettivi diametri: esiste cioè un rapporto costante tra l'area d'un cerchio e quella del quadrato del suo diametro. Tale rapporto è il numero che noi indichiamo con* $\pi/4$. *E se si pone:*

$$\frac{C}{D^2} = \frac{C}{4R^2} = \frac{1}{4}\pi$$

si ha:

$$C = \frac{\pi}{4} D^2 = \pi R^2$$

Ma la semplice regola non viene data da Euclide, e tanto meno viene offerto il calcolo numerico del rapporto costante. Sarà Archimede che nella sua classica opera Sulla misura del cerchio *troverà la famosa limitazione per* π:

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{10}{70}$$

Il valore approssimato per eccesso, che è uguale a $3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}$, *è quello che verrà poi più comunemente usato attraverso i secoli, fino all'introduzione della scrittura delle frazioni sotto forma di numero decimale.*

Finalmente nell'ultimo libro, il tredicesimo, Euclide (dopo una serie di lemmi riguardanti la sezione aurea, cioè la divisione in estrema e media ragione) passa allo studio dei cinque poliedri regolari.

Egli parte da una sfera data, ossia di diametro dato, e si propone di costruire ciascun poliedro regolare in modo che risulti iscritto in una sfera uguale a quella data.

Per ciascun poliedro regolare, poi, egli trova la relazione tra lo spigolo e il diametro della sfera circoscritta. Trova così anzitutto i primi tre classici risultati riguardanti il tetraedro, l'ottaedro, il cubo: il quadrato del diametro della sfera è una volta e mezza il quadrato dello spigolo del tetraedro, è doppio del quadrato dello spigolo dell'ottaedro, è triplo del quadrato dello spigolo del cubo.

Invece per gli altri due poliedri regolari, icosaedro e dodecaedro, Euclide trova che, assumendo come retta razionale il diametro della sfera, i relativi spigoli non sono razionali, ma son quelle rette irrazionali dette rispettivamente minore *e* apotome.

È questa l'unica applicazione che della teoria delle rette irrazionali del libro decimo venga fatta negli Elementi *(se si prescinde dai risultati riguardanti la sezione aurea, e la parte residua, di una retta razionale: XIII, 6: risultati che d'altra parte vengono applicati per il dodecaedro).*

C'è stato quindi chi ha messo in luce la sproporzione esistente tra la lunghissima ed elaborata trattazione del libro decimo e lo scarsissimo uso che se ne fa nel séguito degli Elementi. *Noi abbiamo creduto di rispondere nella nota introduttiva del libro decimo, prospettando l'ipotesi che Euclide, in detto libro decimo, si sia fermato a lungo su un argomento a lui caro, facendo eccezione alla pur ferrea regola dell'*utilità *di ciascuna proposizione (da considerare a guisa di lemma) in vista delle proposizioni seguenti.*

Egli avrebbe quindi, nel libro decimo, dato via libera al suo estro matematico e alla sua rigorosa precisione di trattatista.

Tornando al libro undicesimo, occorre dire che esso ha inizio con una serie di definizioni, ma che nessun nuovo postulato viene in esso enunciato. Ciò porta ad alcuni difetti nella trattazione, che vengono messi in evidenza nelle note alle relative proposizioni.

Forse Euclide non ebbe il tempo di approfondire la considerazione delle esigenze del rigore per la geometria solida: non

va dimenticato che il Platone della Repubblica *lamenta, una cinquantina d'anni appena, o anche meno, prima di Euclide, lo stato di estrema arretratezza nella quale ai suoi tempi si trovava lo studio della stereometria. Forse il maggior progresso immediato venne compiuto nei riguardi della costruzione dei poliedri regolari, tanto è vero che Platone si serve di questi, nel seguente dialogo* Timeo, *come di supporto matematico, per dir così, alla sua teoria fisica sugli elementi fuoco, aria, acqua, terra.*

E del resto la trattazione dei problemi riguardanti i poliedri regolari è in Euclide ben soddisfacente.

Più tardi e limitati dovettero essere, invece, i progressi nella sistemazione rigorosa di quella parte della geometria solida che Euclide tratta nel libro undicesimo.

Chiudiamo questa nota facendo osservare che Euclide non si occupa di problemi riguardanti la misura delle superficie dei solidi da lui studiati: così per esempio, mentre egli dimostra il teorema fondamentale sulla proporzionalità delle sfere ai cubi dei diametri (XII, 18: l'ultima proposizione di detto libro), nulla aggiunge nei riguardi della superficie della sfera.

È ad Archimede che la scoperta *relativa sarà dovuta: quella scoperta che, a quanto sembra, Archimede volle ricordata sulla sua tomba, con l'incisione della figura d'una sfera e del cilindro circoscritto, la superficie laterale del quale il grande matematico siracusano dimostrò essere uguale alla superficie della sfera.*

A. F.

NOTA AI PRINCÌPI DEL LIBRO UNDICESIMO

I princìpi premessi al libro undicesimo sono esclusivamente definizioni. Del resto, ciò si verifica anche per altri libri ai quali siano premessi princìpi. È soltanto al libro primo che, oltre le definizioni, sono premessi anche i postulati e le cosiddette *Nozioni comuni*.

C'è poi solo un caso, nel libro quinto, nel quale Euclide introduce ancora un postulato (quel che potremmo chiamare il *sesto postulato di Euclide*): si tratta di quello che nel secolo XIX verrà indicato con la impropria denominazione di *postulato di Archimede*. Tuttavia Euclide trova il modo di inserire questo postulato tra le definizioni: si tratta appunto della definizione quarta del libro quinto. Rinviamo il lettore alla nota a detta definizione: ricordiamo qui soltanto che in essa si *definiscono* come *aventi rapporto tra loro* quelle coppie di grandezze che soddisfano al detto postulato, ossia tali che ciascuna grandezza, *moltiplicata*, supera l'altra.

Qui, nel libro undicesimo, Euclide non può limitarsi, invero, né ai cinque postulati premessi al libro primo, né al cosiddetto sesto postulato: passando dalla geometria piana alla geometria solida egli ha bisogno di qualche altro postulato. E provvede a questa esigenza nelle prime due o tre proposizioni (XI, 1, 2, 3) nel modo che viene illustrato nelle nostre note alle proposizioni stesse. Per il momento ci limitiamo a far presente che assai spesso le prime proposizioni (teoremi o problemi) di un libro degli *Elementi* hanno un carattere introduttivo rispetto alla materia successivamente trattata. Così nel libro quinto le prime proposizioni si riferiscono al caso del rapporto intero e rappresentano quindi una introduzione alla teoria generale delle proporzioni tra grandezze. Ed anche le prime proposizioni del libro decimo (ed

in particolare la prima, che espone in una forma particolare il cosiddetto postulato di Archimede) hanno carattere introduttivo.

Per il libro primo le prime proposizioni (fino alla quarta compresa), non soltanto costituiscono un'introduzione, ma sono anche strettamente legate ai postulati, dei quali sono una specie di complemento.

Infatti, come s'è veduto, la prop. I, 1 (costruzione del triangolo equilatero) contiene un vero e proprio postulato, e addirittura un postulato può dirsi sia la I, 4 (primo criterio di eguaglianza dei triangoli). Inoltre le proposizioni I, 2 e I, 3 rappresentano una precisazione della portata del terzo postulato (sulla costruzione del cerchio).

Non c'è dunque da meravigliarsi se le primissime proposizioni del libro undicesimo rappresentino, nei riguardi della nuova materia in detto libro trattata, un modo di esprimere i necessari postulati aggiuntivi, sia pure sotto forma di apparenti teoremi.

Le definizioni premesse al libro undicesimo sono ben ventotto. Per alcune di esse occorre ricordare il carattere *descrittivo* che le definizioni hanno per Euclide (si vedano le note ai princìpi del libro primo): si tratta cioè della *descrizione* di ciò che già esiste. Inutile quindi cercare un valore logico in alcune definizioni, le quali in sostanza *descrivono* enti che modernamente vengono considerati come *primitivi*, cioè vengono introdotti senza definizione.

Così la prima definizione (quella del solido, come ente avente tre dimensioni) non ha nessun valore logico, poiché vengono in essa introdotte *lunghezza*, *larghezza* e *altezza*, che non sono altrimenti definite.

Lo stesso si dica della seconda definizione, quella di superficie come *limite del solido*. Qui infatti, anche prendendo per buona la definizione del *solido*, non è definito il concetto del *limite* (πέρας).

Del resto, questa definizione seconda (di superficie) è tratta di peso dal dialogo platonico *Menone*.

In questo viene definita la *figura geometrica* (σχῆμα) a due dimensioni appunto come *limite del solido* (στερεοῦ πέρας) cioè con le stesse parole che sei o sette decenni più tardi adopererà Euclide. E nel brano in questione (*Menone*, 73*e*-76*a*) Platone giunge alla sua definizione premettendo che occorre che i due interlocutori si accordino, convenendo (senza sofisticare) di saper

già che cosa s'intenda per *limite* e che cosa s'intenda per *solido*, cioè assumendo in sostanza come *primitivi* i relativi concetti.

Naturalmente il fatto che Euclide attinga direttamente da Platone una importante definizione è assai significativo. Se anche non volessimo parlare di una influenza che la filosofia di Platone possa aver esercitato su Euclide, potremmo tuttavia considerare la derivazione di quella definizione come una prova del fascino che Platone dovette su Euclide esercitare: forse soprattutto a causa dell'importanza che il grande filosofo attribuì alla matematica?

Va aggiunto che la definizione euclidea di superficie si ricollega direttamente alle definizioni sesta e terza del libro primo, che rispettivamente introducono le linee come estremi, termini (πέρατα) della superficie, e i punti come termini della linea. E che il sistema delle tre definizioni (che partendo dal solido giungono attraverso la superficie e la linea fino al punto) sia di origine platonica sembra avvalorato anche da una testimonianza di Aristotele (*Metafisica*, I, 929*a*).

La definizione XI, 3 è quella di retta perpendicolare a un piano come perpendicolare a tutte le rette del piano passanti per il piede. Questa definizione è da mettersi in relazione con la proposizione XI, 4, la quale stabilisce che affinché una retta sia perpendicolare ad un piano nel senso della definizione basta che sia perpendicolare a *due* rette del piano passanti per il piede. Questa è cioè una condizione che, se verificata, permette di affermare che effettivamente una retta è perpendicolare a *tutte* le rette del piano passanti per il piede.

La definizione quarta è quella di due piani perpendicolari tra loro. Si ammette che i due piani si intersechino. Che l'intersezione di due piani sia una retta viene poi *dimostrato* nella proposizione XI, 3: ma in Euclide le definizioni non hanno un legame logico con le proposizioni seguenti, costituendo spesso un'anticipazione di esse. Così del resto, nella precedente def. 3, che presuppone il teorema XI, 4.

Si può anche citare, a questo proposito, la definizione ventesima del libro primo, nella quale vengono distinti i triangoli in rettangoli, ottusangoli, acutangoli, presupponendosi, in certo senso, la proposizione 17 dello stesso libro primo, la quale, stabilendo che in ogni triangolo la somma di due angoli è sempre minore di due retti, costituisce la base della suddetta distinzione.

Due piani vengon detti perpendicolari se conducendo in uno di essi una retta perpendicolare alla retta d'intersezione comune, essa risulta perpendicolare all'altro piano. Se si pone mente al fatto che una retta tracciata in tal modo è perpendicolare a tutte le rette del secondo piano passanti per il piede, quindi anche alla retta d'intersezione e alla perpendicolare a questa condotta sul secondo piano per il piede stesso, si vede che la definizione euclidea corrisponde a quella, modernamente usata, di piani perpendicolari come quelli per i quali la sezione normale di un loro diedro è un angolo retto.

Nella definizione quinta si spiega che cosa sia l'*inclinazione* (κλίσις) di una retta rispetto a un piano: si tratta dello stesso concetto che oggi in termini moderni esprimiamo dicendo che inclinazione di una retta rispetto a un piano è l'angolo (acuto) che la retta forma con la sua proiezione ortogonale sul piano.

La definizione sesta corrisponde alla nostra di *sezione normale* di un diedro. Inclinazione di un piano rispetto ad un altro piano è infatti per Euclide l'angolo *acuto* che formano tra loro due rette condotte in ciascuno dei due piani e perpendicolari alla retta d'intersezione in uno stesso punto. Si osservi che la precedente definizione quarta avrebbe potuto trovar posto come caso particolare della definizione sesta: se l'*inclinazione* fosse un angolo retto i due piani sarebbero perpendicolari tra loro. Ma Euclide ha, evidentemente, voluto dare un posto particolare alla *perpendicolarità* rispetto alle altre inclinazioni.

La definizione ottava di piani paralleli, come piani che non si incontrano, è corrispondente alla famosa def. 23 del libro primo di rette parallele.

Che cosa significhi che due figure solide (στερεὰ σχήματα) siano uguali, cioè uguali in grandezza, equivalenti, Euclide non dice: evidentemente egli si riporta al concetto di uguaglianza (estensiva) del quale ha fornito una definizione implicita attraverso le *Nozioni comuni* premesse al libro primo.

Egli definisce invece (def. 9) le figure solide simili: è necessario ciò per riportare allo spazio la definizione di poligoni simili data nel libro sesto. Non si tratta delle figure solide considerate in generale, ma soltanto di quelle limitate da facce piane (poligonali), ossia dei poliedri. Perché due tali figure solide si dicano simili occorre che si verifichino due condizioni: 1) che siano limitate dallo stesso numero di facce piane; 2) che le facce limi-

tanti siano simili a due a due (per i coni e i cilindri *simili* si ha poi una definizione apposita: la ventiquattresima).

Nella definizione seguente (la decima) Euclide, fondandosi sulla precedente definizione di similitudine e sul concetto generale di uguaglianza (estensiva) adombrata nelle *Nozioni comuni*, passa a definire le figure solide uguali e simili (ἴσα καὶ ὅμοια), cioè quelle aventi al tempo stesso la medesima estensione e la medesima forma. Questa somma logica, per dir così, dell'equivalenza e della similitudine, è l'uguaglianza in senso stretto, cioè la congruenza (con l'eccezione, per quest'ultimo termine, del caso delle figure *simmetriche*, cioè aventi uguali estensione e ugual forma, ma non sovrapponibili).

Nella geometria piana, per la quale Euclide svolge la teoria delle figure congruenti senza ricorrere alle proporzioni, una tal definizione non sarebbe stata utilizzabile: ivi Euclide riconduce l'uguaglianza in senso stretto (congruenza) all'equivalenza e all'uguaglianza ordinata di tutti gli elementi (lati ed angoli per i poligoni). È questa la strada che verrà poi ripercorsa da Hilbert, e da Enriques e Amaldi nei loro trattati scolastici.

Queste definizioni 9 e 10 del libro undicesimo hanno dato luogo a critiche e discussioni, che vengono ampiamente esposte nelle edizioni di Heath (vol. III, pp. 265-267) e di Enriques (vol. IV, pp. 27-30). Ad esempio la def. 10 chiama « uguali e simili », cioè uguali in senso stretto (come non distinguibili l'una dall'altra) due figure solide limitate da ugual numero di facce piane « uguali e simili », cioè uguali in senso stretto. Ma chi ci assicura che una tale uguaglianza *stretta* tra figure solide si verifichi quando sian soddisfatte le condizioni poste nella def. 10? L'intuizione suggerisce, infatti, che affinché due figure solide siano, ad esempio, sovrapponibili (simmetria a parte) occorre che in esse anche gli angoli solidi (angoloidi) siano a due a due *uguali*.

Occorrerebbero quindi teoremi (ai quali i posteri, Simson, Legendre, Cauchy, hanno dedicato la loro attenzione) per giustificare la definizione decima. Ma gli angoloidi delle figure considerate da Euclide sono tutti triedri, ed Euclide sa che triedri aventi le facce uguali sono *uguali*, cioè constata l'univocità della costruzione di un triedro avente facce date (si veda per questo la nota alla proposizione XI, 23).

La trattazione euclidea, limitata ai soli angoloidi triedri, resta quindi ampiamente accettabile.

L'*angolo solido* viene definito da Euclide in due modi diversi (def. 11): il primo di essi viene ritenuto da Heiberg di origine più antica, cioè trasportato da *Elementi* anteriori a quelli di Euclide. Ciò perché, a suo avviso, lo stile della prima definizione si allontana da quello solito di Euclide. Comunque, la prima definizione si presenta come una naturale estensione della definizione I, 8 di angolo piano. Si parla anche qui di *inclinazione* (κλίσις); ma mentre per l'angolo piano si tratta della mutua inclinazione di due sole rette, qui invece si considerano più di due rette e tutte le mutue inclinazioni tra di esse. Per l'angolo piano le due rette partono da un'origine comune (vertice dell'angolo) e questo fatto è espresso da Euclide con la locuzione che le rette si *toccano* (ἁπτομένων ἀλλήλων).

Così anche per l'angolo solido: le rette si toccano (e viene usata la stessa locuzione). Altra analogia: per l'angolo piano non si parla di *rette*, ma di linee (γραμμῶν): solo nella seguente definizione (9ª del libro I) si precisa che se le linee sono rette l'angolo si dice rettilineo. Così anche qui si parla di linee (γραμμῶν) e non di rette: manca la corrispondente precisazione, ma Euclide tratta nel seguito unicamente di angoli solidi a spigoli rettilinei. Per l'angolo piano i due lati non devono appartenere alla stessa retta, per l'angolo solido gli spigoli non devono appartenere « alla stessa superficie » (s'intende, per la superficie piana, che tre spigoli rettilinei non devono essere complanari).

Occorre allora dire che se Heiberg ha motivi fondati per ritenere anteriore a Euclide la prima definizione di angolo solido (sicché soltanto per un motivo di carattere storico e tradizionale Euclide la riporterebbe), anche la definizione di angolo del libro primo dovrebbe avere la stessa origine. Euclide avrebbe dunque dato la definizione I, 8 di angolo piano, insoddisfacente e sostanzialmente tautologica, unicamente per aderenza ad una tradizione.

Per l'angolo piano (a parte la precisazione relativa all'angolo rettilineo) non c'è altro: per l'angolo solido abbiamo qui invece una seconda definizione che si fonda proprio sul concetto di angolo piano, indicando l'angolo solido come ciò che è compreso (περιεχομένη) da più di due angoli piani aventi il vertice in comune e non giacenti in uno stesso piano. Sembra, quindi, che in questa seconda definizione Euclide tenda ad esprimere l'angolo solido come parte di spazio: e appare invero strano che nel libro primo egli non abbia sentito il bisogno di indicare l'angolo piano come parte di piano. Seguono ora le definizioni di piramide

(def. 12) e di prisma (def. 13) le quali più o meno corrispondono alle nostre usuali.

La sfera (def. 14) viene definita come figura generata dalla rotazione completa di un semicerchio intorno al suo diametro. Questo diametro si dice *asse* (ἄξων) della sfera (def. 15) ed è anche *diametro* della sfera stessa (def. 17).

Il cono (def. 18) viene definito come generato dalla rotazione completa di un triangolo rettangolo intorno ad uno dei cateti. Se il triangolo è isoscele, cioè se i due cateti sono uguali, il cono si dice rettangolo (ὀρθογώνιος); se il cateto che fa da asse di rotazione è minore dell'altro cateto il cono si dice ottusangolo (ἀμβλυγώνιος), se è maggiore il cono si dice acutangolo (ὀξυγώνιος).

Questa distinzione è storicamente importante perché legata alla generazione delle sezioni coniche, adottata prima di Apollonio. Anziché considerare le tre curve, come Apollonio fece, quali sezioni di uno stesso cono, facendo dipendere la diversità (di una curva dall'altra) dalla giacitura del piano secante, venivano ottenute le tre curve dalle tre specie di coni cui si riferisce la definizione euclidea.

Il piano secante veniva considerato sempre perpendicolare ad una generatrice del cono: se quest'ultimo era acutangolo si aveva l'ellisse, se era rettangolo si aveva la parabola, se era ottusangolo si aveva l'iperbole.

Ma occorre avvertire che i nomi *ellisse*, *parabola*, *iperbole*, furono introdotti da Apollonio, il quale le prese a prestito dalle tre specie di applicazione delle aree, con ciascuna delle quali ciascuna delle tre curve era in una certa relazione.

Prima di Apollonio, ad esempio in Archimede, le tre curve venivano indicate con le denominazioni di « sezione di cono ottusangolo », « sezione di cono rettangolo », « sezione di cono acutangolo ».

Euclide passa ora alla definizione del cilindro (def. 21) come la figura generata dalla rotazione di un rettangolo intorno ad uno dei suoi lati.

Ciò che per Euclide caratterizza la *forma* di un cono rispetto alla *forma* di un altro cono (a prescindere quindi dalla *forma* comune a tutti i coni) è il rapporto tra l'altezza del cono stesso e il diametro della sua base. Sicché se in due coni detto rapporto è lo stesso, cioè se le altezze e i diametri di base sono tra loro in proporzione, i due coni vengon detti simili (ὅμοιοι) (def. 24). Analogamente per i cilindri (nella stessa def. 24).

Le definizioni del libro undicesimo degli *Elementi* si chiudono con quelle n. 25, 26, 27, 28, che si riferiscono ai poliedri regolari: cubo, ottaedro, icosaedro, dodecaedro. Così il cubo è la figura solida compresa da sei quadrati uguali, l'ottaedro è la figura solida compresa da otto triangoli uguali ed equilateri, è così di séguito.

Si osservi la mancanza del tetraedro; ad esso tuttavia può riportarsi la definizione (dodicesima) più generale di piramide.

Si osservi ancora che, a parte il cubo (κύβος), che ha un nome speciale, per l'ottaedro, l'icosaedro e il dodecaedro Euclide si serve del termine comune (che indica soltanto il numero delle facce), senza aggiungere qualche aggettivo che corrisponda a quello nostro *regolare*. La stessa osservazione, del resto, si riferisce anche al libro tredicesimo, nel quale si costruiscono i poliedri regolari.

A. F.

DEFINIZIONI

I. È un solido ciò che ha lunghezza, larghezza e profondità [cioè, che ha lunghezza, larghezza, ed altezza].

II. Limite di un solido è la superficie.

III. Una retta è perpendicolare ad un piano, quando forma angoli retti con tutte le rette che la incontrino e che siano su quel piano.

IV. Un piano è perpendicolare ad un altro piano, quando le rette condotte, in uno dei piani, perpendicolarmente alla intersezione comune dei piani [stessi], sono perpendicolari all'altro piano.

V. Inclinazione di una retta rispetto ad un piano: se si conduce una perpendicolare dal termine superiore della retta al piano, e dal punto così originatosi [piede della perpendicolare] si traccia la congiungente al termine inferiore della retta sul piano, è l'angolo che è formato dalla congiungente così condotta e dalla retta sovrastante.

VI. Inclinazione di un piano rispetto ad un altro piano è l'angolo acuto compreso dalle rette condotte in ciascuno dei due piani, perpendicolarmente alla loro intersezione comune per uno stesso punto [di questa].

VII. Si dice che un piano è inclinato rispetto ad un altro piano così come un terzo lo è rispetto a un quarto, quando gli angoli d'inclinazione (di cui

s'è detto nella definizione precedente) sono uguali tra loro.

VIII. Sono paralleli i piani che non si incontrino.

IX. Sono figure solide simili quelle che siano comprese da piani [= facce] simili, uguali per numero.

X. Figure solide uguali e simili sono quelle che siano comprese da piani [= facce] simili, uguali per numero e per grandezza.

XI. Angolo solido è l'inclinazione [reciproca] di più di due linee [rette], che si tocchino fra loro, ma non siano sulla stessa superficie. O altrimenti: angolo solido è quello compreso da più di due angoli piani, che non siano nello stesso piano ed abbiano in comune un punto [vertice].

XII. Piramide è una figura solida compresa da piani che, partendo da un piano, concorrano in un punto.

XIII. Prisma è una figura solida compresa da piani, due dei quali, opposti, sono uguali, simili, e paralleli, mentre i restanti sono parallelogrammi.

XIV. Sfera è la figura che viene compresa quando, restando immobile il diametro di un semicerchio, si faccia ruotare il semicerchio intorno al diametro finché non ritorni nuovamente nella stessa posizione da cui si cominciò a farlo muovere.

XV. Asse di una sfera è la retta immobile attorno a cui si fa ruotare il semicerchio.

XVI. Centro di una sfera è quello stesso punto che è anche il centro del semicerchio.

XVII. Diametro di una sfera è una retta la quale sia condotta per il centro, e che sia terminata da ambedue le parti sulla superficie della sfera.

XVIII. Cono è la figura che viene compresa quando, in un triangolo rettangolo, resti immobile uno dei lati comprendenti l'angolo retto, e si faccia ruotare il triangolo intorno ad esso finché non ritorni nuovamente nella stessa posizione da cui si cominciò a farlo muovere. E se la retta che rimane immobile è uguale all'altra comprendente l'angolo

retto e che vien fatta ruotare, il cono sarà rettangolo, se invece è minore, il cono sarà ottusangolo, e se è maggiore, sarà acutangolo.

XIX. Asse di un cono è la retta immobile intorno alla quale si fa ruotare il triangolo.

XX. Base di un cono è il cerchio che viene descritto dalla retta che si faccia ruotare.

XXI. Cilindro è la figura che viene compresa quando, in un rettangolo, resti immobile uno dei lati comprendenti l'angolo retto, e si faccia ruotare il rettangolo finché non ritorni nuovamente nella stessa posizione da cui si cominciò a farlo muovere.

XXII. Asse di un cilindro è la retta immobile intorno alla quale si fa ruotare il rettangolo.

XXIII. Basi di un cilindro sono i cerchi che vengono descritti dai due lati opposti [del rettangolo] nel loro ruotare.

XXIV. Sono simili quei coni e quei cilindri di cui gli assi, ed i diametri delle basi, siano proporzionali.

XXV. Cubo è una figura solida compresa da sei quadrati uguali.

XXVI. Ottaedro è una figura solida compresa da otto triangoli uguali ed equilateri.

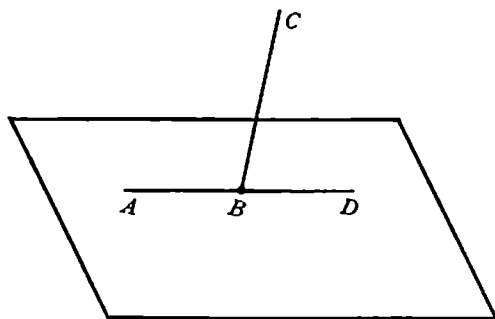
XXVII. Icosaedro è una figura solida compresa da venti triangoli uguali ed equilateri.

XXVIII. Dodecaedro è una figura solida compresa da dodici pentagoni uguali, equilateri, ed equiangoli.

PROPOSIZIONI

PROPOSIZIONE I.

Non può darsi che una linea retta sia in parte su un piano dato [a] *ed in parte su un altro piano elevato sul primo.*

Infatti, se possibile, una parte AB della linea retta ABC sia sul piano dato, ed un'altra BC su un piano elevato sul primo.

Vi sarà allora, nel piano dato, una retta che continui AB per diritto. Sia essa BD, per cui AB è parte comune delle due rette ABC, ABD: il che è impossibile [b], poiché se con centro B e per raggio AB, descriviamo un cerchio, i suoi diametri

a. Concordiamo con Heath, *op. cit.*, 3, p. 272, nel ritenere che τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον significhi « il piano assunto (*sottoposto* in questo senso, cioè, alla nostra considerazione), il piano di riferimento, cui intendiamo riferirci », e non come Heiberg, *planum subiacens*, piano che sta sotto, soggiacente, per i seguenti motivi: 1) Euclide non usa mai, altrove, ὑποκεῖσθαι nel senso di star sotto, anche se poi sono questi i casi specifici in cui potrebbe essere così usato; usa invece ὑπόκειται, ecc. nel senso di « si è ammesso, si è supposto, si dà per ipotesi »; 2) non vi è qui nessun confronto tra un piano superiore ed uno inferiore, tanto è vero che una retta giace in un piano in quanto è perfettamente livellata al piano stesso, secondo la definizione di piano come una superficie che giaccia parimente rispetto alle linee rette su di esso.

b. Una lezione alternativa, dovuta forse a Teone, dice dopo le parole « il che è impossibile » del testo greco: « infatti una retta non può incontrare un'altra retta in più punti di uno; altrimenti le rette verranno a coincidere ».

verrebbero in tal caso a tagliare archi della circonferenza del cerchio disuguali.

Dunque, non può darsi... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

È APPLICATA IN: XI, 2; XI, 16.

PROPOSIZIONE 2.

Se due rette si tagliano fra loro, sono in uno stesso piano, così come ogni triangolo è in uno stesso piano[1].

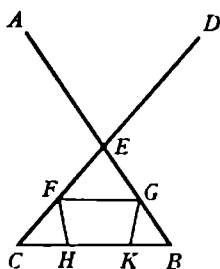
Infatti, due rette AB, CD si taglino fra loro nel punto E; dice che AB, CD sono in uno stesso piano, così come ogni triangolo è in uno stesso piano.

[1] Come è stato avvertito nella nota introduttiva ai princìpi di questo libro undicesimo, le tre prime proposizioni del libro non vanno, a nostro avviso, considerate come veri e propri teoremi, ma come proposizioni che espongono postulati. Si tratta dei postulati fondamentali del piano, che sono strettamente necessari per la fondazione della geometria solida, che qui ha inizio.

Nessun valore logico va quindi, secondo il nostro parere, attribuito alle *dimostrazioni* di questi tre primi teoremi, ma unicamente può vedersi in essi una illustrazione, o anche (se si vuole) una *giustificazione* intuitiva dei postulati in questione.

Il primo postulato afferma che se una retta ha due punti in comune con un piano, essa giace completamente nel piano. L'enunciato della prima proposizione dice appunto che se *una parte* di una retta giace in un piano, anche *l'altra parte* giace nello stesso piano (non può essere elevata su di esso). Euclide considera un segmento di retta AB giacente nel piano « soggiacente » ossia nel « piano di riferimento »: in base al postulato I (del libro primo) sulla possibilità di congiungere due punti qualunque con un segmento di retta, avrebbe anche potuto partire dall'ipotesi che la retta avesse i punti A, B in comune col piano. Si riferisce poi al postulato secondo (del libro primo), tracciando sul piano il prolungamento della AB. L'assurdo dei due prolungamenti (quello così tracciato nel piano e quello che si suppone possa esistere fuori del piano) viene mostrato da Euclide in modo non soddisfacente; tra l'altro viene presupposta la proposizione seguente. Ma (ripetiamo) qui si tratta soltanto di una *spiegazione* a carattere intuitivo.

Nella seconda proposizione si *dimostra* che se due rette si tagliano, esse giacciono in uno stesso piano, e che un triangolo avente quelle due rette come lati (e un terzo lato qualsiasi) giace interamente in quel piano medesimo. Si tratta, in sostanza, del secondo postulato del piano, che possiamo enunciare così: Tre punti non allineati individuano un piano

Si prendano difatti su *EC*, *EB* i punti *F*, *G* a piacere, si traccino le congiungenti *CB*, *FG*, e si conducano *FH*, *GK*; dico in primo luogo che il triangolo *ECB* è [contenuto] in uno stesso piano. Se infatti una parte del triangolo *ECB*, ossia *FHC* o *GBK*, fosse su un piano, e la parte rimanente su un altro, anche una parte delle rette *EC*, *EB* sarebbe su un piano, e l'altra che rimane su un altro. E se nel triangolo *ECB* la parte *FCBG* fosse su un piano, mentre il resto fosse su un altro, pure una parte di tutt'e due le rette *EC*, *EB* sarebbe su un piano, mentre il resto sarebbe su un altro: il che fu dimostrato assurdo (XI, 1). Il triangolo *ECB* è quindi in uno stesso piano. Ma sul piano in cui è il triangolo *ECB* si trova pure ciascuna delle due rette *EC*, *EB*, e su quello in cui si trova ciascuna delle due *EC*, *EB* sono anche *AB*, *CD* (XI, 1). Dunque, le rette *AB*, *CD* sono in uno stesso piano, così come ogni triangolo è in uno stesso piano. – C.D.D.

APPLICA: XI, 1.

È APPLICATA IN: XI, 6, 8, 17.

(od anche: una retta ed un punto ad essa non appartenente individuano un piano). La cosiddetta « dimostrazione » si fonda sulla proposizione precedente, ed è anche soggetta a ulteriori critiche. Nell'edizione di Enriques si legge a questo proposito: « Il ragionamento, se non venga meglio spiegato, appare così debole, che si stenta a credere che possa appartenere veramente ad Euclide » (vol. IV, p. 42: per cura di Amedeo Agostini).

A noi sembra che la « migliore spiegazione » non possa riguardare il ragionamento in sé stesso, ma il valore da attribuire ad esso nell'economia generale degli *Elementi* ed a quella particolare del libro undicesimo: che detta spiegazione si possa cioè trovare assegnando alle tre prime proposizioni del libro il carattere di esposizione intuitiva dei postulati del piano.

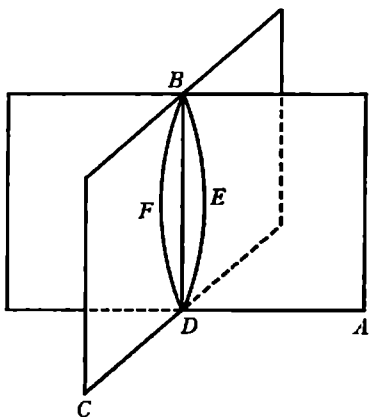
Per una diversa interpretazione delle tre prime proposizioni del libro undicesimo, cfr. S. MARACCHIA, *Sui « nèi » di Euclide*, in « Cultura e scuola », 1969.

PROPOSIZIONE 3.

Se due piani si tagliano fra loro, la loro intersezione comune è una retta [2].

Infatti, i due piani *AB*, *BC* si taglino fra loro, e sia loro intersezione comune la linea *DB*; dico che la linea *DB* è retta.

Se difatti non lo fosse, si tracci nel piano *AB* da *D* a *B* la congiungente *DEB*, e nel piano *BC* si tracci la retta *DFB*. Le due rette *DEB*, *DFB* avranno perciò i medesimi estremi, e comprenderanno evidentemente uno spazio: il che è assurdo. Quindi le linee *DEB*, *DFB* non sono rette. Similmente potremo dimostrare che non vi sarà nessun'altra retta tracciata a congiungere *D* a *B*, eccetto *DB*, che sia sezione comune dei piani *AB*, *BC*.

Dunque, se due piani si tagliano fra loro... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

È APPLICATA IN: XI, 5, 7, 13, 14.

PROPOSIZIONE 4.

Se una retta è innalzata perpendicolarmente, nel comune punto di intersezione, a due rette che si taglino fra

[2] Di solito, questo teorema viene così enunciato: « Se due piani hanno in comune un punto, essi hanno in comune una retta » (la retta d'intersezione, passante per quel punto). E la dimostrazione relativa sembra dovuta a Staudt. Qui, negli *Elementi*, a parte ogni altra considerazione, si fa appello ad un postulato inespresso (contenuto in qualche testo più tardo, tra le *Nozioni comuni*): « Due rette non possono comprendere uno spazio », vale a dire che è unica la *retta* congiungente due punti.

loro, essa sarà perpendicolare anche al piano che passa per esse[3].

Infatti, si innalzi una retta *EF* perpendicolarmente alle due rette *AB*, *CD*, che si tagliano fra loro nel punto *E*, partendo [appunto] da *E*; dico che *EF* è perpendicolare anche al piano che passa per le rette *AB*, *CD*.

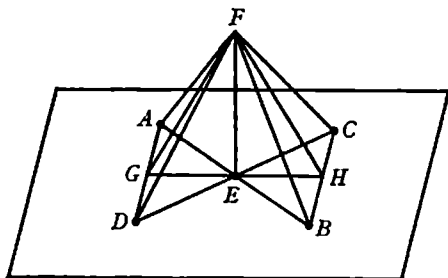
Si stacchino difatti *AE*, *EB*, *CE*, *ED*, uguali fra loro, si tracci per *E* una retta a caso *GEH* [sul piano di *AB*, *CD*], si traccino le congiungenti *AD*, *CB*, ed infine, da un punto *F* a piacere [sulla perpendicolare per *E*], le congiungenti *FA*, *FG*, *FD*, *FC*, *FH*, *FB*. E poiché le due rette[, cioè i due lati,] *AE*, *ED* sono uguali rispettivamente alle due rette *CE*, *EB*, e le une e le altre comprendono angoli uguali (I, 15), la base *AD* è uguale alla base *CB*, ed il triangolo *AED* sarà uguale al triangolo *CEB* (I, 4); cosicché anche gli angoli *DAE*, *EBC* sono uguali (id.). Ma sono pure uguali gli angoli *AEG*, *BEH* (I, 15). Quindi *AGE*, *BEH* sono due triangoli che hanno due angoli uguali rispettivamente a due angoli, ed un lato uguale ad un lato, quello adiacente agli angoli uguali, ossia *AE* uguale ad *EB*; avranno perciò uguali anche i lati rimanenti ai rispettivi lati rimanenti (I, 26). Quindi *GE* è uguale ad *EH*, ed *AG* è uguale a *BH*. Ora, poiché *AE* è uguale ad *EB*, ed è comune la perpendicolare *FE*, la base *FA* è uguale alla base *FB* (I, 4). Per la stessa ragione, anche *FC* è uguale a *FD*. E poiché *AD* è uguale a *CB*, ma pure *FA* è uguale a *FB*, i due lati *FA*, *AD* sono uguali rispettivamente ai due lati *FB*, *FC*; ora, fu dimostrato che la base *FD* è uguale alla base *FC*, per cui anche l'angolo *FAD* è uguale all'angolo *FBC* (I, 8). Di nuovo, poiché fu dimostrato che *AG* è uguale a *BH*, ma tuttavia, anche *FA* è

[3] Questa proposizione offre una precisazione nei riguardi della definizione terza di questo libro undicesimo. Ivi una retta perpendicolare ad un piano viene definita come quella perpendicolare a tutte (πρὸς πάσας) le rette del piano passanti per il piede. Ma esisterà una tal retta? La risposta affermativa è contenuta in questa prop. XI, 4: basta che la retta sia perpendicolare a *due* rette del piano perché sia perpendicolare a *qualunque altra* retta passante per il piede.

uguale a FB, i due lati FA, AG sono uguali rispettivamente ai due lati FB, BH. E fu dimostrato che l'angolo FAG è uguale all'angolo FBH; quindi la base FG è uguale alla base FH (I, 4). Ancora, poiché fu dimostrato che GE è uguale ad EH, ed EF è d'altra parte comune, i due lati GE, EF sono uguali rispettivamente ai due lati HE, EF; ora, la base FG è uguale alla base FH, per cui l'angolo GEF è uguale all'angolo HEF (I, 8). Quindi ciascuno dei due angoli GEF, HEF è retto (I, def. X). Perciò la retta FE, condotta a caso per E la GH, è perpendicolare a GH. Similmente potremo dimostrare che FE formerà angoli retti pure con tutte le rette che la incontrino e che siano sul piano dato. Ma una retta è perpendidolare ad un piano, quando formi angoli retti con tutte le rette che la incontrino e che siano sullo stesso piano (XI, def. III); perciò FE è perpendicolare al piano dato. Ma il piano a cui ci si riferisce è quello che passa per le rette AB, CD. Quindi FE è perpendicolare al piano che passa per AB, CD.

Dunque, se una retta è innalzata... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 4, 8, 15, 26.

È APPLICATA IN: XI, 5, 8, 9, 11; XIII, 15.

PROPOSIZIONE 5.

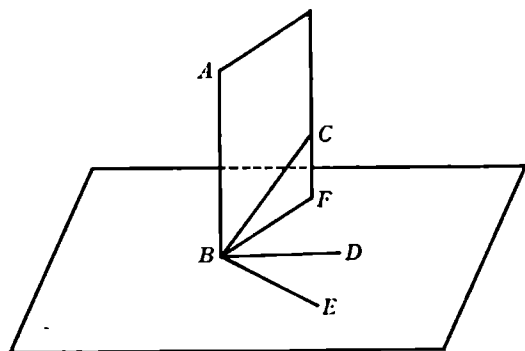
Se una retta è innalzata perpendicolarmente, nel comune punto di intersezione, a tre rette che si incontrino fra loro, le tre rette sono nello stesso piano [4].

[4] Questo teorema può, sia pure parzialmente, considerarsi come l'inverso di quello precedente.

Infatti nella XI, 4 si parte dall'ipotesi che una retta r sia perpendicolare a due rette a, b, d'un piano, si considera un'altra retta c del piano (passante per il piede) e si dimostra che la retta r è perpendicolare anche

Infatti, si innalzi una retta *AB* perpendicolarmente alle tre rette *BC*, *BD*, *BE* nel loro punto di contatto in *B*; dico che *BC*, *BD*, *BE* sono nello stesso piano.

Non lo siano difatti, ma, se possibile, *BD*, *BE* siano su un piano mentre *BC* sia su un altro piano su di esso elevato, e si tracci quello che passa per *AB*, *BC*: i due piani avranno come loro intersezione una retta (XI, 3). Sia essa la retta *BF*. Le tre rette *AB*, *BC*, *BF* sono quindi nello stesso piano, ossia quello condotto per *AB*, *BC*. E poiché *AB* è perpendicolare a ciascuna delle due rette *BD*, *BE*, essa è perpendicolare anche al piano che passa per *BD*, *BE* (XI, 4). Cosicché *AB* formerà angoli retti pure con tutte le rette che la incontrino e siano sul piano passante per *BD*, *BE* (XI, def. III). Ma la incontra *BF*, che è nel piano di *BC*, *BD*, per cui l'angolo *ABF* è retto. Ma è retto per ipotesi anche l'angolo *ABC*; l'angolo *ABF* è perciò uguale all'angolo *ABC*. E sono d'altra parte nello stesso piano: il che è impossibile. Quindi la retta *BC* non può essere su un piano diverso da quello di *BD*, *BE*, e le tre rette *BC*, *BD*, *BE* sono perciò nello stesso piano.

Dunque, se una retta è innalzata perpendicolarmente, nel comune punto di intersezione, a tre rette... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: XI, 3, 4.

È APPLICATA IN: XI, 6.

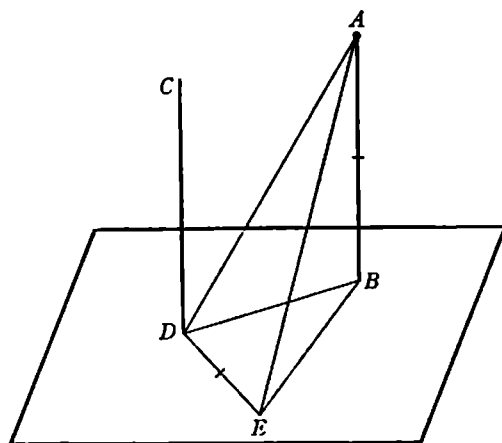
a quest'altra *c*. In questa XI, 5 si suppone che la prima retta *r* sia perpendicolare, oltre che ad *a*, *b*, anche ad una terza retta *c* passante per il piede, e si dimostra che *c* appartiene al piano di *a*, *b*.

PROPOSIZIONE 6.

Se due rette sono perpendicolari allo stesso piano, le rette saranno parallele.

Infatti, le due rette *AB*, *CD* siano perpendicolari ad un piano [o piano di riferimento]; dico che *AB* è parallela a *CD*.

Si incontrino difatti col piano dato nei punti *B*, *D*, si tracci la congiungente *BD*, si conduca, nel piano dato, *DE* perpendicolare a *BD*, si ponga *DE* uguale ad *AB*, e si traccino le congiungenti *BE*, *AE*, *AD*.

Ora, poiché *AB* è perpendicolare al piano dato, formerà angoli retti pure con tutte le rette che la incontrino e siano sul piano dato (XI, def. III). Ma ciascuna delle due rette *BD*, *BE*, che sono sul piano dato, incontra *AB*, per cui è retto ognuno dei due angoli *ABD*, *ABE*. Per la stessa ragione, anche ciascuno dei due angoli *CDB*, *CDE* è retto. E poiché *AB* è uguale a *DE*, e *BD* è comune, i due lati *AB*, *BD* sono uguali rispettivamente ai due lati *ED*, *DB*; gli uni e gli altri comprendono inoltre angoli retti: quindi la base *AD* è uguale alla base *BE* (I, 4). E poiché *AB* è uguale a *DE*, ma sono anche uguali *AD*, *BE*, i due lati *AB*, *BE* sono uguali rispettivamente ai due lati *ED*, *DA*, ed *AE* è loro base comune; quindi l'angolo *ABE* è uguale all'angolo *EDA* (I, 8). Ma l'angolo *ABE* è retto, per cui è retto pure l'angolo *EDA*; perciò *ED* è perpendicolare a *DA*. Ma essa è anche perpendicolare a ciascuna delle due rette *BD*, *DC*. È quindi *ED* innalzata, nel punto di contatto, perpendicolarmente alle tre rette *BD*, *DA*, *DC*, per cui le tre rette *BD*, *DA*, *DC* sono nello stesso piano (XI, 5). Ma sul piano in cui sono *DB*, *DA* è anche *AB* – difatti ogni triangolo è in uno stesso piano (XI, 2); perciò le rette *AB*, *BD*, *DC* sono nello stesso piano. Ora, ciascuno dei due angoli *ABD*, *BDC* è retto; quindi *AB* è parallela a *CD* (I, 28).

Dunque se due rette sono perpendicolari allo stesso piano... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 4, 8, 28; XI, 2, 5.

È APPLICATA IN: XI, 9; XII, 17; XIII, 16, 17.

PROPOSIZIONE 7.

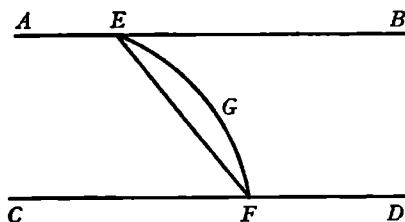
Se son date due rette parallele e su ciascuna si prendono dei punti a piacere, la retta che congiunga i punti in questione è nello stesso piano delle parallele.

Siano AB, CD due rette parallele, e su ciascuna di esse si prendano, a caso [e rispettivamente], i punti E, F; dico che la retta la quale congiunge i punti E, F è nello stesso piano delle parallele.

Infatti, supponiamo che non lo sia, ma, se possibile, sia su un piano in elevazione, come la retta EGF, e si faccia per EGF passare un piano; esso determinerà una retta d'intersezione col piano dato (XI, 3). La determini, quale la retta EF; quindi le due rette EGF, EF comprenderanno uno spazio: il che è impossibile. Perciò la congiungente di E, F non può trovarsi su un piano in elevazione [rispetto a quello delle parallele], e quindi la retta che congiunge E con F è nel piano che passa per le parallele AB, CD.

Dunque, se due rette sono parallele... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: XI, 3.

È APPLICATA IN: XI, 8; XII, 17.

PROPOSIZIONE 8.

Se son date due rette parallele, ed una di esse è perpendicolare ad un piano, anche l'altra sarà perpendicolare allo stesso piano [5].

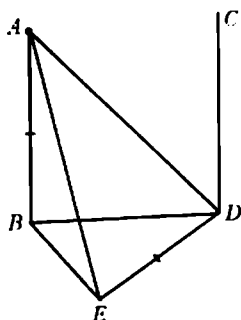
Siano *AB*, *CD* due rette parallele, ed una di esse, *AB*, sia perpendicolare ad un piano; dico che anche l'altra *CD* sarà perpendicolare allo stesso piano.

Infatti, *AB*, *CD* si incontrino col piano dato nei punti *B*, *D*, e si tracci la congiungente *BD*; quindi *AB*, *CD*, *BD* sono nello stesso piano (XI, 7). Si conduca, nel piano dato, *DE* perpendicolare a *BD*, si ponga *DE* uguale ad *AB*, e si traccino le congiungenti *BE*, *AE*, *AD*. Ora, poiché *AB* è perpendicolare al piano dato, *AB* è anche perpendicolare a tutte le rette che la incontrino e siano sul piano dato (XI, def. III); quindi ognuno dei due angoli *ABD*, *ABE* è retto. E poiché *BD* risulta cadere sulle parallele *AB*, *CD*, gli angoli *ABD*, *CDB* sono uguali a due retti (I, 29). Ma *ABD* è retto; è perciò retto anche *CDB*, per cui *CD* è perpendicolare a *BD*. E poiché *AB* è uguale a *DE*, e *BD* è comune, i due lati *AB*, *BD* sono uguali rispettivamente ai due lati *ED*, *DB*; ora, l'angolo *ABD* è uguale all'angolo *EDB* – ciascuno di essi infatti è retto –: quindi la base *AD* è uguale alla base *BE* (I, 4). E poiché *AB* è uguale a *DE*, e *BE* è uguale ad *AD*, i due lati *AB*, *BE* sono uguali rispettivamente ai

[5] Le proposizioni XI, 6 e XI, 8 sono parzialmente inverse l'una dall'altra. Nella XI, 6 si parte dall'ipotesi che due rette siano perpendicolari ad un piano e si dimostra che esse sono parallele tra loro: nella XI, 8 si parte dall'ipotesi che due rette siano parallele e che una di esse sia perpendicolare ad un piano: si dimostra che anche l'altra è perpendicolare allo stesso piano.

Le dimostrazioni fornite da Euclide, non esenti tutte da critiche, son diverse da quelle che in alcuni trattati posteriori sono state date applicando il cosiddetto «teorema delle tre perpendicolari» (*Se una retta è perpendicolare a un piano e per il piede si conduce una seconda retta, perpendicolare a una terza retta del piano, quest'ultima è perpendicolare al piano delle prime due*).

Va osservato che il teorema XI, 8 fonda sul fatto che due rette parallele, tagliate da una trasversale, formano angoli coniugati supplementari (I, 29), e quindi sul quinto postulato: il famoso *postulato di Euclide* per eccellenza.

due lati ED, DA. Ed AE è loro base comune, per cui l'angolo ABE è uguale all'angolo EDA (I, 8). Ma ABE è retto; è perciò retto anche EDA, per cui ED è perpendicolare ad AD. Ma ED è perpendicolare anche a DB; quindi ED è perpendicolare pure al piano che passa per BD, DA (XI, 4). Perciò ED formerà angoli retti anche con tutte le rette che la incontrino e siano sul piano che passa per BDA. Ma DC è nel piano che passa per BDA, dal momento che AB, BD sono nel piano che passa per BDA (XI, 2) e nel piano in cui sono AB, BD è pure DC. Quindi ED è perpendicolare a DC, cosicché pure CD è perpendicolare a DE. Ma CD è anche perpendicolare a BD. Quindi CD è perpendicolare alle due rette DE, DB, che si tagliano fra loro, nel punto di intersezione D, cosicché CD è pure perpendicolare al piano che passa per DE, DB (XI, 4). Ma il piano che passa per DE, DB è quello dato; perciò CD è perpendicolare al piano dato.

Dunque, se due rette sono parallele, ed una di esse è perpendicolare ad un piano... (secondo l'enunciato). - C.D.D.

APPLICA: I, 4, 8, 29; XI, 2, 4, 7.

È APPLICATA IN: XI, 9, 11, 12, 18, 35.

PROPOSIZIONE 9.

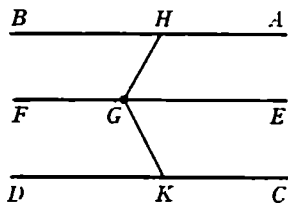
Rette che siano parallele ad una stessa retta, e che non siano tuttavia ambedue con essa in uno stesso piano, sono parallele anche fra loro [6].

Infatti, ciascuna delle due rette AB, CD sia parallela alla retta EF pur non essendo ambedue con essa in uno stesso piano; dico che AB è parallela a CD.

[6] Questo teorema costituisce l'estensione allo spazio della proprietà transitiva del parallelismo, che per il piano viene stabilita nella I, 30. Tanto questa XI, 9 quanto la I, 30, si fondano sulle proprietà angolari

Si prenda difatti su *EF* un punto *G* a piacere, e da esso si conduca *GH* perpendicolare ad *EF*, nel piano che passa per *EF*, *AB*, mentre in quello che passa per *FE*, *CD* si conduca *GK* perpendicolare pure ad *EF*. E poiché *EF* è perpendicolare a ciascuna delle due rette *GH*, *GK*, si ha che *EF* è perpendicolare anche al piano che passa per *GH*, *GK* (XI, 4). Ma *EF* è parallela ad *AB*, per cui anche *AB* è perpendicolare al piano che passa per *HGK* (XI, 8). Per la stessa ragione, pure *CD* è perpendicolare al piano che passa per *HGK*; ciascuna delle due rette *AB*, *CD* è perciò perpendicolare al piano che passa per *HGK*. Ma se due rette sono perpendicolari ad uno stesso piano, le rette sono parallele (XI, 6); quindi *AB* è parallela a *CD*. – C.D.D.

APPLICA: XI, 4, 6, 8.

È APPLICATA IN: XI, 10, 15, 38; XII, 17.

PROPOSIZIONE 10.

Se due rette che s'incontrano fra loro sono parallele ad altre due rette, che s'incontrino fra loro, ma non siano nello stesso piano, comprenderanno [le une e le altre] angoli uguali [7].

Infatti, le due rette *AB*, *BC*, che si incontrano fra loro, siano parallele alle due rette *DE*, *EF*, che si incontrano fra

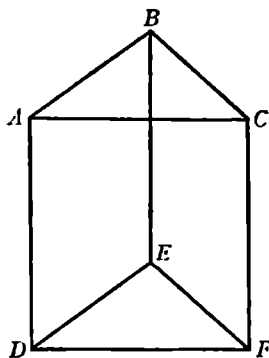
dedotte dal parallelismo di due rette (XI, 29) e quindi sul quinto postulato di Euclide.

Nel caso di questa XI, 9 l'appello alla I, 29 viene compiuto attraverso la precedente XI, 8.

[7] L'uguaglianza di due angoli formati da rette rispettivamente parallele, non giacenti in uno stesso piano, viene da Euclide dimostrata ricorrendo alla I, 33, la quale in sostanza dice che se un quadrilatero ha due lati che sono insieme uguali e paralleli, esso è un parallelogrammo. E detta I, 33 applica il quinto postulato attraverso il teorema inverso delle parallele I, 29.

Ma Enriques e Amaldi, nel loro trattato scolastico di geometria, hanno fin dal 1903 fornito una dimostrazione indipendente dal quinto postulato,

loro, ma non sono nello stesso piano di *AB*, *BC*; dico che l'angolo *ABC* è uguale all'angolo *DEF*.

Si prendano difatti *BA*, *BC*, *ED*, *EF* uguali fra loro, e si traccino le congiungenti *AD*, *CF*, *BE*, *AC*, *DF*. E poiché *BA* è uguale e parallela ad *ED*, anche *AD* è uguale e parallela a *BE* (I, 33). Per la stessa ragione, pure *CF* è uguale e parallela a *BE*, per cui ciascuna delle due rette *AD*, *CF* è uguale e parallela a *BE*. Ma rette che siano parallele ad una stessa retta, e che non siano tuttavia con essa in uno stesso piano, sono parallele anche fra loro (XI, 9); quindi *AD* è parallela a *CF* ed uguale ad essa. E le congiungono *AC*, *DF*; perciò anche *AC* è uguale e parallela a *DF* (I, 33). E poiché i due lati *AB*, *BC* sono uguali rispettivamente ai due lati *DE*, *EF*, e la base *AC* è uguale alla base *DF*, l'angolo *ABC* è uguale all'angolo *DEF* (I, 8).

Dunque, se due rette che s'incontrano fra loro sono parallele ad altre due rette... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 8, 33; XI, 9.

È APPLICATA IN: XI, 24; XII, 3.

sviluppando la teoria delle sezioni ugualmente inclinate dei diedri e dimostrando, senza ricorrere a detto postulato, che sezioni ugualmente inclinate dello stesso diedro sono uguali.

Sezioni ugualmente inclinate di un diedro sono angoli che si ottengono nel modo seguente. Si consideri una qualunque *sezione* di un diedro, cioè l'angolo formato da due semirette uscenti da uno stesso punto dello spigolo e giacenti su ciascuna delle due facce. I due lati dell'angolo formano con lo spigolo certi angoli. Ebbene: si consideri un'altra sezione dello stesso diedro, tale che i suoi lati formino con lo spigolo angoli uguali a quelli rispettivamente formati con lo spigolo dai lati dell'altra sezione. Quando ciò si verifica si dice che le due sezioni sono ugualmente inclinate. Se gli angoli che i lati di ciascuna sezione formano con lo spigolo sono retti si ha, come caso particolare, la *sezione normale* del diedro.

Si legge infine nell'edizione di Enriques degli *Elementi* (vol. IV, p. 64): « Gli angoli coi lati paralleli risultano uguali in quanto sono sezioni ugualmente inclinate del diedro formato dai piani che passano per le coppie di rette parallele ».

PROPOSIZIONE 11.

Da un punto dato fuori d'un piano dato condurre una linea retta perpendicolare al piano[a] [8].

Sia A il punto sovrastante dato, ed il piano dato sia quello stesso che assumiamo a riferimento; si deve dunque condurre dal punto A una linea retta perpendicolare al piano di riferimento.

Infatti, si tracci nel piano dato una retta BC a caso, e dal punto A si conduca la perpendicolare AD a BC (I, 12). Dunque, se AD fosse perpendicolare anche al piano dato, si sarebbe già ottenuto quanto proposto. Se invece non lo è, si conduca dal punto D la perpendicolare DE a BC nel piano dato (I, 11), da A si conduca la perpendicolare AF a DE (I, 12), e per il punto F si conduca GH parallela a BC (I, 31).

E poiché BC è perpendicolare a ciascuna delle due rette DA, DE, è perpendicolare BC anche al piano che passa

a. Letteralmente: Dal punto dato sovrastante al piano dato condurre una linea retta perpendicolare.

[8] Si hanno ora due costruzioni, che in certo senso corrispondono a quelle offerte in I, 11 e I, 12. Nel libro primo si tratta di costruire la retta perpendicolare ad una retta data, per un punto su di essa (I, 11) o fuori di essa (I, 12). Qui si tratta di costruire la retta perpendicolare ad un piano, per un punto fuori di esso (XI, 11) o situato su di esso (XI, 12). Si osservi la inversione dell'ordine rispetto alle corrispondenti costruzioni di geometria piana: essa è dovuta al fatto che l'innalzamento della perpendicolare da un punto del piano si serve della costruzione relativa al caso del punto esterno.

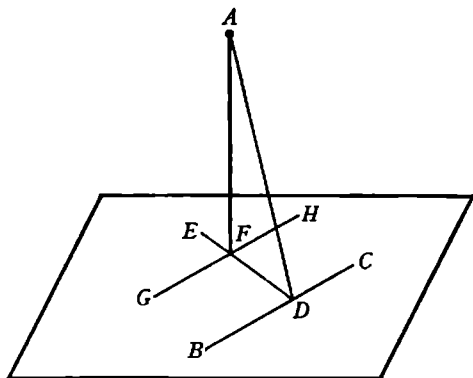
Questo procedimento viene evitato nei trattati moderni premettendo le costruzioni riguardanti i piani (piano perpendicolare a una retta, per un punto dato su di essa o fuori di essa).

Euclide non dà, invece, queste costruzioni.

Nella prop. 13 si dimostra l'univocità della costruzione della retta perpendicolare ad un piano per un punto su di esso, cioè l'univocità della costruzione della precedente XI, 12. Euclide avrebbe potuto anche dimostrare facilmente (ricorrendo alla I, 17) l'univocità della costruzione della XI, 11, ma ciò egli non fa.

Va osservato, infine, che la presenza della XI, 13 è giustificata dal fatto che dell'univocità della relativa costruzione Euclide si serve per dimostrare la seguente XI, 19 (la retta d'intersezione di due piani perpendicolari ad un terzo, è anche essa a questo perpendicolare).

per EDA (XI, 4). Ora, GH è parallela a BC; ma se due rette sono parallele, ed una di esse è perpendicolare ad un piano, anche l'altra sarà perpendicolare allo stesso piano (XI, 8), per cui pure GH è perpendicolare al piano che passa per ED, DA. Perciò GH è anche perpendicolare rispetto a tutte le rette che la incontrino e siano sul piano passante per ED, DA (XI, def. III). Ma la incontra AF, che si trova nel piano passante per ED, DA; quindi GH è perpendicolare ad AF, cosicché pure AF è perpendicolare a GH. Ma AF è perpendicolare pure a DE, per cui AF è perpendicolare a ciascuna delle due rette GH, DE. Ma se una retta è innalzata perpendicolarmente, nel punto di intersezione, a due rette che si incontrino fra loro, sarà perpendicolare anche al piano che passa per esse; perciò FA è perpendicolare al piano passante per ED, GH (XI, 4). Ma il piano che passa per ED, GH è quello dato; quindi AF è perpendicolare al piano dato.

Dunque, dal punto sovrastante dato A è stata condotta la linea retta AF perpendicolarmente al piano dato. – C.D.F.

APPLICA: I, 11, 12, 31; XI, 4, 8.

È APPLICATA IN: XI, 15, 26; XII, 17.

PROPOSIZIONE 12.

Innalzare una linea retta perpendicolare ad un piano dato, per un punto dato su esso.

Sia il piano dato quello stesso che assumiamo a riferimento, ed il punto dato su di esso sia A; si deve dunque

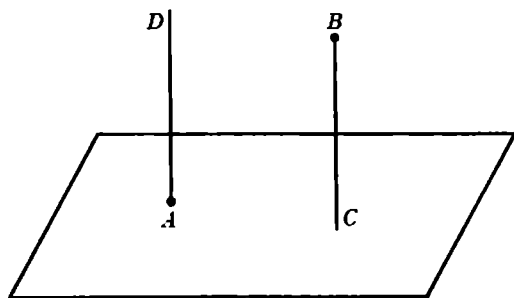
innalzare una linea retta, perpendicolarmente al piano assunto, dal punto *A*.

Si supponga che un punto *B* sia elevato sul piano, da *B* si conduca al piano dato la perpendicolare *BC*, e per il punto *A* si conduca *AD* parallela a *BC* (I, 31).

Poiché dunque *AD*, *CB* sono due rette parallele, ed una di esse, *BC*, è perpendicolare al piano dato, anche l'altra *AD* è perpendicolare al piano dato (XI, 8).

Dunque, *AD* è stata innalzata perpendicolarmente al piano dato per il punto *A* [dato su esso]. – C.D.D.

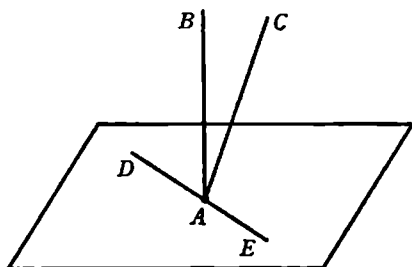
APPLICA: I, 31; XI, 8.

È APPLICATA IN: XI, 23, 26; XIII, 14.

PROPOSIZIONE 13.

Da uno stesso punto [di un piano] non possono innalzarsi, dalla stessa parte, due rette perpendicolari al piano stesso.

Infatti, se possibile, si innalzino perpendicolarmente al piano dato, dalla stessa parte e dallo stesso punto *A*, le due rette *AB*, *AC*, e si conduca il piano passante per *BA*, *AC*; esso determinerà così sul piano dato una retta passante per *A* quale intersezione (XI, 3). Sia *DAE* tale retta d'intersezione [a]; le rette *AB*, *AC*, *DAE* sono quindi sullo stesso piano. E poiché *CA* è perpendicolare al piano dato, formerà angoli retti pure con tutte le rette che la incontrino e siano sul piano dato (XI, def. III). Ma la incontra *DAE*, che è nel piano dato; quindi l'angolo *CAE* è retto. Per la stessa ragione,

a. Letteralmente è soltanto *Produca*, ossia determini, *DAE*.

è retto anche l'angolo BAE, per cui i due angoli CAE, BAE sono uguali. E sono nello stesso piano: il che è impossibile (Noz. com. VIII).

Dunque, da uno stesso punto non possono innalzarsi... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: XI, 3.

È APPLICATA IN: XI, 19.

PROPOSIZIONE 14.

I piani, ai quali una stessa retta sia perpendicolare, sono[a] *paralleli*[9].

Infatti, una retta AB sia perpendicolare a ciascuno dei due piani CD, EF; dico che i piani sono paralleli.

Se difatti non lo fossero, prolungati verrebbero ad incontrarsi. Si incontrino: determineranno così una retta d'intersezione comune (XI, 3). Sia questa la retta GH[b]; su essa

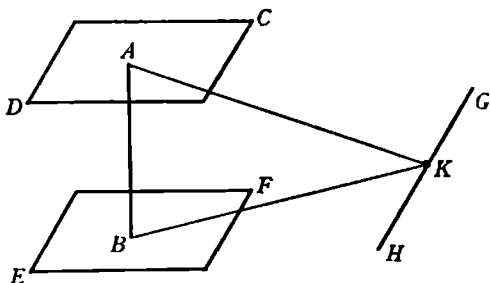
a. Letteralmente: saranno.
b. È piuttosto *Determinino*, come sopra.

[9] Fin qui, nel libro undicesimo, s'è trattato della relazione di perpendicolarità tra retta e piano, e di quella di parallelismo tra rette. Ora c'è un gruppo di quattro proposizioni (14, 15, 16, 17) nelle quali si tratta della relazione di parallelismo tra piani, ed ancora una coppia di proposizioni (18, 19) nelle quali si tratta della relazione di perpendicolarità pure tra piani.

Si conclude così la prima parte del libro undicesimo, dedicata a rette e piani in particolari relazioni tra loro: rette e piani perpendicolari, rette parallele, piani paralleli, piani perpendicolari. Può osservarsi la mancanza della trattazione del caso di parallelismo tra retta e piano.

Comincia poi una serie di quattro proposizioni (20, 21, 22, 23) dedicate agli angoli solidi triedri. Invero l'enunciato della XI, 21 si riferisce ad angoli solidi in generale, ma la dimostrazione si limita al caso dei triedri. Tuttavia nella fase conclusiva della stessa XI, 21 Euclide torna a riferirsi a tutti gli angoli solidi (ἅπασα στερεὰ γωνία) e Heiberg (vol. IV, p. 59) commenta a guisa di giustificazione: «*Nam in angulis solidis, qui plus quam tribus planis angulis continentur, similiter ratiocinandum est*».

si prenda un punto *K* a piacere, e si traccino le congiungenti *AK*, *BK*. Ora, poiché *AB* è perpendicolare al piano *EF*, si ha che *AB* è perpendicolare pure alla retta *BK*, che è nel piano (prolungato) *EF*, per cui l'angolo *ABK* è retto (XI, def. III). Per la stessa ragione, anche l'angolo *BAK* è retto. Nel triangolo *ABK*, allora, la somma dei due angoli *ABK*, *BAK* è uguale a due retti: il che è impossibile (I, 17). Perciò i piani *CD*, *EF*, pure se prolungati, non possono incontrarsi, e quindi sono paralleli.

Dunque, i piani ai quali una stessa retta sia perpendicolare... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 17; XI, 3.

È APPLICATA IN: XI, 15.

PROPOSIZIONE 15.

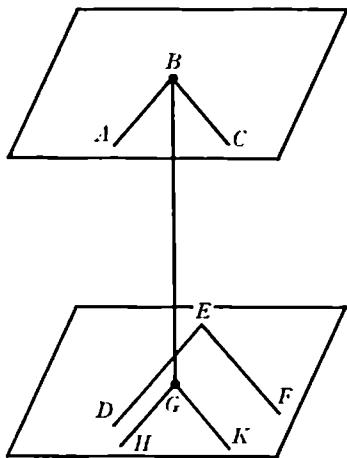
Se due rette che si incontrano fra loro sono parallele ad altre due rette, che pure si incontrino fra loro, ma non siano nello stesso piano [delle prime due], i piani che passano per le due rette di ciascuna coppia [a] *sono paralleli.*

Infatti, le due rette *AB*, *BC* che si incontrano fra loro siano rispettivamente parallele alle due rette *DE*, *EF*, che pure si incontrano fra loro, ma che non sono nello stesso piano delle prime due; dico che i piani passanti rispettivamente per *AB*, *BC* e per *DE*, *EF*, se prolungati, non si incontreranno fra loro.

Dal punto *B* si conduca difatti la perpendicolare *BG* al piano che passa per *DE*, *EF* (XI, 11), ed essa si incontri

a. Letteralmente è detto solo *per esse*.

con quel piano nel punto *G*, e per *G* si conducano *GH* parallela ad *ED*, e *GK* parallela ad *EF*. Ora, poiché *BG* è perpendicolare al piano passante per *DE*, *EF*, formerà angoli retti pure con tutte le rette che la incontrino e che siano sul piano passante per *DE*, *EF* (XI, def. III). Ma ciascuna delle due rette *GH*, *GK*, che sono sul piano passante per *DE*, *EF*, viene ad incontrarla; quindi ognuno dei due angoli *BGH*, *BGK* è retto. E poiché *BA* è parallela a *GH* (XI, 9), la somma degli angoli *GBA*, *BGH* è uguale a due retti (I, 29). Ma l'angolo *BGH* è retto; è quindi retto anche l'angolo *GBA*, per cui *GB* è perpendicolare a *BA*. Per la stessa ragione, *GB* è pure perpendicolare a *BC*. Poiché dunque la retta *GB* risulta perpendicolare alle due rette *BA*, *BC* che si tagliano fra loro, *GB* è perpendicolare anche al piano che passa per *BA*, *BC* (XI, 4)[a]. Ma i piani, rispetto a cui una stessa retta sia perpendicolare, sono paralleli (XI, 14); perciò il piano che passa per *AB*, *BC* è parallelo al piano che passa per *DE*, *EF*.

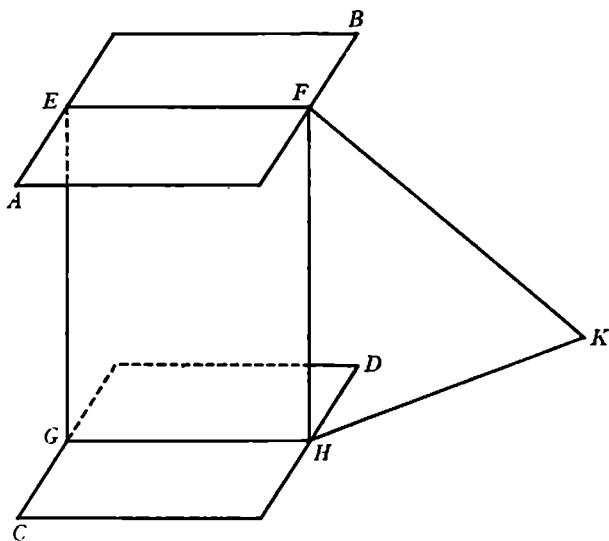
Dunque, se due rette che si incontrano fra loro... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 29; XI, 9, 11, 14.

a. Abbiamo nel testo: « Per la stessa ragione, *BG* è perpendicolare anche al piano passante per *GH*, *GK*. Ma il piano passante per *GH*, *GK* è quello stesso che passa per *DE*, *EF*, per cui *BG* è perpendicolare al piano che passa per *DE*, *EF*. Ora, fu dimostrato che *GB* è perpendicolare al piano passante per *AB*, *BC* ». Si tratta di una interpolazione (cfr. HEIBERG, IV, XI, 15) probabilmente anteriore già a Teone: difatti, che *BG* sia perpendicolare al piano delle rette *DE*, *EF*, risulta dalla costruzione, senza bisogno che sia dimostrato, e ad essa Euclide, seppure contro la sua abitudine, si riferisce tacitamente.

Proposizione 16.

Se due piani paralleli sono tagliati da un terzo piano, le rette di intersezione del terzo piano con ciascuno dei primi due sono parallele.

Infatti, i due piani paralleli *AB*, *CD* siano tagliati dal piano *EFGH*, ed *EF*, *GH* siano le rispettive rette d'intersezione; dico che *EF* è parallela a *GH*.

Se difatti non lo fossero, *EF*, *GH* prolungate si incontrerebbero, o dalla parte di *F*, *H*, o da quella di *E*, *G*. Si

prolunghino dalla parte di *F*, *H*, e dapprima si incontrino in *K*. Poiché *EFK* è sul piano *AB*, sono sul piano *AB* anche tutti i punti della retta *EFK* (XI, 1). Ma *K* è uno dei punti della retta *EFK*, per cui *K* è sul piano *AB*. Per la stessa ragione, *K* è pure sul piano *CD*, quindi i piani *AB*, *CD*, prolungati, si incontreranno. Ma non possono incontrarsi, poiché sono paralleli per ipotesi; quindi non possono incontrarsi, se prolungate, le rette *EF*, *GH* dalla parte di *F*, *H*. Similmente potremo dimostrare che le rette *EF*, *GH* non si incontreranno, se prolungate, nemmeno dalla parte di *E*, *G*. Ma rette [d'un piano] che non si incontrino da nessuna

delle due parti sono parallele (I, def. XXIII). Quindi *EF* è parallela a *GH*.

Dunque, se due piani paralleli sono tagliati da un terzo piano... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

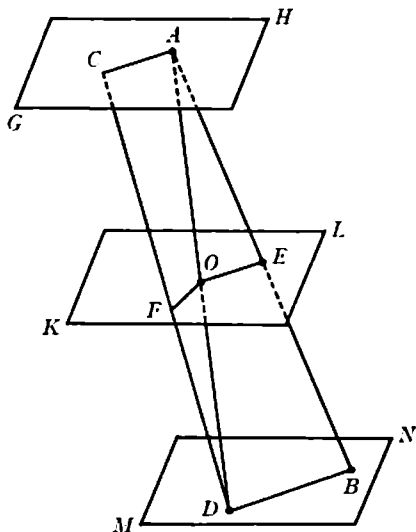
APPLICA: XI, 1.

È APPLICATA IN: XI, 17, 24.

PROPOSIZIONE 17.

Se due rette sono tagliate da piani paralleli, saranno tagliate secondo gli stessi rapporti.

Infatti, le due rette *AB*, *CD* siano tagliate dai piani paralleli *GH*, *KL*, *MN* nei punti *A*, *E*, *B*, *C*, *F*, *D*; dico che la retta *AE* sta a quella *EB* come la retta *CF* sta a quella *FD*.

Si traccino difatti le congiungenti *AC*, *BD*, *AD*; la retta *AD* incontri il piano *KL* nel punto *O*, e si traccino le congiungenti *EO*, *OF*. Ora, poiché i due piani paralleli *KL*, *MN* sono tagliati dal piano *EBDO*, le rispettive rette d'intersezione *EO*, *BD* sono parallele (XI, 16). Per la stessa ragione, poiché i due piani paralleli *GH*, *KL* sono tagliati dal piano *AOFC*, le rispettive rette d'intersezione *AC*, *OF* sono parallele (id.). E poiché nel triangolo *ABD* è stata condotta la retta *EO* parallela ad uno dei lati, cioè a *BD*, si ha la proporzione: $AE : EB = AO : OD$ (VI, 2). Di nuovo, poiché nel triangolo *ADC* è stata condotta la retta *OF* parallela ad uno dei lati, cioè

ad AC, si ha la proporzione: $AO : OD = CF : FD$ (id.). Ma fu dimostrato che $AO : OD = AE : EB$; quindi si ha pure: $AE : EB = CF : FD$ (V, 11).

Dunque, se due rette sono tagliate da piani paralleli... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: V, 11; VI, 2; XI, 16.

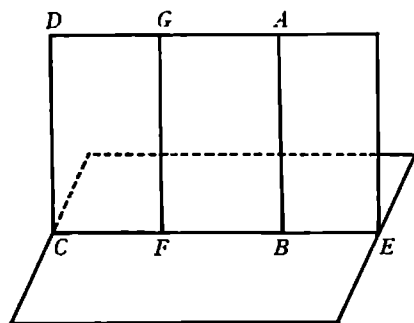
È APPLICATA IN: XII, 4 (lemma).

PROPOSIZIONE 18.

Se una retta è perpendicolare ad un piano, anche tutti i piani che passino per essa saranno perpendicolari a quello stesso piano.

Infatti, una retta AB sia perpendicolare ad un piano dato: dico che anche tutti i piani che passino per AB saranno perpendicolari al piano dato.

Si conduca difatti per AB il piano DE, sia CE la retta d'intersezione del piano DE e del piano assunto, su CE si prenda un punto F a piacere, e da F si conduca la perpendicolare FG a CE sul piano DE. Ora, poiché AB è perpendicolare al piano dato, AB è perpendicolare anche a tutte le rette che la incontrino e siano sul piano dato (XI, def. III); cosicché AB è perpendicolare pure a CE, e quindi l'angolo ABF è retto. Ma anche l'angolo GFB è retto [per costruzione]; perciò AB è parallela a FG (I, 28). Ma AB è [per ipotesi] perpendicolare al piano dato, e quindi pure FG è perpendicolare al piano dato (XI, 8). Ora, un piano è perpendicolare ad un altro piano, quando le rette condotte in uno dei piani, perpendicolarmente alla retta d'intersezione dei piani stessi, siano perpendicolari all'altro piano (XI, def. IV). E fu dimostrato che FG, condotta in uno dei piani, cioè nel piano DE, perpendicolarmente alla retta d'intersezione CE dei piani in questione, è perpendicolare al piano dato; quindi

il piano DE è perpendicolare a quello dato. Similmente si potrà dimostrare che al piano assunto sono perpendicolari anche tutti i piani passanti per AB.

Dunque, se una retta è perpendicolare ad un piano... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 28; XI, 8.

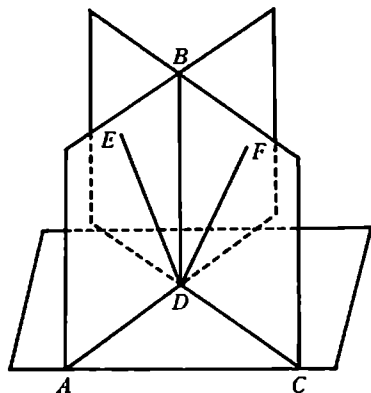
È APPLICATA IN: XII, 17.

PROPOSIZIONE 19.

Se due piani che si tagliano fra loro sono perpendicolari ad un piano [dato], anche la loro intersezione sarà perpendicolare a quello stesso piano.

Infatti, i due piani AB, BC siano perpendicolari ad un piano dato, e sia BD la loro retta d'intersezione; dico che BD è perpendicolare al piano dato.

Non lo sia difatti, e dal punto D si conducano DE nel piano AB perpendicolare alla retta AD, e nel piano BC la perpendicolare DF a CD (I, 11). Poiché il piano AB è perpendicolare a quello dato, e nel piano AB è stata condotta DE perpendicolarmente alla loro retta d'intersezione AD, si ha che DE è perpendicolare al piano dato (XI, def. IV). Similmente potremo dimostrare che pure DF è perpendicolare al piano dato. Quindi, dallo stesso punto D risultano innalzate, dalla stessa parte, due rette perpendicolari ad un piano: il che è impossibile (XI, 13). Non può perciò essere innalzata dal punto D nessun'altra retta perpendicolare al piano assunto tranne DB, retta d'intersezione dei piani AB, BC.

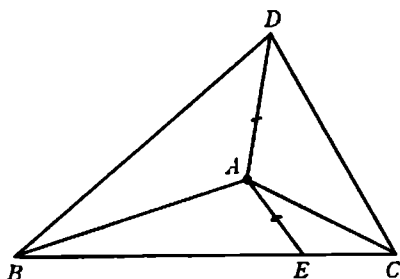
Dunque, se due piani che si tagliano fra loro sono perpendicolari ad un piano dato... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 11; XI, 13.

PROPOSIZIONE 20.

Se un angolo solido è compreso da tre angoli piani, la somma di due qualunque di essi, in qualsiasi modo presi, è maggiore dell'angolo rimanente.

Infatti, l'angolo solido con vertice in A sia compreso dai tre angoli piani BAC, CAD, DAB; dico che la somma di due qualunque degli angoli BAC, CAD, DAB, in qualsiasi modo presi, è maggiore dell'angolo rimanente.

Se avviene dunque che gli angoli BAC, CAD, DAB siano uguali fra loro, è evidente che la somma di due qualunque di essi è maggiore del rimanente. Se invece non sono uguali fra loro, l'angolo BAC sia maggiore, e sulla retta AB [con vertice] nel suo punto A si costruisca, nel piano che passa per BA, AC, l'angolo BAE uguale all'angolo DAB, e si ponga AE uguale ad AD. La retta BEC, condotta per il punto E, tagli le rette AB, AC nei punti B, C, e si traccino le congiungenti DB, DC. Ora, poiché DA è uguale ad AE, ed AB è comune, si ha che due lati [del triangolo DAB] sono uguali rispettivamente a due lati [del triangolo BAE]; inoltre l'angolo DAB è uguale all'angolo BAE [per costruzione]: quindi la base BD è uguale alla base BE (I, 4). E poiché la somma dei due lati BD, DC è maggiore di BC (I, 20) [ossia di $BE +$ $+ EC$], e di tali lati fu dimostrato che BD è uguale a BE, il lato rimanente DC è quindi maggiore del rimanente EC.

E poiché DA è uguale ad AE, mentre AC è comune, e la base DC è maggiore della base EC, l'angolo DAC è maggiore dell'angolo EAC (I, 25). Ma fu dimostrato che l'angolo DAB è pure uguale all'angolo BAE, per cui la somma degli angoli DAB, DAC è maggiore [della somma $BAE +$ $+ EAC$, ossia è maggiore dell'angolo] BAC. Similmente potremo dimostrare che anche gli angoli rimanenti, se sommati a due a due, sono maggiori del rimanente.

Dunque, se un angolo solido è compreso da tre angoli piani... (secondo l'enunciato). - C.D.D.

APPLICA: I, 4, 20, 25.

È APPLICATA IN: XI, 21.

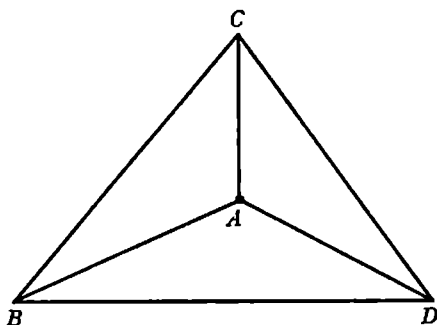
PROPOSIZIONE 21.

Ogni angolo solido è compreso da angoli piani la cui somma è minore di quattro angoli retti.

Sia l'angolo con vertice in A un angolo solido compreso dagli angoli piani BAC, CAD, DAB; dico che la somma di BAC, CAD, DAB è minore di quattro angoli retti.

Infatti, su ciascuna delle rette AB, AC, AD si prendano a caso rispettivamente i punti B, C, D, e si traccino le congiungenti BC, CD, DB. Ora, poiché l'angolo solido con vertice in B è compreso dai tre angoli piani CBA, ABD, CBD, la somma di due qualunque di essi è maggiore dell'angolo rimanente (XI, 20); quindi $CBA + ABD > CBD$. Per la stessa ragione: $BCA + ACD > BCD$ e: $CDA +$ $+ ADB > CDB$, quindi: $CBA + ABD + BCA + ACD +$ $+ CDA + ADB > CBD + BCD + CDB$. Ma la somma dei tre angoli CBD, BCD, CDB è uguale a due retti (I, 32): quindi quella dei sei angoli CBA, ABD, BCA, ACD, CDA, ADB è maggiore di due retti. E poiché in ciascuno dei triangoli ABC, ACD, ADB la somma dei tre angoli è uguale a

due retti, quella dei nove angoli dei tre triangoli è uguale a sei retti [cioè: $CBA + BCA + BAC + ACD + CDA + CAD + ADB + ABD + BAD = 6$ retti]. E poiché la somma di sei tra di essi, cioè la somma degli angoli: $CBA + BCA + ACD + CDA + ADB + ABD$ è maggiore della somma di due retti, si ha che la somma dei rimanenti tre angoli BAC, CAD, BAD, che comprendono l'angolo solido [con vertice in A], è minore di quattro retti.

Dunque, ogni angolo solido è compreso... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 32; XI, 20.

È APPLICATA IN: XIII, 18.

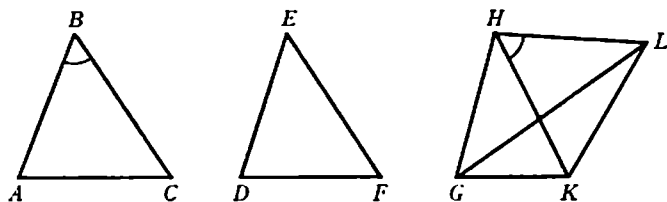
PROPOSIZIONE 22.

Se vi sono tre angoli piani, e la somma di due di essi, in qualsiasi modo presi, è maggiore del rimanente, e li comprendono d'altronde rette uguali, è possibile costruire un triangolo con le rette che congiungono gli estremi delle rette uguali.

Siano dati i tre angoli piani ABC, DEF, GHK, tali che la somma di due di essi, in qualsiasi modo presi, sia maggiore del rimanente, cioè la somma di ABC, DEF maggiore di GHK, quella di DEF, GHK maggiore di ABC, ed infine quella di GHK, ABC maggiore di DEF, siano uguali le rette AB, BC, DE, EF, GH, HK, e si traccino le congiungenti AC, DF, GK; dico che è possibile costruire un triangolo con rette uguali ad AC, DF, GK, vale a dire che la somma di due qualunque delle rette AC, DF, GK è maggiore della rimanente (I, 20).

Ora, nel caso in cui gli angoli ABC, DEF, GHK siano uguali fra loro, è evidente che, essendo uguali AC, DF, GK

(I, 4), è possibile costruire un triangolo con rette uguali ad *AC*, *DF*, *GK* (I, 1).

Se ciò non è, siano essi disuguali, sulla retta *HK* e con vertice nel punto *H* di essa si costruisca l'angolo *KHL* uguale all'angolo *ABC*, si ponga *HL* uguale ad una delle rette *AB*, *BC*, *DE*, *EF*, *GH*, *HK*, e si traccino le congiungenti *KL*, *GL*. Ora, poiché i due lati *AB*, *BC* sono uguali rispettivamente ai due lati *KH*, *HL*, e l'angolo in *B* è uguale all'angolo *KHL*, la base *AC* è uguale alla base *KL* (I, 4). E poiché la somma degli angoli *ABC*, *GHK* è maggiore dell'angolo *DEF*, ma l'angolo *ABC* è uguale all'angolo *KHL*, l'angolo *GHL* è maggiore dell'angolo *DEF*. E poiché i due lati *GH*, *HL* sono uguali rispettivamente ai due lati *DE*, *EF*, e l'angolo *GHL* è maggiore dell'angolo *DEF*, la base *GL* è maggiore della base *DF* (I, 24). Ma la somma di *GK*, *KL* è maggiore di *GL* (I, 20). Perciò la somma di *GK*, *KL* è molto maggiore di *DF*. Ma *KL* è uguale ad *AC*; quindi la somma delle rette *AC*, *GK* è maggiore della retta rimanente *DF*. Similmente potremo dimostrare che pure la somma di *AC*, *DF* è maggiore di *GK*, ed infine che quella di *DF*, *GK* è maggiore di *AC*. È dunque possibile costruire un triangolo con rette uguali ad *AC*, *DF*, *GK* (I, 22). – C.D.D. [a].

APPLICA: I, 4, 20, 22, 24.

È APPLICATA IN: XI, 23.

a. Heiberg riporta in Appendice, in quanto interpolata, una prova alternativa (vol. IV, pp. 344-347).

PROPOSIZIONE 23.

Con tre angoli piani, tali che la somma di due di essi, in qualsiasi modo presi, sia maggiore di quello rimanente, costruire un angolo solido; occorre dunque che la somma dei tre angoli sia minore di quattro retti (XI, 21) [10].

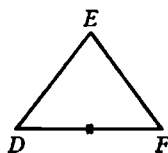
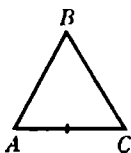
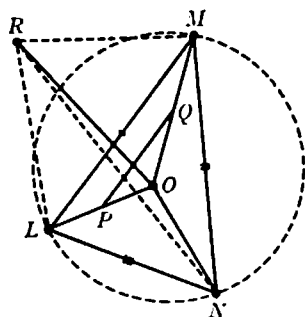
Siano *ABC*, *DEF*, *GHK* i tre angoli piani dati, e la somma di due di essi, in qualsiasi modo presi, sia maggiore dell'angolo rimanente, mentre quella dei tre angoli sia minore di quattro retti; si deve dunque costruire un angolo solido con angoli uguali ad *ABC*, *DEF*, *GHK*.

Si stacchino *AB*, *BC*, *DE*, *EF*, *GH*, *HK* uguali fra loro, e si traccino le rette congiungenti *AC*, *DF*, *GK*: è quindi possibile costruire un triangolo con rette uguali ad *AC*, *DF*, *GK* (XI, 22). Si costruisca il triangolo *LMN*, così che *AC* sia uguale a *LM*, sia *DF* uguale a *MN*, ed infine *GK* sia uguale a *NL*, si circoscriva al triangolo *LMN* il cerchio *LMN* (IV, 5), se ne prenda il centro e sia esso *O*, e si traccino le congiungenti *LO*, *MO*, *NO*; dico che *AB* è maggiore di *LO*. Infatti, se non lo fosse, *AB* sarebbe o uguale a *LO*, o minore. Dapprima, sia uguale a *LO*. Ora, poiché *AB* è

[10] La costruzione del triedro avente date facce è soggetta alle condizioni espresse nelle precedenti proposizioni XI, 21 e XI, 22: si tratta cioè di una specie di *diorisma* (come in I, 20 e 22 o come in VI, 27 e 28: cfr. nota a quest'ultima prop.). Ma una volta ammesse queste condizioni (che ogni faccia sia minore della somma delle altre due e che la somma delle tre facce sia minore di quattro retti) la costruzione non soltanto è possibile, ma è anche univocamente determinata. Nell'edizione di Enriques degli *Elementi* (al volume quarto della quale, chi scrive ebbe l'onore di collaborare) si legge (vol. IV, p. 91): « L'importanza di questa proposizione nel trattato euclideo consiste in ciò: che in essa viene dimostrata l'univocità della costruzione del triedro dati gli angoli che ne costituiscono le facce, subordinatamente alle disuguaglianze cui esse debbono soddisfare. A dir vero, i triedri che si possono costruire in base alle condizioni anzidette sono due, simmetrici rispetto ad un piano: ma essi sono uguali, a parte il verso, che Euclide non si ferma ad osservare. Pertanto la costruzione indicata contiene in sostanza il teorema: *Due triedri aventi rispettivamente uguali le facce sono uguali* (direttamente, o inversamente); e così appare giustificato che Euclide nella prop. 26 concluda appunto all'uguaglianza di due triedri quando ha riconosciuto l'uguaglianza delle loro facce ».

in tal caso uguale a *LO*, ma *AB* è uguale a *BC*, ed *OL* è uguale ad *OM*, [nei due triangoli *ABC*, *LOM*] i due lati *AB*, *BC* sarebbero uguali rispettivamente ai due lati *LO*, *OM*; ma la base *AC* è [per costruzione] uguale alla base *LM*: l'angolo *ABC* sarebbe quindi in tal caso uguale all'angolo *LOM* (I, 8). Per la stessa ragione, anche l'angolo *DEF* sarebbe uguale a quello *MON*, e l'angolo *GHK* sarebbe infine uguale a quello *NOL*, quindi la somma dei tre angoli *ABC*, *DEF*, *GHK* sarebbe uguale a quella dei tre angoli *LOM*, *MON*, *NOL*. Ma la somma dei tre angoli *LOM*, *MON*, *NOL* è uguale a quattro retti; sarebbe perciò uguale a quattro retti pure la somma dei tre angoli *ABC*, *DEF*, *GHK*. Ma la loro somma, per ipotesi, è anche minore di quattro retti: il che è assurdo. Dunque *AB* non è uguale a *LO*. Dico adesso che neppure *AB* è minore di *LO*.

Infatti, se possibile, lo sia: si pongano *OP* uguale ad *AB*, ed *OQ* uguale a *BC*, e si tracci la congiungente *PQ*. Ora, poiché *AB* è uguale a *BC*, pure *OP*, *OQ* sono uguali; cosicché in tal caso anche la parte di retta *LP* che rimane è uguale alla parte *QM*. [Quindi: $OP : LP = OQ : QM$], e perciò *LM* è parallela a *PQ* (VI, 2), ed il triangolo *LMO* ha gli angoli rispettivamente uguali a quelli del triangolo *PQO* (I, 29), quindi: $LO : LM = PO : PQ$ (VI, 4); e *permutando*, $LO : PO = LM : PQ$ (V, 16). Ma *LO* è maggiore di *PO*; è perciò anche *LM* maggiore di *PQ*. Ma *LM* è stata posta uguale ad *AC*; quindi anche *AC* è maggiore di *PQ*. Poiché [nei due triangoli *ABC*, *POQ*] i due lati *AB*, *BC* sono dunque uguali ai due lati *PO*, *OQ*, e la base *AC* è maggiore della base *PQ*, l'angolo *ABC* è maggiore dell'angolo *POQ* (I, 25). Similmente potremo dimostrare che pure l'angolo *DEF* è maggiore di quello *MON*, e che l'angolo *GHK* è maggiore di quello *NOL*. Perciò la somma dei tre angoli *ABC*, *DEF*, *GHK* sarebbe maggiore di quella dei tre angoli *LOM*, *MON*, *NOL*. Ma la somma di *ABC*, *DEF*, *GHK* è per ipotesi minore di quattro retti, sicché quella di *LOM*, *MON*, *NOL* sarebbe molto minore di quattro retti. Ma è anche uguale [a quattro retti]: il che è assurdo. Quindi *AB* non è minore di *LO*. E fu dimostrato che non è neppure uguale; dunque *AB* è

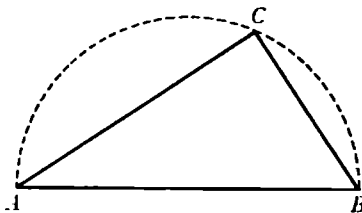
maggiore di *LO*. Si innalzi adesso dal punto *O* la retta *OR* perpendicolare al piano del cerchio *LMN* (XI, 12), e tale che il quadrato di *OR* sia uguale alla differenza tra il quadrato di *AB* e quello di *LO*, e si traccino le congiungenti *RL*, *RM*, *RN*. Ora, poiché *RO* è perpendicolare al piano del cerchio *LMN*, si ha che *RO* è perpendicolare anche a ciascuna delle rette *LO*, *MO*, *NO*. E poiché [nei due triangoli *ROL*, *ROM*] il lato *LO* è uguale ad *OM*, mentre *OR* è comune e perpendicolare [al piano del cerchio sicché gli angoli compresi, essendo retti, sono uguali], la base *RL* è uguale alla base *RM* (I, 4). Per la stessa ragione, pure *RN* è uguale a ciascuna delle due rette *RL*, *RM*; le tre rette *RL*, *RM*, *RN* sono quindi uguali fra loro. E poiché, per ipotesi, il quadrato di *OR* è uguale alla differenza tra il quadrato di *AB* e quello di *LO*, il quadrato di *AB* è uguale alla somma dei quadrati di *LO*, *OR*. Ma alla somma dei quadrati di *LO*, *OR* è uguale il quadrato di *LR* (I, 47) – difatti l'angolo *LOR* è retto –, e quindi il quadrato di *AB* è uguale a quello di *RL*; è perciò *AB* uguale a *RL*. Ma ciascuna delle rette *BC*, *DE*, *EF*, *GH*, *HK* è uguale ad *AB*, mentre è uguale a *RL* ciascuna delle rette *RM*, *RN*; quindi ciascuna delle rette *AB*, *BC*, *DE*, *EF*, *GH*, *HK* è uguale a ciascuna delle rette *RL*, *RM*, *RN*. E poiché [nei due triangoli *ABC*, *LRM*] i due lati *RL*, *RM* sono uguali ai due lati *AB*, *BC*, e la base *LM* è per ipotesi uguale alla base *AC*, l'angolo *LRM* è uguale all'angolo *ABC* (I, 8). Per la stessa ragione, anche l'angolo *MRN* è uguale all'angolo *DEF*, e l'angolo *LRN* è uguale all'angolo *GHK*.

Dunque, coi tre angoli piani *LRM*, *MRN*, *LRN*, che sono

uguali ai tre angoli dati ABC, DEF, GHK, si è costruito l'angolo solido, con vertice in R, che è compreso dagli angoli LRM, MRN, LRN[a]. – C.D.F.

APPLICA: I, 4, 8, 25, 47; IV, 5; V, 16; VI, 4; XI, 12, 22.

È APPLICATA IN: XI, 36.

LEMMA.

Come poi possa prendersi il quadrato di OR uguale alla differenza tra il quadrato di AB e quello di LO, mostreremo nel modo seguente. Si assumano le rette AB, LO, ed AB sia maggiore, su essa si descriva il semicerchio ABC, si adatti nel semicerchio ABC la retta AC uguale alla retta LO (IV, 1), che non è maggiore del diametro AB, e si tracci la congiungente CB. Poiché dunque l'angolo ACB è iscritto nel semicerchio ACB, l'angolo ACB è retto (III, 31). Il quadrato di AB è quindi uguale alla somma dei quadrati di AC, CB (I, 47). Cosicché il quadrato di AB supera il quadrato di AC, del quadrato di CB. Ma AC è uguale a LO. Perciò il quadrato di AB supera quello di LO del quadrato di CB. Se dunque prendiamo OR uguale a BC, il quadrato di AB supererà il quadrato di LO del quadrato di OR. – C.D.F.

APPLICA: I, 47; III, 31; IV, 1.

PROPOSIZIONE 24.

Se un solido è compreso da [sei] piani paralleli [a due a due], le facce opposte sono parallelogrammi uguali[11].

Infatti, il solido $CDHG$ sia compreso dai [sei] piani [a due a due] paralleli $ABCD$, $GHFE$; $ABHG$, $DCFE$; $BHFC$,

a. Nei codici sono ritrovabili dimostrazioni successive di casi particolari, che non possono essere euclidee.

[11] Con questa proposizione XI, 24 ha inizio la parte finale del libro undicesimo, la quale ha essenzialmente per oggetto quei particolari prismi

AGED: dico che le facce fra loro opposte sono dei parallelogrammi uguali.

Poiché i due piani paralleli *ABHG*, *DCFE* sono difatti tagliati dal piano *ABCD*, le loro rette di intersezione sono parallele (XI, 16). Quindi *AB* è parallela a *DC*. Di nuovo, poiché i due piani paralleli *BHFC*, *AGED* sono tagliati dal piano *ABCD*, le loro rette d'intersezione sono parallele (XI, 16). Perciò *BC* è parallela ad *AD*. Ma fu dimostrato

che sono i parallelepipedi. I prismi, sotto un certo aspetto, rappresentano in geometria solida quel che i poligoni rappresentano in geometria piana. Così come l'equivalenza tra due poligoni può essere sempre messa in evidenza mediante l'*equicomposizione*, cioè mediante la scomposizione in parti finite, e in numero finito, a due a due uguali (in senso stretto), altrettanto si ha per l'equivalenza dei prismi, come è intuitivo data la corrispondenza intercorrente tra i prismi e i loro poligoni di base.

Ma già se dai prismi si passa alle piramidi non è possibile ricondursi alle equicomposizioni nel senso sopra indicato: ci si trova di fronte al problema dell'infinito, in quanto le cose si presentano come se, per mettere in evidenza (ad esempio) l'equivalenza di due piramidi aventi uguale altezza e uguali basi occorresse scomporre le due piramidi in un numero infinitamente grande di parti infinitamente piccole a due a due uguali. Naturalmente queste espressioni sono estremamente imprecise, e il tutto viene reso rigoroso mediante il cosiddetto metodo di esaustione (dovuto a Eudosso di Cnido), come Euclide fa nel libro dodicesimo (si veda ad es. la nota alla XII, 2).

Ma nel libro undicesimo Euclide vuole restare nel campo del *finito*: si limita quindi allo studio dei prismi. Tranne che nell'ultima proposizione (la XI, 39) in tutte le altre (dalla ventiquattresima alla trentottesima) la trattazione viene limitata a prismi particolari, cioè ai parallelepipedi. Anzi nella XI, 38 si studiano quei particolari parallelepipedi che sono costituiti dai cubi: ciò per l'uso che di una proprietà relativa a dette figure deve farsi nel libro tredicesimo (XIII, 17).

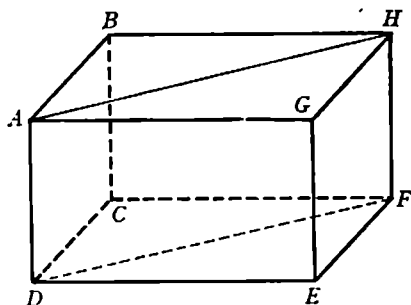
Nella XI, 24 Euclide considera un solido « racchiuso tra piani paralleli » e dimostra che le sue facce opposte sono parallelogrammi.

L'enunciazione, come dice Heiberg, *parum diligenter exposita est*; in verità va precisato che i piani sono sei, paralleli due a due. Questo teorema corrisponde a quello I, 33 che si riferisce alla genesi dei parallelogrammi.

Ma come nel libro primo, Euclide nella proposizione seguente I, 34 introduce il termine di spazio « parallelogrammo » senza averlo espressamente definito, così in questo libro undicesimo Euclide introduce nella seguente proposizione XI, 25 il termine « solido parallelepipedo » pur senza averne data una espressa definizione, ma con evidente riferimento alla precedente I, 24.

che pure *AB* è parallela a *DC*; quindi *ABCD* è un parallelogrammo. Similmente potremo dimostrare che anche ciascuna delle facce *GHFE*, *ABHG*, *DCFE*, *BHFC*, *AGED* è un parallelogrammo.

Si traccino le congiungenti *AH*, *DF*. Ora, poiché *AB* è parallela a *DC*, e *BH* è parallela a *CF*, le due rette *AB*, *BH* che si incontrano fra loro sono rispettivamente parallele alle due rette *DC*, *CF*, che si incontrano fra loro, ma non sono nello stesso piano [delle prime due; *AB*, *BH* e *DC*, *CF*] comprenderanno quindi angoli uguali (XI, 10), per cui l'angolo *ABH* è uguale all'angolo *DCF*. E poiché [nei due triangoli *ABH*, *DCF*] i due lati *AB*, *BH* sono uguali rispettivamente ai due lati *DC*, *CF* (I, 34), e l'angolo *ABH* è uguale all'angolo *DCF*, la base *AH* è uguale alla base *DF* ed il triangolo *ABH* è uguale al triangolo *DCF* (I, 4). Ma il parallelogrammo *ABHG* è il doppio del triangolo *ABH*, mentre il parallelogrammo *DCFE* è il doppio del triangolo *DCF* (I, 34); quindi il parallelogrammo *ABHG* è uguale al parallelogrammo *DCFE*. Similmente potremo dimostrare che anche *ABCD* è uguale a *GHFE*, e che *AGED* è uguale a *BHFC*.

Dunque, se un solido è compreso da [sei] piani [a due a due] paralleli... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 4, 34; XI, 10, 16.

È APPLICATA IN: XI, 25, 27, 28, 29, 31, 33; XII, 8.

PROPOSIZIONE 25.

Se un solido parallelepipedo è tagliato da un piano che sia parallelo ad una coppia di facce opposte, si avrà che i

solidi così risultanti stanno fra loro[a] *come la base [dell'uno] sta alla base [dell'altro]*[12].

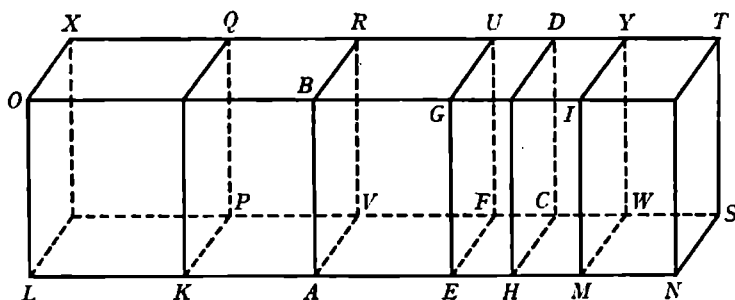
Infatti, il solido parallelepipedo *ABCD* sia tagliato dal piano *FG*, parallelo ai piani opposti fra loro *RA*, *DH*; dico che il solido *ABFU* sta al solido *EGCD* come la base *AEFV* sta alla base *EHCF*.

Si prolunghi difatti *AH* da ambedue le parti, si stacchino quante si voglia rette *AK*, *KL* uguali alla retta *AE*, e quante si voglia rette *HM*, *MN* uguali alla retta *EH*, si completino i parallelogrammi *LP*, *KV*, *HW*, *MS* ed i solidi *LQ*, *KR*, *DM*, *MT*. Ora, poiché le rette *LK*, *KA*, *AE* sono uguali fra loro, sono anche uguali fra loro i parallelogrammi *LP*, *KV*, *AF*, i parallelogrammi *KO*, *KB*, *AG* (I, 36), ed infine i parallelogrammi *LX*, *KQ*, *AR*: difatti essi sono [facce] fra loro opposte di parallelepipedi (XI, 24). Per le stesse ragioni, pure i parallelogrammi *EC*, *HW*, *MS* sono uguali fra loro, sono uguali fra loro i parallelogrammi *HG*, *HI*, *IN*, ed infine sono fra loro uguali i parallelogrammi *DH*, *MY*, *NT*; perciò nei solidi *LQ*, *KR*, *AU* tre facce [dell'uno] sono uguali rispettivamente a tre facce [di ciascuno degli altri due]. Ma le tre facce in questione sono uguali rispettivamente alle tre che sono loro opposte (XI, 24); i tre solidi *LQ*, *KR*, *AU* sono quindi uguali fra loro. Per la stessa ragione, anche i tre solidi *ED*, *DM*, *MT* sono uguali fra loro, e quindi di quante volte la base *LF* è multipla della base *AF*, di altrettante è pure multiplo il solido *LU* del solido *AU*. Per

a. Letteralmente: il solido starà al solido.

[12] In questa XI, 25 viene dimostrato che se un parallelepipedo viene tagliato in due parti da un piano parallelo a due facce opposte, le parti (cioè i due solidi risultanti dalla divisione) stanno tra loro come le rispettive basi. Questo è, in sostanza, un *lemma* di cui Euclide si serve per dimostrare i seguenti teoremi XI, 31 (equivalenza dei parallelepipedi aventi basi equivalenti e altezze uguali), XI, 32 (parallelepipedi di uguale altezza stanno tra loro come le basi), XI, 34 (in parallelepipedi equivalenti le basi sono in ragione inversa delle altezze, e inversamente).

Per la dimostrazione di questo *lemma* XI, 25, si ricorre alla definizione di proporzioni tra grandezze del libro quinto, senza utilizzare alcun teorema di detto libro.

la stessa ragione, di quante volte la base *NF* è multipla della base *FH*, di altrettante anche il solido *NU* è multiplo del solido *HU*. E se la base *LF* è uguale alla base *NF*, pure il solido *LU* è uguale al solido *NU*, se la base *LF* è maggiore della base *NF*, anche il solido *LU* è maggiore del solido *NU*, e se la base *LF* è minore della base *NF*, anche il solido *LU* è minore del solido *NU*. Date perciò quattro grandezze, le due basi *AF*, *FH* ed i due solidi *AU*, *UH*, si sono prese grandezze equimultiple della base *AF* e del solido *AU*, cioè la base *LF* ed il solido *LU*, e della base *HF* e del solido *HU*, cioè la base *NF* ed il solido *NU*, e si è dimostrato che se la base *LF* è maggiore della base *FN*, pure il solido *LU* è maggiore del solido *NU*, se la base *LF* è uguale alla base *FN*, il solido *LU* è uguale al solido *NU*, e se la base *LF* è minore della base *FN*, il solido *LU* è minore del solido *NU*. Dunque, la base *AF* sta alla base *FH* come il solido *AU* sta al solido *UH* (V, def. V). - C.D.D.

APPLICA: I, 36; XI, 24.

È APPLICATA IN: XI, 31, 32, 34.

PROPOSIZIONE 26.

Su una retta data [come spigolo] ed in un punto su essa [come vertice] costruire un angolo solido uguale ad un angolo solido dato[13].

[13] Questa proposizione XI, 26 è un problema: si chiede di eseguire la costruzione di un angolo solido uguale ad un angolo solido dato. La

Siano *AB* la retta data, *A* il punto dato su essa, e l'angolo solido dato sia l'angolo con vertice in *D*, compreso dagli angoli piani *EDC*, *EDF*, *FDC*; si deve dunque costruire sulla retta *AB* [presa come spigolo] e nel punto *A* su essa [preso come vertice] un angolo solido uguale all'angolo solido con vertice in *D*.

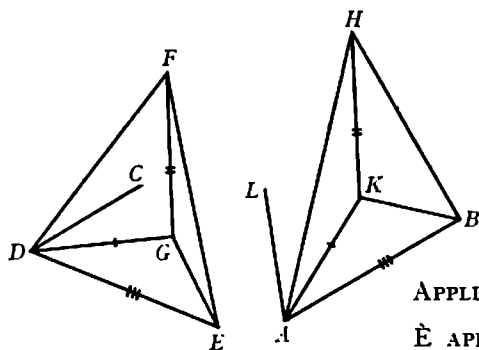
Infatti, si prenda sulla retta *DF* un punto *F* a piacere, si conduca la perpendicolare *FG* da *F* al piano passante per *ED*, *DC* (XI, 11), ed essa s'incontri col piano in *G*, si tracci la congiungente *DG*, sulla retta *AB* e [con vertice] nel punto *A* di essa si costruiscano l'angolo *BAL* uguale all'angolo *EDC*, e l'angolo *BAK* uguale all'angolo *EDG* (I, 23), si ponga *AK* uguale a *DG*, si innalzi dal punto *K* la retta *KH* perpendicolarmente al piano che passa per le rette *BA*, *AL* (XI, 12), si ponga *KH* uguale a *GF*, e si tracci la congiungente *HA*; dico che l'angolo solido con vertice in *A*, compreso dagli angoli *BAL*, *BAH*, *HAL*, è uguale all'angolo solido con vertice in *D*, ossia a quello che è compreso dagli angoli *EDC*, *EDF*, *FDC*.

Si stacchino infatti *AB*, *DE* uguali fra loro, e si traccino le congiungenti *HB*, *KB*, *FE*, *GE*. Ora, poiché *FG* è perpendicolare al piano di *ED*, *DC*, formerà angoli retti anche con tutte le rette che la incontrino e che siano sul piano stesso (XI, def. III); quindi ciascuno dei due angoli *FGD*, *FGE* è retto. Per la stessa ragione, è retto pure ognuno dei due angoli *HKA*, *HKB*. E poiché nei due triangoli *KAB*, *GDE* i due lati *KA*, *AB* sono uguali rispettivamente ai due lati *GD*, *DE*, e gli uni egli altri comprendono angoli uguali [per costruzione], la base *KB* è uguale alla base *GE* (I, 4). Ma anche *KH* è uguale a *GF*: e [sia *KB*, *KH* che *GE*, *GF*]

costruzione viene limitata, come costantemente fa Euclide nel trattare di angoli solidi, al caso del triedro. Questo problema è qui inserito perché viene immediatamente applicato, nella seguente XI, 27, alla costruzione di un parallelepipedo simile ad uno dato.

Nella dimostrazione di questa XI, 26 Euclide ammette che se due triedri hanno le facce rispettivamente uguali essi sono uguali (in senso stretto: direttamente o inversamente). Ma questa ammissione vien fatta derivare dall'Enriques dalla univocità della costruzione eseguita nella XI, 23 (come abbiamo già rilevato nella apposita nota).

comprendono angoli retti, per cui pure *HB*, *FE* sono uguali (id.). Di nuovo, poiché i due lati *AK*, *KH* sono uguali rispettivamente ai due lati *DG*, *GF*, e gli uni e gli altri comprendono angoli retti, la base *AH* è uguale alla base *FD* (id.). Ma anche *AB*, *DE* sono uguali; i due lati *HA*, *AB* sono così uguali rispettivamente ai due lati *DF*, *DE*. Ma la base *HB* è uguale alla base *FE*; perciò l'angolo *BAH* è uguale all'angolo *EDF* (I, 8). Per la stessa ragione[a], pure l'angolo *HAL* è uguale all'angolo *FDC*. E sono uguali anche gli angoli *BAL*, *EDC*.

Dunque, sulla retta data *AB* e nel punto *A* di essa si è costruito un angolo uguale all'angolo solido dato, cioè all'angolo con vertice in *D*. – C.D.F.

APPLICA: I, 4, 23; XI, 11, 12.

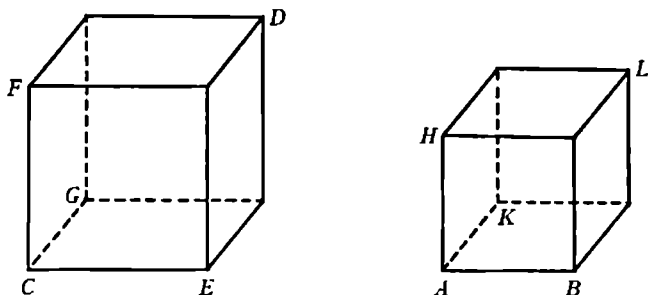
È APPLICATA IN: XI, 27.

a. La clausola « Per la stessa ragione » fa sospettare già come non autentiche parole che nel testo si ritrovano successivamente; inoltre il giro dimostrativo, nel periodo in questione e che citiamo, è troppo tortuoso per Euclide: « dato che, se tagliamo *AL*, *DC* uguali fra loro e tracciamo le congiungenti *KL*, *HL*, *GC*, *FC*, poiché tutta quanta *BAL* è uguale a tutta quanta *EDC*, e di queste rette la parte *BAK* dell'una è uguale alla parte *EDG* dell'altra per ipotesi, si ha che il resto *KAL* della prima è uguale al resto *GDC* della seconda. E poiché i due lati *KA*, *AL* sono uguali rispettivamente ai due lati *GD*, *DC*, e gli uni e gli altri comprendono angoli uguali, la base *KL* è uguale alla base *GC*. Ma anche *KH*, *GF* sono uguali, i due lati *LK*, *KH* sono così uguali ai due lati *CG*, *GF*, e gli uni e gli altri comprendono angoli uguali, per cui la base *HL* è uguale alla base *FC*. Ora, poiché i due lati *HA*, *AL* sono uguali ai due lati *FD*, *DC*, e la base *HL* è uguale alla base *FC*, l'angolo *HAL* è uguale all'angolo *FDC* ».

PROPOSIZIONE 27.

Descrivere su una retta data un solido parallelepipedo che sia simile e similmente posto rispetto ad un solido parallelepipedo dato.

Siano AB la retta data, e CD il solido parallelepipedo dato; si deve dunque descrivere sulla retta data AB un solido parallelepipedo simile e similmente posto rispetto al solido parallelepipedo dato CD.

Infatti, sulla retta AB e nel punto A di essa si costruisca un angolo solido, compreso dagli angoli BAH, HAK, KAB,

che sia uguale all'angolo solido con vertice in C, in modo che siano uguali l'angolo BAH all'angolo ECF, l'angolo BAK all'angolo ECG, e l'angolo KAH all'angolo GCF (XI, 26); e si prenda AK tale che $CE : CG = AB : AK$ (VI, 12), e poi AH tale che: $CG : CF = AK : AH$ (VI, 12). Si ha quindi, *ex aequo*: $CE : CF = AB : AH$ (V, 22). Si completino inoltre il parallelogrammo HB ed il solido AL.

Ora, poiché $CE : CG = AB : AK$ i lati che comprendono gli angoli uguali ECG, BAK sono fra loro proporzionali, il parallelogrammo GE è simile al parallelogrammo KB (VI, def. I). Per la stessa ragione, anche il parallelogrammo KH è simile al parallelogrammo GF e pure il parallelogrammo FE è simile al parallelogrammo HB; quindi tre parallelogrammi del solido CD sono simili rispettivamente a tre parallelogrammi del solido AL. Ma i tre parallelogrammi del primo

[solido] sono uguali e simili ai tre [dello stesso solido] che sono ad essi rispettivamente opposti, ed anche i tre parallelogrammi del secondo solido sono uguali e simili ai tre dello stesso solido che sono ad essi rispettivamente opposti (XI, 24); quindi l'intiero solido *CD* è simile all'intiero solido *AL* (XI, def. IX).

Dunque, sulla retta data *AB* si è descritto il solido parallelepipedo *AL* simile e similmente posto rispetto al solido parallelepipedo dato *CD* – C.D.F.

APPLICA: V, 22; VI, 12; XI, 24, 26.

PROPOSIZIONE 28.

Se un solido parallelepipedo è tagliato da un piano passante per le diagonali di due facce del solido opposte fra loro, il solido sarà diviso per metà dal piano suddetto[14].

Infatti, il solido parallelepipedo *AB* sia tagliato dal piano *CDEF* secondo le diagonali *CF*, *DE* di due facce opposte fra loro; dico che il solido *AB* sarà diviso per metà dal piano *CDEF*.

Poiché difatti il triangolo *CGF* è uguale al triangolo *CFB*, e quello *ADE* è uguale a quello *DEH* (I, 34), ma anche il parallelogrammo *CDAG* è uguale al parallelogrammo *BHEF* – sono infatti facce opposte fra loro –, e quello *AGFE* è uguale a quello *DCBH* (XI, 24), si ha che pure il prisma compreso dai due triangoli *CGF*, *ADE*, e dai tre parallelogrammi *AGFE*, *CDAG*, *CDEF*, è uguale al prisma compreso dai due triangoli *CFB*, *DEH* e dai tre parallelogrammi *DCBH*, *BHEF*, *CDEF*: essi sono infatti compresi da piani uguali per numero e per grandezza (XI, def. X). Cosicché

[14] Questa proposizione XI, 28 (divisione del parallelepipedo in due parti uguali mediante un piano diagonale), corrisponde alla parte finale della I, 34 (divisione del parallelogrammo in due parti uguali mediante una retta diagonale).

l'intiero solido *AB* è diviso per metà dal piano *CDEF*. – C.D.D.

APPLICA: I, 34; XI, 24.

È APPLICATA IN: XI, 39; XII, 4 lemma, 8.

PROPOSIZIONE 29.

Solidi parallelepipedi che stiano sulla stessa base ed abbiano la stessa altezza[a], *e tali che gli spigoli che si elevano a partire dalla base*[b] *terminino sulle stesse rette, sono uguali fra loro.*

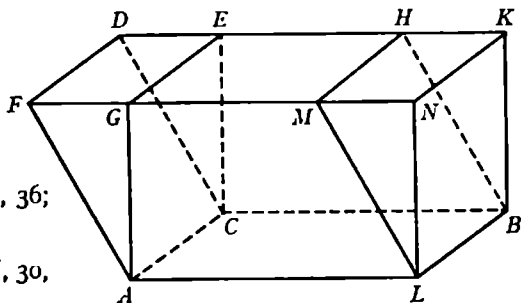
I solidi parallelepipedi *CM*, *CN* stiano sulla stessa base *AB*, abbiano la stessa altezza, e dei loro spigoli che si elevano a partire dalla base quelli *AG*, *AF*, *LM*, *LN* terminino sulla stessa retta *FN*, mentre quelli *CD*, *CE*, *BH*, *BK* terminino sulla stessa retta *DK*. Dico che il solido *CM* è uguale al solido *CN*.

Infatti, poiché *CDHB* e *CEKB* sono parallelogrammi, la retta *CB* è uguale a ciascuna delle due rette *DH*, *EK* (I, 34), cosicché anche *DH*, *EK* sono uguali. Si sottragga da ambedue la parte [comune] *EH*, quindi la parte *DE* che rimane è uguale alla parte rimanente *HK*. Cosicché pure il triangolo *DCE* è uguale al triangolo *HBK* (I, 8 e I, 4), ed il parallelogrammo *DFGE* è uguale al parallelogrammo *HMNK* (I, 36). Per la stessa ragione, è uguale anche il triangolo *AFG* al triangolo *MLN*. Ma pure il parallelogrammo *ACDF* è uguale al parallelogrammo *LBHM*, mentre il parallelo-

a. Letteralmente: che sono sulla stessa base e sotto la stessa altezza.

b. Letteralmente: «le rette che stanno sopra, che sovrastano (alla base)»; troviamo sia la forma αἱ ἐφεστῶσαι che quella αἱ ἐφεστηκυῖαι.

grammo *ACEG* è uguale al parallelogrammo *LBKN* – essi difatti sono facce opposte di un parallelepipedo (XI, 24); quindi anche il prisma compreso dai due triangoli *AFG*, *CDE*, e dai tre parallelogrammi *ACDF*, *DFGE*, *ACEG*, è uguale al prisma compreso dai due triangoli *LMN*, *BHK* e dai tre parallelogrammi *LBHM*, *HMNK*, *LBKN*. Si aggiunga ad essi in comune il solido la cui base è il parallelogrammo *ACBL*, mentre la faccia ad essa opposta è *GEHM*; perciò l'intiero solido parallelepipedo *CM* è uguale all'intiero solido parallelepipedo *CN*.

Dunque, solidi parallelepipedi che stiano sulla stessa base... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 4, 8, 34, 36; XI, 24.

È APPLICATA IN: XI, 30, 31, 34.

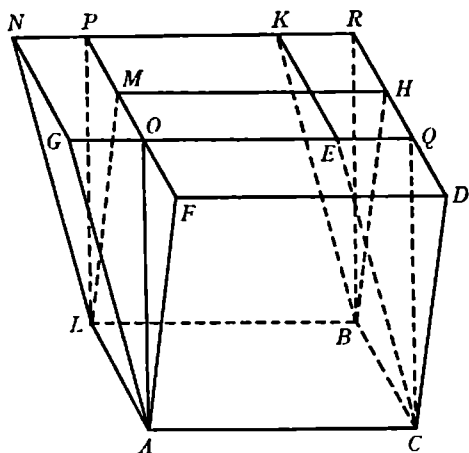
PROPOSIZIONE 30.

Solidi parallelepipedi che stiano sulla stessa base ed abbiano la stessa altezza, e tali che gli spigoli che si elevano a partire dalla base non terminino sulle stesse rette, sono uguali fra loro.

I solidi parallelepipedi *CM*, *CN* stiano sulla stessa base *ACBL*, avendo la stessa altezza: i loro spigoli *AF*, *AG*, *LM*, *LN*, *CD*, *CE*, *BH*, *BK*, sovrastanti alla base, non siano sulle stesse rette; dico che il solido *CM* è uguale al solido *CN*.

Infatti, si prolunghino le rette *NK*, *DH* ed esse si incontrino fra loro in *R*, si prolunghino ancora *FM*, *GE* oltre *M*, *E* sino a *P*, *Q*, e si traccino le congiungenti *AO*, *LP*, *CQ*, *BR*. Il solido *CM*, di cui è base il parallelogrammo *ACBL*, mentre *FDHM* è parallelogrammo ad essa opposto, è così uguale

al solido *CP*, di cui è base il parallelogrammo *ACBL* ed *OQRP* è parallelogrammo ad essa opposto: essi stanno difatti sulla stessa base *ACBL* ed hanno la stessa altezza, ed i loro spigoli *AF*, *AO*, *LM*, *LP*, *CD*, *CQ*, *BH*, *BR*, elevati sulla base, terminano sulle stesse rette *FP*, *DR* (XI, 29). Ma il solido *CP*, di cui è base il parallelogrammo *ACBL*, mentre parallelogrammo ad essa opposto è *OQRP*, è uguale al solido *CN*, di cui è base il parallelogrammo *ACBL* e *GEKN* è parallelogrammo ad essa opposto: ed infatti stanno, di nuovo, sulla stessa base *ACBL* ed hanno la stessa altezza, mentre i loro spigoli *AG*, *AO*, *CE*, *CQ*, *LN*, *LP*, *BK*, *BR*, elevati sulla base, terminano sulle stesse rette *GQ*, *NR* (XI, 29). Cosicché anche il solido *CM* è uguale al solido *CN*.

Dunque, solidi parallelepipedi che stiano sulla stessa base... (secondo l'enunciato). - C.D.D.

APPLICA: XI, 29.

È APPLICATA IN: XI, 31, 34.

PROPOSIZIONE 31.

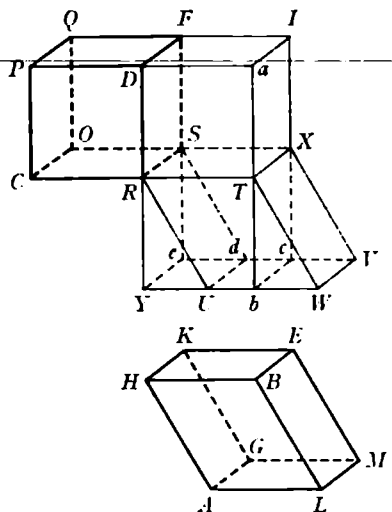
Solidi parallelepipedi che stiano su basi uguali, ed abbiano altezze uguali, sono uguali fra loro.

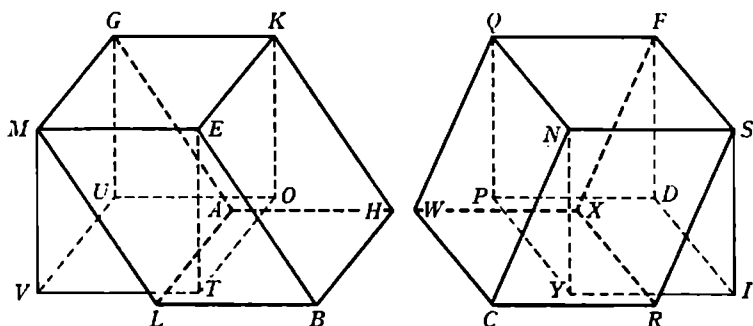
I solidi parallelepipedi *AE*, *CF* stiano sulle basi uguali *ALBH*, *CRDP*, avendo insieme altezze uguali. Dico che il solido *AE* è uguale al solido *CF*.

Dapprima, siano dunque perpendicolari alle basi *AB*, *CD* gli spigoli *HK*, *BE*, *AG*, *LM*, *PQ*, *DF*, *CO*, *RS*, ad esse sovrastanti, si prolunghi la retta *RT* per diritto a quella *CR*,

sulla retta *RT* e nel punto *R* su essa si costruisca l'angolo *TRU* uguale all'angolo *ALB* (I, 23), si pongano *RT* uguale ad *AL* e *RU* uguale a *LB*, e si completino sia la base *RTWU* che il solido *XU*. Ora, poiché i due lati *TR*, *RU* sono uguali rispettivamente ai due lati *AL*, *LB*, e gli uni e gli altri comprendono angoli uguali, il parallelogrammo *RTWU* è uguale e simile al parallelogrammo *HBLA* (VI, 14). E poiché, di nuovo, *AL* è uguale a *RT*, e *LM* è uguale a *RS*, e gli uni e gli altri lati comprendono angoli retti, il parallelogrammo *RSXT* è uguale e simile al parallelogrammo *AGML* (id.). Per la stessa ragione, anche *LBEM* è uguale e simile a *SU*, per cui tre parallelogrammi del solido *AE* sono uguali e simili rispettivamente a tre parallelogrammi del solido *XU*. Ma sia i tre parallelogrammi del primo solido che i tre del secondo sono uguali e simili ai tre [degli stessi solidi] che sono loro rispettivamente opposti (XI, 24); quindi l'intiero solido parallelepipedo *AE* è uguale all'intiero solido parallelepipedo *XU* (XI, def. X). Si prolunghino *DR*, *WU* e si incontrino fra loro in *Y*, per *T* si conduca *aTb* parallela a *DY*, si prolunghi *PD* oltre *D* sino ad *a*, e si completino i solidi *YX*, *RI*. Il solido *XY*, di cui è base il parallelogrammo *RX*, mentre parallelogrammo ad essa opposto è *Yc*, è così uguale al solido *XU*, di cui è base il parallelogrammo *RX* ed *UV* è parallelogrammo ad essa opposto: essi stanno difatti sulla stessa base *RX* ed hanno la stessa altezza, ed i loro spigoli *RY*, *RU*, *Tb*, *TW*, *Se*, *Sd*, *Xc*, *XV*, sovrastanti alla base, sono sulle stesse rette *YW*, *eV* (XI, 29). Ma il solido *XU* è uguale al solido *AE*, per cui anche il solido *XY* è uguale al solido *AE*. Ora, poiché il parallelogrammo *RUWT* è uguale al parallelogrammo *YT* – sono difatti sulla stessa base *RT* e compresi fra le stesse parallele *RT*, *YW* (I, 35) –, ma il parallelogrammo *RUWT* è uguale al parallelogrammo *CD*, poiché lo è anche a quello *AB*, si ha che pure il parallelogrammo *YT* è uguale al parallelogrammo *CD*. Ma *DT* è un altro parallelogrammo; quindi la base *CD* sta alla base *DT* come la base *YT* sta alla base *DT* (V, 7). E poiché il solido parallelepipedo *CI* risulta diviso dal piano *RF*, che è parallelo ai piani [del paralle-

lepipedo] opposti fra loro [rispetto a *RF*], la base *CD* sta alla base *DT* come il solido *CF* sta al solido *RI* (XI, 25). Per la stessa ragione, poiché il solido parallelepipedo *YI* risulta diviso dal piano *RX*, che è parallelo ai piani del parallelepipedo opposti fra loro rispetto a *RX*, la base *YT* sta alla base *TD* come il solido *YX* sta al solido *RI* (id.). Ma la base *CD* sta alla base *DT* come la base *YT* sta alla base *DT*, per cui pure il solido *CF* sta al solido *RI* come il solido *YX* sta al solido *RI* (V, 11). Ciascuno dei due solidi *CF*, *YX* ha quindi lo stesso rapporto col solido *RI*; perciò il solido *CF* è uguale al solido *YX* (V, 9). Ma fu dimostrato che il solido *YX* è uguale al solido *AE*; dunque anche il solido *AE* è uguale al solido *CF*.

Ma sia adesso il caso in cui, rispetto alle basi *AB*, *CD*, gli spigoli *AG*, *HK*, *BE*, *LM*, *CN*, *PQ*, *DF*, *RS*, ad esse sovrastanti, non sono perpendicolari; dico di nuovo che il solido *AE* è uguale al solido *CF*. Infatti, dai punti *K*, *E*, *G*, *M*, *Q*, *F*, *N*, *S* si conducano al piano cui, rispettivamente, veniamo a riferirci, le perpendicolari *KO*, *ET*, *GU*, *MV*, *QW*, *FX*, *NY*, *SI*, ed esse si incontrino col piano rispettivo nei punti *O*, *T*, *U*, *V*, *W*, *X*, *Y*, *I*, e si traccino le congiungenti *OT*, *OU*, *UV*, *TV*, *WX*, *WY*, *YI*, *IX*. Il solido *KV* è allora uguale al solido *QI*: stanno difatti sulle basi uguali *KM*, *QS* ed hanno altezze uguali, mentre gli spigoli in essi sovrastanti alle basi sono perpendicolari alle basi (vedi 1ª parte di questa proposizione). Ma il solido *KV* è uguale al solido *AE*, e quello *QI* è uguale a quello *CF* – stanno difatti sulla stessa base ed hanno la stessa altezza, mentre gli spigoli in essi sovrastanti alle basi non sono sulle stesse rette

(XI, 30)[a]. Anche il solido AE è quindi uguale al solido CF.

Dunque, solidi parallelepipedi che stiano su basi uguali... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 23, 35; V, 7, 9, 11; VI, 14; XI, 24, 25, 29, 30.

È APPLICATA IN: XI, 32, 34, 36, 39.

PROPOSIZIONE 32.

Solidi parallelepipedi che abbiano altezze uguali stanno fra loro come le basi.

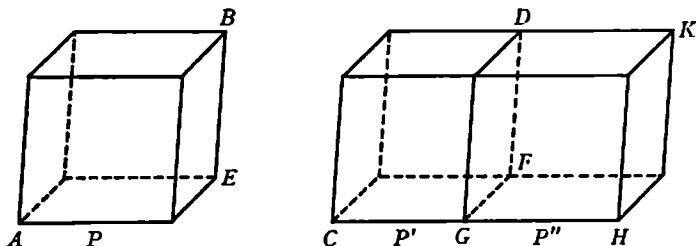
I solidi parallelepipedi $AB = P$, $CD = P'$ abbiano altezze uguali; dico che stanno fra loro come le basi, vale a dire che

$$P : P' = AE : CF$$

Infatti, si applichi alla retta FG il parallelogrammo FH uguale al parallelogrammo AE, e su FH come base, e con la stessa altezza del solido CD, si completi il solido parallelepipedo $GK = P''$. Il solido P è così uguale al solido P'': stanno difatti sulle basi uguali AE, FH ed hanno altezze uguali (XI, 31). E poiché il solido parallelepipedo $CK = P' + P''$ risulta diviso dal piano DG, che è parallelo alle

a. Heath, *op. cit.*, 3, p. 341, rileva giusta l'osservazione di Simson che le parole « mentre... ecc. » sarebbe anche meglio che non vi fossero, poiché gli spigoli di cui si parla possono essere benissimo sulle stesse rette (cfr. SIMSON, *op. cit.*, p. 422).

facce del parallelepipedo opposte fra loro rispetto a DG, si ha: *base* CF : *base* $FH = P' : P''$ (XI, 25). Ma la base FH è uguale alla base AE, ed il solido P'' è uguale al solido P; quindi anche: *base* CF : *base* $AE = P' : P$ da cui, invertendo: *base* AE : *base* $CF = P : P'$ (V, 7 coroll.) [a].

Dunque, solidi parallelepipedi che abbiano altezze uguali... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: V, 7 coroll.; XI, 25, 31.

È APPLICATA IN: XI, 33, 34; XII, 10.

PROPOSIZIONE 33.

Solidi parallelepipedi simili stanno fra loro in rapporto triplicato di quello dei lati omologhi [15].

Siano simili i solidi parallelepipedi $AB = P$, $CD = P'$, ed il lato (spigolo) AE sia omologo del lato CF; dico che

a. Nel testo si ha immediatamente: « quindi anche, la base AE sta alla base CF come il solido AB sta al solido CD.

[15] Nella VI, 19 si dimostra che i triangoli simili stanno tra loro in ragione duplicata dei lati omologhi: $T : T' =$ dupl. $(l : l')$. Cioè, detta x la terza proporzionale dopo l, l' ossia essendo:

$$l : l' = l' : x$$

si ha:

$$T : T' = l : x \qquad \text{(libro V, def. 9).}$$

Similmente nella VI, 20 per i poligoni simili aventi qualunque numero di lati.

Per i parallelepipedi simili si ha che essi sono *in ragione triplicata* dei

il solido P ha col solido P' rapporto triplicato di quello che AE ha con CF.

Infatti, si prolunghino EK, EL, EM per diritto ad AE, GE, HE, si stacchino EK uguale a CF, ed EL uguale a FN, e infine EM uguale a FR, e si completino il parallelogrammo KL ed il solido $KS = P''$.

Ora, poiché i due lati KE, EL sono uguali rispettivamente ai due lati CF, FN, ma anche l'angolo KEL è uguale all'angolo CFN, poiché è uguale ad AEG (I, 15), che a sua volta è uguale all'angolo CFN data la similitudine dei solidi P, P', si ha che il parallelogrammo KL è uguale [e simile] al parallelogrammo CN (VI, 14) [a]. Per la stessa ragione, anche il parallelogrammo KM è uguale e simile al parallelogrammo CR ed infine il parallelogrammo ES è uguale e

a. Heiberg (IV, XI, 33) nota che l'« e simile », posto in parentesi quadra, dovrebbe essere un'aggiunta, poiché si vede di per sé che i solidi in questione sono simili; alla proposizione 25, ugualmente, $KO = KB = AG$ (difatti tali parallelogrammi hanno uguali angoli e lati) sono anche simili a prima vista e senza necessità che Euclide debba dirlo in modo esplicito.

lati omologhi (nel nostro linguaggio: stanno tra loro come i cubi, cioè le terze potenze, del lati omologhi).

Cioè essendo l, l' due lati omologhi, se si considerano i segmenti x, y tali da soddisfare alle proporzioni:

$$l : l' = l' : x = x : y$$

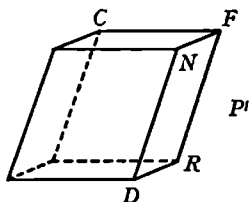
si ha per i due parallelepipedi V, V':

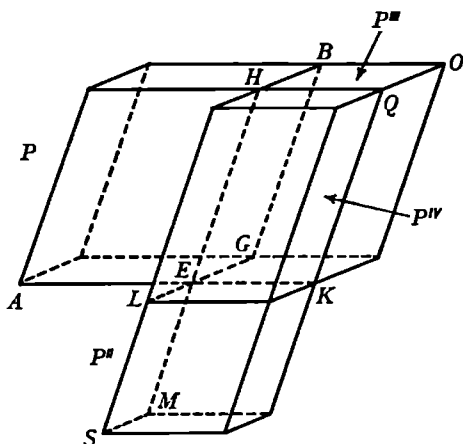
$$V : V' = l : y \qquad \text{(libro V, def. 10)}$$

Solidi simili sono per Euclide, secondo la definizione n. 9 di questo libro undicesimo, quelli racchiusi da ugual numero di facce simili a due a due. Già è stato esposto, nella nota relativa ai princìpi del libro undicesimo, che detta definizione è corretta se riferita a figure aventi angoli solidi con non più di tre facce (e questo dei triedri, come s'è visto, è il caso esclusivamente considerato da Euclide).

Analogo teorema del libro dodicesimo (XII, 12) si riferisce ai coni e ai cilindri simili, i quali stanno in ragione triplicata dei diametri delle basi. Va ricordato che per la similitudine di coni e di cilindri c'è una definizione speciale (XI, def. 24): sono simili coni e cilindri nei quali gli assi (= altezze) e i diametri delle basi sono in proporzione:

$$d : d' = h : h'$$

simile al parallelogrammo DF; quindi tre parallelogrammi del solido P'' sono uguali e simili rispettivamente a tre parallelogrammi del solido P'. Ma i tre parallelogrammi del primo solido sono uguali e simili rispettivamente ai tre [dello stesso] che sono loro opposti, mentre i tre parallelogrammi del secondo sono uguali e simili rispettivamente ai tre che sono loro opposti (XI, 24), quindi l'intiero solido P'' è uguale e simile all'intiero solido P' (XI, def. X). Si completi ora il parallelogrammo GK, e si completino, assumendo come basi i parallelogrammi GK, KL e per altezza la stessa di AB, i solidi $EO = P'''$, $LQ = P^{IV}$. Ma poiché per la similitudine dei solidi P, P', si ha: $AE : CF = EG : FN = EH : FR$, ma è per costruzione: $CF = EK$; $FN = EL$; $FR = EM$, di conseguenza si ha: $AE : EK = EG : EL = EH : EM$. Ma AE sta ad EK come sta il parallelogrammo AG al parallelogrammo GK, ed EG sta ad EL come il parallelogrammo GK sta al parallelogrammo KL, ed EH sta ad EM come il parallelogrammo QE sta al parallelogrammo KM (VI, 1); quindi anche, il parallelogrammo AG sta al parallelogrammo GK come il parallelogrammo GK sta al parallelogrammo KL e come quello QE sta a quello KM ($AG : GK = GK : KL = QE : KM$). Ma il parallelogrammo AG sta a quello GK come il solido P sta al solido P''', il parallelogrammo GK sta a quello KL come il solido P''' sta al solido P^{IV}, ed il parallelogrammo QE sta a quello KM come il solido P^{IV} sta al solido P'' (XI, 32); quindi anche, $P : P''' = P''' : P^{IV} = P^{IV} : P''$. Ma se quattro grandezze stanno fra loro in proporzione continuata, la prima ha con la quarta rapporto triplicato rispetto a quello che ha con la seconda (V, def. X); perciò il solido P ha col solido P'' rapporto triplicato rispetto a quello che P ha con P'''. Ma P sta a P''' come il parallelogrammo AG sta parallelogrammo GK e quindi come la retta AE sta alla retta EK; cosicché pure, il solido P ha col solido P'' rapporto triplicato rispetto a quello che la retta AE ha con la retta EK. Ma il solido P'' è uguale [per costruzione] al solido P', mentre la retta EK è uguale alla retta CF; quindi anche, il solido P ha col solido P' rapporto

triplicato rispetto a quello che il suo lato AE ha col lato omologo CF.

Dunque, solidi parallelepipedi simili... (secondo l'enunciato). - C.D.D.

APPLICA: I, 15; VI, 1, 14; XI, 24, 32.

È APPLICATA IN: XII, 8.

CorollARIO [a].

È da ciò evidente che se quattro rette sono fra loro proporzionali, si avrà che la prima sta alla quarta come un solido parallelepipedo che sia descritto sulla prima sta a quello, simile e similmente disposto, descritto sulla seconda, poiché, anche, la prima retta ha con la quarta rapporto triplicato rispetto a quello che ha con la seconda.

PROPOSIZIONE 34.

In solidi parallelepipedi uguali le basi sono inversamente proporzionali alle altezze; ed i solidi parallelepipedi le cui basi siano inversamente proporzionali alle altezze, sono uguali.

Siano $AB = P$; $CD = P'$ due solidi parallelepipedi uguali fra loro; dico che le basi dei solidi parallelepipedi P, P'

a. La genuinità del corollario è forse dubitevole; cfr. sempre Heiberg.

sono inversamente proporzionali alle altezze, cioè che la base $AELH$ sta alla base $CNPQ$ come l'altezza del solido P' sta all'altezza del solido P.

Infatti, siano dapprima perpendicolari alle basi relative gli spigoli AG, EF, LB, HK, CM, NO, PD, QR, che si elevano sulle basi stesse; dico che $AELH : CNPQ = CM : AG$. Se la base $AELH$ fosse uguale alla base $CNPQ$, dal momento che per ipotesi è $P = P'$, pure l'altezza CM sarebbe uguale all'altezza AG. Stanno difatti fra loro come le basi solidi parallelepipedi che abbiano altezze uguali (XI, 32). Si avrebbe quindi: $AELH : CNPQ = CM : AG$, e manifestamente le basi dei solidi parallelepipedi P, P' sarebbero inversamente proporzionali alle altezze.

Ma sia adesso il caso in cui la base $AELH$ non sia uguale alla base $CNPQ$, ed $AELH$ sia maggiore. Ma per ipotesi il solido P è uguale al solido P'; quindi anche l'altezza CM risulta maggiore di quella AG. Si ponga dunque CT uguale ad AG, e si completi, con NQ come base e con CT per altezza, il solido parallelepipedo $VC = P''$. Ora, poiché il solido P è uguale al solido P', ed oltre ad essi si è preso P'', ma d'altra parte grandezze uguali hanno lo stesso rapporto con una stessa grandezza (V, 7), si ha tra i solidi la proporzione: $P : P'' = P' : P''$. Ma $P : P'' = AELH : CNPQ$ – i solidi P, P'' sono difatti d'altezza uguale [quindi stanno tra loro come le basi] (XI, 32) –, mentre il solido P' sta al solido P'' come la base $MCQR$ sta alla base $TCQZ$ e quindi come lo spigolo CM sta allo spigolo CT (XI, 25; VI, 1); quindi anche: $AELH : CNPQ = CM : CT$. Ma CT è uguale ad AG; perciò si ha anche: $AELH : CNPQ = CM : AG$. Dunque, le basi dei solidi parallelepipedi AB, CD sono inversamente proporzionali alle altezze.

Di nuovo, siano adesso le basi dei solidi parallelepipedi P, P' inversamente proporzionali alle altezze, e si abbia: $AELH : CNPQ = CM : AG$; dico che il solido P è uguale al solido P'.

Siano ancora perpendicolari alle basi gli spigoli su di esse elevati. Ora, se fossero uguali le basi ($AELH = CNPQ$), dato che per ipotesi le basi stanno tra loro in ragione inversa

delle altezze ($AELH : CNPQ = CM : AG$) si avrebbe che pure l'altezza CM del solido P' sarebbe uguale all'altezza AG del solido P. Ma solidi parallelepipedi che stiano su basi uguali ed abbiano altezze uguali, sono uguali fra loro (XI, 31); dunque il solido P sarebbe uguale al solido P'.

Sia adesso invece il caso in cui la base $AELH$ non sia uguale alla base $CNPQ$, ma sia maggiore $AELH$; quindi è in tal caso anche maggiore l'altezza del solido P' rispetto all'altezza del solido P, vale a dire CM è maggiore di AG. Si ponga, di nuovo, CT uguale ad AG, e si completi il solido $CV = P''$ similmente. Poiché per ipotesi è: $AELH : CNPQ = CM : AG$, ma AG è uguale a CT, si ha: $AELH : CNPQ = CM : CT$. Ma: $AELH : CNPQ = P : P''$ – difatti i solidi P, P'' hanno uguale altezza (XI, 32) –, mentre $CM : CT = MCQR : TCQZ = P' : P''$ (VI, 1 e XI, 25). Quindi anche: $P : P'' = P' : P''$, quindi ciascuno dei due solidi P, P' ha lo stesso rapporto con P''. Dunque il solido AB è uguale al solido CD (V, 9).

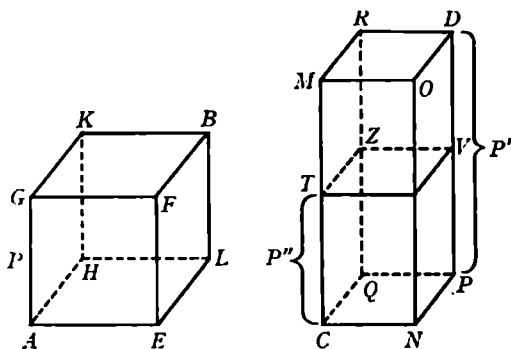
Adesso, invece, sia il caso in cui non sono perpendicolari alle basi relative gli spigoli, sovrastanti alle basi stesse, FE, BL, GA, HK, ON, DP, MC, RQ: dai punti F, G, B, K, O, M, D, R si conducano rette perpendicolari ai piani che passano per EH, NQ, ed esse si incontrino coi piani in questione in S, T, U, V, W, X, Y, a, e si completino i solidi FV, Oa; dico che, anche così, qualora i solidi AB, CD siano uguali, le basi sono inversamente proporzionali alle altezze, e si ha che la base EH sta alla base NQ come l'altezza del solido CD sta all'altezza del solido AB.

Poiché il solido AB è uguale al solido CD, ma il solido AB è uguale a quello BT (XI, 29-30) – stanno difatti sulla stessa base FK ed hanno la stessa altezza [e gli spigoli in essi sovrastanti alle basi non sono sulle stesse rette[a]] –, mentre il solido CD è uguale al solido DX – stanno di nuovo,

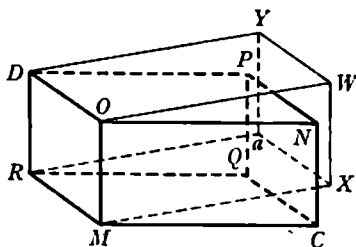
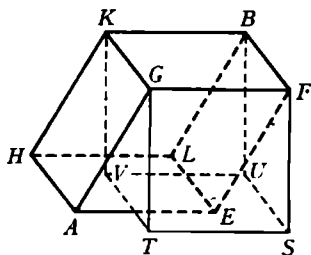
a. Caso diverso, cioè che siano sulle stesse rette, in definitiva che non siano sulla stessa base, si esclude automaticamente, per cui le parole in parentesi quadra vanno intese come interpolate; ciò vale anche per dopo, alle stesse espressioni.

infatti, sulla stessa base *RO* ed hanno la stessa altezza (id.) [e gli spigoli in essi sovrastanti alle basi non sono sulle stesse rette] –, si ha che pure il solido *BT* è uguale al solido *DX*. [Ma in solidi parallelepipedi uguali, le cui altezze siano perpendicolari alle basi rispettive, le basi sono inversamente proporzionali alle altezze[a].] Quindi la base *FK* sta alla base *OR* come l'altezza del solido *DX* sta all'altezza del solido *BT*. Ma la base *FK* è uguale alla base *EH*, e la base *OR* è uguale alla base *NQ*; quindi la base *EH* sta alla base *NQ* come l'altezza del solido *DX* sta all'altezza del solido *BT*. Ma le altezze dei solidi *DX*, *BT* sono uguali a quelle dei solidi *DC*, *BA*, per cui la base *EH* sta alla base *NQ* come l'altezza del solido *DC* sta all'altezza del solido *AB*. Dunque, le basi dei solidi parallelepipedi *AB*, *CD* sono inversamente proporzionali alle altezze.

Di nuovo, adesso sia il caso in cui le basi dei solidi parallelepipedi *AB*, *CD* sono inversamente proporzionali alle altezze, e si abbia che la base *EH* stia alla base *NQ* come l'altezza del solido *CD* sta all'altezza del solido *AB*; dico che il solido *AB* è uguale al solido *CD*.

Infatti, eseguita la medesima costruzione di prima, poiché la base *EH* sta alla base *NQ* come l'altezza del solido *CD* sta all'altezza del solido *AB*, ma la base *EH* è uguale alla

a. Frase pur essa da ritenersi interpolata, in quanto in solidi parallelepipedi le altezze sono sempre perpendicolari alle basi; ciò vale anche per dopo, come sopra.

base *FK*, e quella *NQ* è uguale a quella *OR*, si ha che la base *FK* sta alla base *OR* come l'altezza del solido *CD* sta all'altezza del solido *AB*. Ma le altezze dei solidi *AB*, *CD* e quelle dei solidi *BT*, *DX* sono uguali; perciò la base *FK* sta alla base *OR* come l'altezza del solido *DX* sta all'altezza del solido *BT*. Le basi dei solidi parallelepipedi *BT*, *DX* sono quindi inversamente proporzionali alle altezze[; ma solidi parallelepipedi le cui altezze siano perpendicolari alle basi rispettive, ed in cui le basi sono inversamente proporzionali alle altezze, sono uguali], per cui il solido *BT* è uguale al solido *DX*. Ma il solido *BT* è uguale al solido *BA*: essi stanno difatti sulla stessa base *FK* ed hanno la stessa altezza, [mentre gli spigoli in essi sovrastanti alle basi non sono sulle stesse rette] (XI, 29-30). Ora, il solido *DX* è uguale al solido *DC*[: stanno ancora, difatti, sulla stessa base *OR*, hanno la stessa altezza, e sono compresi fra le stesse rette].

Dunque, anche i solidi *AB*, *CD* sono uguali. - C.D.D.

APPLICA: V, 7, 9; VI, 1; XI, 25, 29, 30, 31, 32.

È APPLICATA IN: XII, 9.

PROPOSIZIONE 35.

Se si dànno due angoli piani uguali e se a partire dai loro vertici si elevano sui loro rispettivi piani due rette[a], *le quali vengano, insieme con i lati degli angoli piani dati, a formare angoli rispettivamente uguali, se sulle rette così elevate si pren-*

a. Letteralmente: μετέωροι, in alto, sovrastanti.

dono a caso dei punti, da essi si abbassano rette perpendicolari ai piani in cui si trovano i due angoli inizialmente dati, e si tracciano rette congiungenti il piede di ciascuna perpendicolare col vertice di ciascuno degli angoli dati, dette congiungenti, insieme con le rette elevate al di sopra degli angoli dati, formano angoli fra loro uguali[16].

Siano BAC, EDF due angoli rettilinei uguali: dai punti A, D si innalzino al di sopra di essi le rette AG, DM, che comprendano, insieme coi lati degli angoli dati, angoli rispettivamente uguali, cioè MDE uguale a GAB, e MDF uguale a GAC, su AG, DM si prendano i punti a piacere G, M, si conducano dai punti G, M le perpendicolari GL, MN ai piani dei due angoli dati, ed esse si incontrino coi piani in questione nei punti N, L, e si traccino le congiungenti LA, ND; dico che l'angolo GAL è uguale all'angolo MDN.

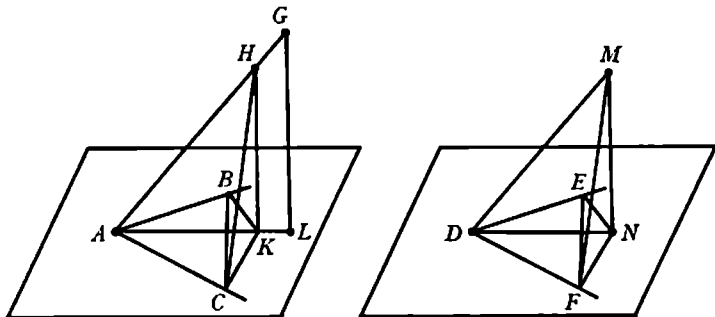
Si ponga AH uguale a DM, e per il punto H si conduca la parallela HK a GL. Ma GL è perpendicolare al piano che passa per BA, AC; quindi anche HK è perpendicolare al piano che passa per BA, AC (XI, 8). Si conducano dai punti K, N le perpendicolari KB, KC, NE, NF alle rette AB, AC, DE, DF, e si traccino le congiungenti HC, CB, MF, FE. Poiché il quadrato di HA è uguale alla somma dei quadrati di HK, KA, ma al quadrato di KA è uguale la somma dei quadrati di KC, CA (I, 47), pure il quadrato di HA è uguale alla somma dei quadrati di HK, KC, CA. Ma alla somma dei quadrati di HK, KC è uguale il quadrato di HC, per cui il quadrato di HA è uguale alla somma dei quadrati di HC, CA. L'angolo HCA è quindi retto (I, 48). Per la stessa ragione, è retto pure l'angolo DFM. Quindi l'angolo ACH è uguale all'angolo DFM. Ma per ipotesi l'angolo HAC è uguale all'angolo MDF. Sicché MDF, HAC

[16] In questa XI, 35 si considerano in sostanza due triedri aventi le facce rispettivamente uguali, e si dimostra che spigoli omologhi sono ugualmente inclinati sulle facce opposte.

Questa XI, 35 (il suo corollario) trova applicazione nella seguente XI, 36 riguardante i parallelepipedi, ed è perciò qui inserita. Tuttavia nell'edizione di Enriques (vol. IV, p. 133) si richiama l'attenzione sull'importanza della XI, 35 in sé e per sé.

sono due triangoli i quali hanno rispettivamente due angoli uguali a due angoli ed un lato uguale ad un lato, ossia quello a cui è opposto uno degli angoli uguali, cioè HA uguale a MD; essi avranno perciò anche i lati rimanenti rispettivamente uguali (I, 26). Quindi AC è uguale a DF. Similmente potremo dimostrare che pure AB è uguale a DE. Poiché dunque AC è uguale a DF, ed AB è uguale a DE, nei due triangoli ABC, DEF i due lati AC, AB sono uguali rispettivamente ai due lati DF, DE. Ma anche l'angolo CAB è uguale [per ipotesi] all'angolo FDE, quindi la base BC è uguale alla base EF, l'un triangolo è uguale all'altro triangolo, e gli angoli rimanenti del primo sono uguali agli angoli rimanenti del secondo (I, 4); l'angolo ACB è quindi uguale all'angolo DFE. Ma pure l'angolo retto ACK è uguale all'angolo retto DFN, per cui, sottraendo, anche l'angolo BCK che rimane è uguale all'altro angolo rimanente EFN. Per la stessa ragione, anche l'angolo CBK è uguale all'angolo FEN. Di conseguenza, BCK, EFN sono due triangoli aventi uguali rispettivamente due angoli a due angoli ed un lato uguale ad un lato, ossia quello adiacente agli angoli uguali, cioè BC uguale ad EF [come si è sopra dimostrato]; avranno perciò uguali pure i lati rimanenti ai lati rimanenti (I, 26). Quindi CK è uguale a FN. Ma pure AC, DF sono uguali; quindi nei due triangoli ACK, DFN i due lati AC, CK sono allora uguali rispettivamente ai due lati DF, FN: e comprendono angoli retti. Perciò la base AK è uguale alla base DN (I, 4). Ora, poiché AH è uguale [per costruzione] a DM, anche il quadrato di AH è uguale al quadrato di DM. Ma la somma dei quadrati di AK, KH è uguale al quadrato di AH – difatti l'angolo AKH è retto –, mentre al quadrato di DM è uguale la somma dei quadrati di DN, NM – difatti è retto l'angolo DNM; quindi la somma dei quadrati di AK, KH è uguale a quella dei quadrati di DN, NM, fra i quali quadrati quello di AK è uguale al quadrato di DN, per cui il quadrato di KH che così rimane in un triangolo è uguale al rimanente quadrato di NM nell'altro; è perciò uguale KH a MN. Ma poiché nei due triangoli AHK, DMN

i due lati AH, AK sono uguali rispettivamente ai due lati DM, DN, e fu dimostrato che la base HK è uguale alla base MN, si ha che l'angolo HAK è uguale all'angolo MDN (I, 8).

Dunque, se si dànno due angoli piani uguali, e se a partire dai loro vertici..., come si elenca nell'enunciato.

APPLICA: I, 4, 8, 26, 47, 48; XI, 8.

È APPLICATA IN: XI, 36.

COROLLARIO

È da ciò evidente che se si dànno due angoli piani uguali, e si innalzano da essi[, cioè, sui loro vertici,] ed al di sopra di essi [a] delle rette uguali, che comprendano, insieme con le rette poste all'inizio, angoli uguali rispettivamente, le perpendicolari condotte da esse ai piani in cui si trovano gli angoli inizialmente posti, sono uguali fra loro. – C.D.D.

PROPOSIZIONE 36.

Se tre rette sono proporzionali, il solido parallelepipedo che ha come spigoli le tre rette in questione è uguale al solido parallelepipedo aventi i tre spigoli uguali alla retta media propor-

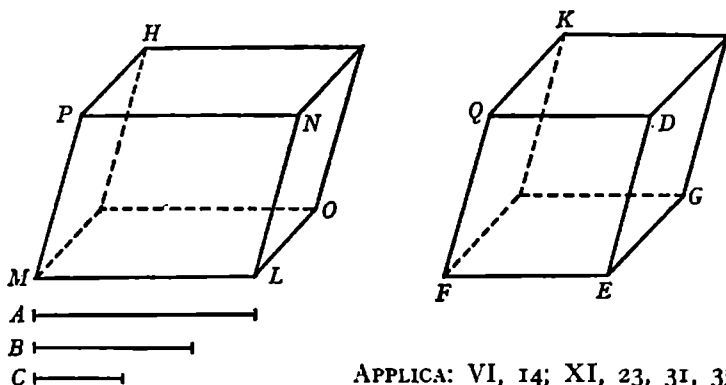
a. Letteralmente: e si innalzano su essi rette al di sopra, sovrastanti, uguali.

zionale, ed avente gli angoli rispettivamente uguali a quelli del primo parallelepipedo [17].

Siano A, B, C tre rette proporzionali fra loro, in modo che A stia a B come B sta a C; dico che il solido avente gli spigoli A, B, C è uguale al solido avente i tre spigoli uguali a B, e che sia inoltre equiangolo rispetto a quello precedentemente indicato.

Si assuma l'angolo solido con vertice in E, compreso dagli angoli DEG, GEF, FED, si ponga ciascuna delle rette DE, GE, EF uguale alla retta B, e si completi il solido parallelepipedo EK. Si ponga poi LM uguale ad A, e sulla retta LM e nel punto L su essa si costruisca l'angolo solido compreso dagli angoli NLO, OLM, MLN, ed uguale all'angolo solido con vertice in E (XI, 23), e si pongano LO uguale a B e LN uguale a C. Ora, poiché per ipotesi $A : B = B : C$, ma A è uguale a LM, mentre B è uguale a ciascuna delle rette LO, DE, EF e C è uguale a LN, si ha: $LM : EF =$ $= DE : LN$. Dunque i lati che comprendono gli angoli uguali NLM, DEF nei due parallelogrammi $MLNP$, $FEDQ$ sono inversamente proporzionali; quindi i due parallelogrammi sono uguali (VI, 14). E poiché DEF, NLM sono due angoli piani rettilinei uguali, e sui loro vertici, ed al di sopra di essi si innalzano le rette LO, EG, uguali fra loro e che comprendono, con le rette inizialmente poste, angoli uguali rispettivamente, si ha che le perpendicolari, condotte dai punti G, O ai piani che passano per le rette NL, LM e DE, EF, sono uguali fra loro (XI, 35, coroll.); cosicché i solidi LH, EK hanno altezze uguali. Ma solidi parallelepipedi che stiano su basi uguali ed abbiano altezze uguali, sono uguali fra loro (XI, 31), per cui il solido HL è uguale al solido EK. Ora, LH è il solido determinato da A, B, C, mentre EK è il solido che ha ciascuno dei tre spigoli uguale a B; dunque, il solido parallelepipedo determinato da A, B, C

[17] Per il caso particolare di parallelepipedi rettangoli, poiché da: $A : B = B : C$ si ricava che il quadrato di B è equivalente al rettangolo di A, C ($B^2 = AC$), il parallelepipedo di volume ABC equivale al parallelepipedo (cubo) di spigolo B; infatti $ABC = AC \cdot B = B^2 \cdot B = B^3$.

è uguale al solido che ha ciascuno dei tre spigoli uguali a B, e che è inoltre equiangolo rispetto ad esso. – C.D.D.

APPLICA: VI, 14; XI, 23, 31, 35.

PROPOSIZIONE 37.

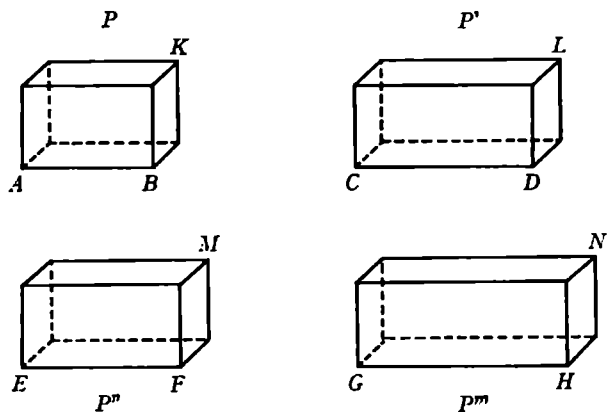
Se quattro rette sono proporzionali, anche solidi parallelepipedi descritti su esse, e che siano fra loro simili e similmente posti, saranno proporzionali fra loro; e se solidi parallelepipedi descritti su esse, in modo che siano fra loro simili e similmente posti, sono proporzionali fra loro, saranno proporzionali anche le rette stesse.

Siano AB, CD, EF, GH quattro rette proporzionali fra loro, in modo che AB stia a CD come EF sta a GH, e su AB, CD, EF, GH si descrivano i solidi parallelepipedi, simili e similmente posti, $KA = P$; $LC = P'$; $ME = P''$; $NG =$ $= P'''$. Dico che: $P : P' = P'' : P'''$.

Infatti, poiché il solido parallelepipedo P è simile a quello P', si ha che KA ha con LC rapporto triplicato rispetto a quello che AB ha con CD (XI, 33). Per la stessa ragione, pure P'' ha con P''' rapporto triplicato rispetto a quello che EF ha con GH (id.). Ma AB sta a CD come EF sta a GH. Dunque, si ha anche che P sta a P' come P'' sta a P'''.

Ma sia adesso il caso in cui il solido P stia al solido P' come il solido P'' sta a quello P'''; dico che la retta AB sta a quella CD come quella EF sta a quella GH.

Infatti, poiché di nuovo P ha con P' rapporto triplicato rispetto a quello che AB ha con CD (XI, 33), e P'' ha con P''' rapporto triplicato rispetto a quello che EF ha con GH, e poiché per ipotesi: $P : P' = P'' : P'''$, si ha pure che AB sta a CD come EF sta a GH.

Dunque, se quattro rette sono proporzionali, si avrà anche il resto, come si elenca nell'enunciato. – C.D.D. [a].

APPLICA: XI, 33.

a. I manoscritti arrecano qui una proposizione (cfr. HEIBERG, IV, App. I, pp. 354-355, Vulgo XI, prop. 38) che vi sta assai male, poiché non necessaria: « Se un piano è perpendicolare ad un altro piano, e da uno dei punti posti in uno dei piani si conduce una perpendicolare all'altro piano, la perpendicolare così condotta verrà a cadere sulla linea di sezione comune dei piani ». Siamo di fronte ad una interpolazione, che poi costituirebbe piuttosto un corollario a XII, 17, dove soltanto si fa uso del fatto in questione (cfr. HEATH, *op. cit.*, 3, p. 360); della prop. 37 esiste una prova alternativa, che Clavio attribuisce a Teone (*Euclidis Elementorum libri XV. Accessit XVI de Solidorum Regularium cuiuslibet intra quodlibet comparatione...*, Colonia, Ciotti, 3ª ediz., 1591, vol. II, pp. 222-223).

PROPOSIZIONE 38.

Se in un cubo i lati di due facce opposte sono divisi per metà, ed altri due piani vengono condotti per i punti di sezione, la retta d'intersezione di tali piani e la diagonale [= le diagonali] del cubo si dividono reciprocamente per metà[18].

Infatti, nel cubo *AF* i lati delle facce opposte *CF*, *AH* siano divisi per metà nei punti *K*, *L*, *M*, *N*, *O*, *Q*, *P*, *R*; per i punti di sezione si conducano i piani *KLNM*, *OPRQ*, e la retta *US* sia l'intersezione dei piani stessi. Si tracci infine la diagonale *DG* del cubo *AF*: [essa taglia la *US* in un punto *T*]. Dico che *UT* è uguale a *TS*, e che *DT* è uguale a *TG*.

Si traccino difatti le congiungenti *DU*, *UE*, *BS*, *SG*. Ora, poiché *DO* è parallela a *QE*, gli angoli alterni *DOU*, *UQE* sono uguali fra loro (I, 29). E poiché *DO* è uguale a *QE*, ed *OU* è uguale ad *UQ*, e sia *DO*, *QE* che *OU*, *UQ* comprendono angoli uguali, la base *DU* è uguale alla base *UE*, il triangolo *DOU* è uguale al triangolo *QUE*, e gli angoli rimanenti del primo sono uguali ai rispettivi angoli rimanenti del secondo (I, 4); l'angolo *OUD* è quindi uguale all'angolo *QUE*. Per questo, allora, *DUE* è una linea retta (I, 14). Per la stessa ragione, anche *BSG* è una linea retta, e *BS* è uguale a *SG*. E poiché *CA* è uguale e parallela a *DB*, ma *CA* è uguale e parallela anche ad *EG*, pure *DB* è uguale e parallela ad *EG* (XI, 9). Ma le congiungono le rette *DE*, *BG*, per cui *DE* è parallela a *BG* (I, 33). Quindi l'angolo *EDT* è uguale all'angolo *BGT* – sono difatti angoli alterni (I, 29) –, mentre l'angolo *DTU* è uguale all'angolo *GTS* (I, 15). Così *DTU*, *GTS* sono due triangoli che hanno uguali rispettivamente due angoli a due angoli, ed un lato uguale ad un

[18] Questa proposizione I, 38 riguarda, come s'è detto, quel particolare parallelepipedo che è il cubo. E la proprietà relativa trova applicazione nella XIII, 17 (costruzione del dodecaedro regolare); ivi si trova la inusitata citazione: « Ciò infatti è stato dimostrato nel penultimo teorema del libro undicesimo (τοῦτο γὰρ δέδεικται ἐν τῷ παρατελεύτῳ θεωρήματι τοῦ ἑνδεκάτου βιβλίου).

lato, ossia quello opposto ad uno degli angoli uguali, cioè DU uguale a GS: difatti [DU, GS] sono le metà rispettivamente di DE, BG; ed essi avranno uguali rispettivamente i lati rimanenti ai lati rimanenti (I, 26). Perciò DT è uguale a TG, ed UT è uguale a TS.

Dunque, se in un cubo i lati di due facce opposte... (secondo l'enunciato). - C.D.D.

APPLICA: I, 4, 14, 15, 26, 29, 33; XI, 9.

È APPLICATA IN: XIII, 17.

PROPOSIZIONE 39 [19].

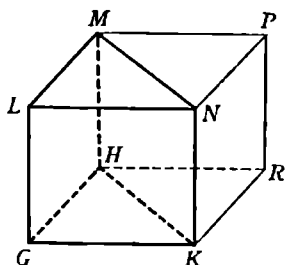
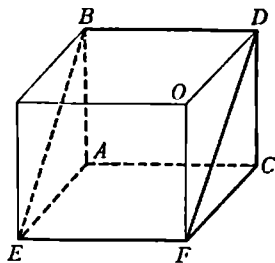
Se si dànno due prismi di uguale altezza, ed uno di essi ha per base un parallelogrammo, mentre l'altro ha un triangolo per base, e se inoltre il parallelogrammo è il doppio del triangolo, i prismi saranno uguali.

Siano $ABECDF$, $GHKLMN$ due prismi di uguale altezza, ed uno di essi abbia per base il parallelogrammo $AEFC$, l'altro abbia per base il triangolo GHK, ed inoltre il parallelogrammo $AECF$ sia il doppio del triangolo GHK; dico che il prisma $ABECDF$ è uguale al prisma $GHKLMN$.

Infatti, si completino i solidi AO, GP. Poiché il parallelogrammo AF è il doppio del triangolo GHK, ma anche il parallelogrammo $HGKR$ è il doppio del triangolo GHK (I, 34), si ha che il parallelogrammo $AEFC$ è uguale al parallelogrammo $HGKR$. Ma solidi parallelepipedi che stiano su basi uguali ed abbiano altezze uguali sono uguali fra loro

[19] Questa XI, 39, ultima proposizione del libro undicesimo, si riferisce ai prismi, ma in stretta relazione coi parallelepipedi, finora esclusivamente considerati.

(XI, 31), per cui il solido *AO* è uguale al solido *GP*. Ora, il prisma *ABECDF* è la metà del solido *AO*, come il prisma *GHKLMN* è la metà del solido *GP* (XI, 28); quindi il prisma *ABECDF* è uguale al prisma *GHKLMN*.

Dunque, se si danno due prismi... (secondo l'enunciato). - C.D.D.

APPLICA: I, 34; XI, 28, 31.

È APPLICATA IN: XII, 3, 4.

LIBRO DODICESIMO

I geometri. Particolare della *Scuola d'Atene* di Raffaello

(Roma, Palazzo Vaticano, Stanze di Raffaello).

PROPOSIZIONI

PROPOSIZIONE I.

Poligoni simili iscritti in cerchi stanno fra loro come i quadrati dei diametri [dei cerchi stessi] [1].

Siano i cerchi *ABC*, *FGH*, ed *ABCDE*, *FGHKL* siano poligoni simili in essi iscritti, mentre *BM*, *GN* siano i diametri dei cerchi stessi; dico che il poligono *ABCDE* sta al poligono *FGHKL* come il quadrato di *BM* sta al quadrato di *GN*.

Infatti, si traccino le congiungenti *BE*, *AM*, *GL*, *FN*. Ora, poiché il poligono *ABCDE* è simile al poligono *FGHKL*,

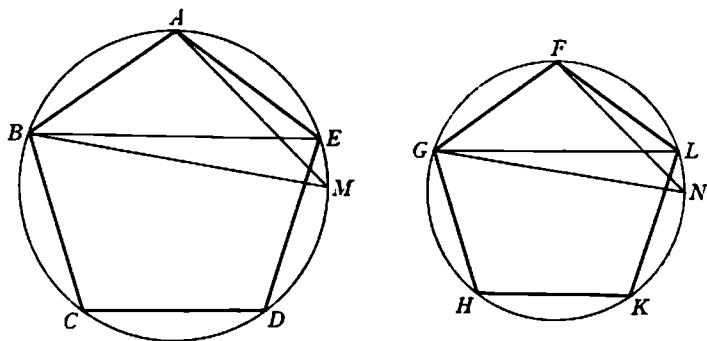
[1] Questa prima proposizione del libro dodicesimo costituisce materia che potrebbe senza difficoltà essere stata trattata nel libro sesto: riguarda infatti una proprietà dei poligoni simili. Come tale, la sua dimostrazione non presenta alcuna difficoltà, e si fonda, naturalmente, sulle proprietà dei poligoni simili esposte nel detto libro sesto. Va osservato che per questa proposizione, e per la seguente XII, 2, Euclide usa una nomenclatura diversa da quella del libro sesto: qui si parla senz'altro di poligoni, o cerchi, proporzionali *ai quadrati* dei diametri (πρός ἄλληλά ἐστιν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα); nel libro sesto, invece, si parla di poligoni simili che stanno tra loro *in ragione duplicata dei lati* (VI, 19 e VI, 20: ἐν διπλασίονι λόγῳ). Naturalmente la differenza è solo nella nomenclatura, perché la sostanza è la stessa. Se, infatti, applichiamo la VI, 20 a due particolari poligoni simili, si ottiene che il rapporto duplicato tra due segmenti non è altro che il rapporto tra i quadrati su di essi costruiti. Per i numeri, poi, il collegamento tra le due definizioni è dato nella VIII, 11.

Va anche osservato che nel corso delle dimostrazioni vengono, per dir così, mescolate le due nomenclature.

Per quanto riguarda, invece, figure in ragione triplicata di rette, Euclide si attiene anche nel libro dodicesimo alla nomenclatura: « in ragione triplicata » (ἐν τριπλασίονι λόγῳ). Così in XII, 8, 12, 17 coroll., 18.

Per esempio, quest'ultima proposizione viene enunciata così: « Le sfere stanno tra loro in rapporto triplicato dei propri diametri ».

si ha pure che l'angolo BAE è uguale all'angolo GFL, e che $AB : AE = GF : FL$ (VI, def. I). Si ha così che BAE, GFL sono due triangoli aventi rispettivamente uguali un angolo, cioè BAE uguale a GFL, e proporzionali i lati che comprendono gli angoli uguali, per cui il triangolo ABE ha i suoi tre angoli rispettivamente uguali a quelli del triangolo FGL (VI, 6). Quindi l'angolo AEB è uguale all'angolo FLG. Ma l'angolo AEB è uguale all'angolo AMB – insistono difatti sullo stesso arco di circonferenza (III, 27) –, e l'angolo FLG è uguale a quello FNG; sono perciò uguali anche gli angoli AMB, FNG. Ma pure l'angolo retto BAM è uguale all'angolo retto GFN (III, 31), per cui anche l'angolo che così rimane in un triangolo è uguale all'angolo rimanente dell'altro. Il triangolo ABM è quindi equiangolo rispetto al triangolo FGN. Perciò, si ha la proporzione: $BM : GN = BA : GF$ (VI, 4). Ma il rapporto tra il quadrato di BM e il quadrato di GN è duplicato rispetto al rapporto tra BM e GN, mentre il rapporto tra il poligono $ABCDE$ e il poligono $FGHKL$ è duplicato rispetto a quello tra BA e GF (VI, 20); quindi anche, il quadrato di BM sta al quadrato di GN come il poligono $ABCDE$ sta al poligono $FGHKL$.

Dunque, poligoni simili iscritti in cerchi... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

Applica: III, 27, 31; VI, 4, 6, 20.

È applicata in: XII, 2, 11.

PROPOSIZIONE 2.

I cerchi stanno fra loro come i quadrati dei diametri[2].

Siano i cerchi $ABCD$, $EFGH$, e BD, FH siano i loro diametri; dico che il cerchio $ABCD$ sta al cerchio $EFGH$ come il quadrato di BD sta al quadrato di FH.

[2] In questa proposizione XII, 2 entra in gioco l'infinito. Sotto un certo punto di vista (quello originario del calcolo infinitesimale) essa può essere riguardata come una estensione del teorema precedente X, 1 a poligoni di infiniti lati, ossia ai cerchi.

Proprio in questo senso si esprime Gerolamo Saccheri (1667-1733) nella sua celebre opera: *Euclides ab omni naevo vindicatus*, quando, per giustificare il procedimento dimostrativo euclideo della XII, 2 scrive: « Euclide ha già dimostrato (prop. 1) che due poligoni simili, inscritti in due cerchi, stanno tra loro come i quadrati dei diametri; proposizione da cui, come corollario, avrebbe potuto ricavare la 2 considerando i cerchi come poligoni infinitilateri » (trad. Boccardini, Milano, Hoepli, 1904, p. 104). Saccheri è evidentemente assai vicino, nel tempo, alla fondazione del calcolo infinitesimale!

Ma è proprio per evitare il ricorso all'infinito in questo modo che Eudosso di Cnido, il rigorizzatore della matematica greca, l'imbrigliatore dell'infinito, escogitò quel metodo che i posteri tardi dissero *metodo di esaustione*, e che viene qui per la prima volta applicato negli *Elementi* di Euclide. Cioè, come Euclide *recepì*, sia pure probabilmente in una sua personale rielaborazione, la definizione e la teoria delle proporzioni tra grandezze di Eudosso nel libro quinto, così qui *recepisce* il metodo di esaustione dello stesso Eudosso. Bisogna dire che la tradizione, che appunto a Eudosso attribuisce teoria delle proporzioni e metodo di esaustione, ha un fondamento ben saldo: si direbbe proprio che quella teoria e quel metodo portino come impressa su di sé la firma del medesimo autore!

In ambedue i casi si tratta, infatti, di rendere rigorosi procedimenti che involgono necessariamente l'uso dell'infinito: nel primo caso (teoria delle proporzioni) si tratta della determinazione del rapporto tra due grandezze incommensurabili (determinazione che, come mostrano le prime proposizioni del libro decimo degli *Elementi*, mette in gioco un processo infinito), nel secondo caso si tratta di dimostrare l'uguaglianza di superficie di due figure piane che non siano ambedue poligonali, o l'uguaglianza di volume di due figure solide che non siano ambedue prismi. Mentre, infatti, si può mettere in evidenza l'equivalenza di due poligoni, o di due prismi, mediante *l'equicomposizione*, cioè mediante la scomposizione delle figure da paragonare in un numero finito di parti finite a due a due uguali, ciò non è più possibile quando per le figure piane non si tratti più di due poligoni (ma ad esempio, di un poligono e di un cerchio, come nella XII, 2) o, per le figure solide, non si tratti più di due prismi (ma, ad esempio, di due piramidi, come in XII, 5). E in tutt'e due i casi viene evitato l'uso

Infatti, se il cerchio $ABCD$ non stesse al cerchio $EFGH$ come il quadrato di BD sta a quello di FH, starebbe in tal caso il quadrato di BD a quello di FH come il cerchio $ABCD$ ad un'area S che fosse minore o maggiore del cer-

diretto dell'infinito, ma non quello indiretto. L'infinito può cioè, essere *imbrigliato*, quasi *mascherato*, ma non può essere *eliminato*.

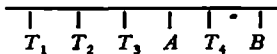
Così nella definizione di proporzione (V, def. V) l'infinito rientra indirettamente per il fatto che gli equimultipli di A, C e di B, D vanno scelti *in tutti i modi possibili*, ossia in infiniti modi (cfr. nota a detta definizione).

E come ora vedremo, anche nel metodo di esaustione l'infinito inevitabilmente rientra: soltanto c'è il fatto che, come per la teoria delle proporzioni tra grandezze, pure qui l'infinito stesso viene *trattato* entro schemi prefissati rigidamente, che ne evitano l'uso diretto e permettono di formulare teorie perfettamente rigorose.

In che consiste il metodo di esaustione? In linea generale possiamo esporlo nel seguente modo. Si debba dimostrare l'uguaglianza di superficie (o di volume che sia) di due figure A, B. Si giunge a stabilire detta uguaglianza dimostrando l'impossibilità, l'assurdità, di ciascuna delle due relazioni $A > B$, $A < B$.

Si ammette, cioè, che due grandezze siano uguali quando nessuna delle due superi l'altra.

Supponiamo allora che se possibile, sia $A < B$. E supponiamo di poter disporre di una successione T_1, T_2, T_3... di figure tutte omogenee con A e con B, e che siano tutte minori tanto di A quanto di B. Si tratta, cioè, di valori approssimati per difetto tanto di A quanto di B.

Quante devono essere le figure T_1, T_2, T_3...? La successione deve essere indefinitamente prolungabile: cioè (in linguaggio intuitivo) diremo che le figure T_1, T_2, T_3 devono essere in numero infinito. In senso potenziale: qualunque sia il numero di grandezze T che ci piaccia di considerare, ne devono esistere ancora di più. Ebbene: le figure T devono essere scelte non soltanto in modo da costituire valori approssimati per difetto tanto di A quanto di B, e non soltanto in modo che la successione delle T non abbia mai termine, cioè sia indefinitamente prolungabile, ma anche in modo che esse vadano approssimandosi sempre meglio, cioè si vadano avvicinando quanto a noi piaccia, a quella delle due grandezze che abbiamo supposto maggiore dell'altra (cioè, nel nostro caso, alla grandezza B).

Ora ciò porta a dimostrare l'impossibilità che sia $A < B$. Infatti se si suppone $A < B$, tra di loro vi sarà la differenza $B - A$. Sappiamo allora, in base alla terza richiesta da noi formulata nei riguardi delle T, che esisterà una T (ad esempio la chiameremo T_h) la quale si avvicinerà a B quanto vogliamo, ossia che differirà da B tanto poco quanto ci piaccia. Fissiamo appunto questo *poco* in modo che sia minore della supposta differenza $B - A$: ciò porta che quella tale grandezza T_h risulterà mag-

chio $EFGH$: cioè $q(BD) : q(FH) =$ cerchio $ABCD : S$. Si supponga dapprima che S sia minore del cerchio $EFGH$. Si iscriva ora nel cerchio $EFGH$ il quadrato $EFGH$ (IV, 6); il quadrato iscritto è così maggiore della metà del cerchio

giore di A. Ma ciò è appunto assurdo, poiché le T son tutte minori non soltanto di B ma anche di A.

Non può dunque essere $A < B$: in modo somigliante si dimostra che non può neppure essere $A > B$ e si conclude quindi che è $A = B$.

Si vede sùbito che c'è un inevitabile uso, sia pure indiretto, dell'infinito: infatti le figure T devono essere *inesauribili*: la loro successione deve poter essere continuata indefinitamente. Va avvertito che per semplicità abbiamo posto nel disegno $h = 4$.

Volendo stabilire un parallelo tra definizione di proporzione e metodo di esaustione, si potrà dire che in ambedue i casi, dovendosi identificare un elemento da dimostrare *unico* (ad esempio, un unico punto sulla retta) si ricorre, in modo simile a quanto si fa per il postulato della continuità, alla condizione di unicità di Dedekind per le proporzioni, e a quella di unicità di Giorgio Cantor per il metodo di esaustione. Questi due grandi matematici del secolo XIX hanno cioè ripercorso le strade che Eudosso aveva già escogitate, e che Euclide ci ha tramandate! Per maggiori particolari sul suddetto *parallelo*, si veda: A. FRAJESE, *Attraverso la storia della matematica* (*op. cit.*), pp. 253-254 (II ediz., Firenze, Le Monnier, 1969, pp. 272-273).

Ci resta ora da vedere come nella XII, 2 venga effettivamente applicato il metodo di esaustione.

Si deve dimostrare che:

$$C : C' = Q : Q'$$

dove C, C' sono due cerchi e Q, Q' i quadrati dei rispettivi diametri. Si dimostra allora che è:

$$Q : Q' = C : C'$$

e per giungere a ciò si comincia col considerare le tre prime grandezze Q, Q', C.

Si ammette poi che dopo tre grandezze (omogenee almeno le prime due) esista una grandezza quarta proporzionale. E si pone:

$$Q : Q' = C : S$$

Tutto sta quindi nel dimostrare che è $S = C'$. Ed appunto per dimostrare detta uguaglianza si applica il metodo di esaustione, facendo vedere che non può essere né $S < C'$, né $S > C'$.

Non può essere $S < C'$. Infatti si considerino i poligoni regolari iscritti nel cerchio C': si cominci dal quadrato P_1' e si proceda oltre raddoppiando sempre il numero dei lati: P'_2 sarà l'ottagono regolare, P'_3 il poligono di sedici lati, e così via.

Intanto il quadrato iscritto è maggiore della metà del cerchio C' (infatti è metà del quadrato circoscritto, che è maggiore di C'), ed ogni volta che si raddoppia il numero dei lati si sottrae dal cerchio più della

EFGH, dal momento che, se per i punti *E*, *F*, *G*, *H* conduciamo rette tangenti al cerchio, il quadrato *EFGH* è la metà del quadrato circoscritto al cerchio, mentre il cerchio

metà dell'insieme dei segmenti circolari residui. Per esempio, nel passaggio del quadrato all'ottagono, il segmento circolare *FKE*, compreso tra il lato *FE* del quadrato e la circonferenza, viene sostituito dalla somma dei due segmenti circolari compresi tra i lati *FK*, *KE* dell'ottagono e la circonferenza stessa. Si è tolto quindi, dai segmenti circolari residui del quadrato, il triangolo *FKE* (e così via per gli altri triangoli). Ma il triangolo *FKE* è maggiore della metà del segmento circolare corrispondente: infatti detto triangolo è uguale alla metà del rettangolo avente *FE* per base, e detto rettangolo è maggiore del segmento circolare.

Dunque ogni volta che, a partire dal quadrato, si va raddoppiando il numero dei lati dei poligoni regolari iscritti nel cerchio C', si toglie (da quel che resta) più della metà.

Si fa intervenire a questo punto la proposizione X, 1 (l'uso della quale è, per questa proposizione e per quelle seguenti dello stesso tipo, caratteristico del metodo di esaustione). Dice la X, 1 che se, date due grandezze disuguali, si toglie dalla maggiore (metà o) più della metà; da quel che resta si toglie ancora (metà o) più della metà e così di séguito, si giunge ad un certo punto ad una grandezza residua che è minore della grandezza minore data in principio. Questa proposizione (che applica, anzi in certo senso traduce) il cosiddetto postulato di Archimede (V, def. IV), viene nel caso della XII, 2 applicata alla grandezza (supposta maggiore) C': come grandezza minore si prende la differenza $C' - S$. Si giunge dunque, a un certo punto, ad un poligono P'_n tale che il residuo $C' - P'_n$ sia minore di $C' - S$.

Ma ciò significa che si ha $P'_n > S$. Dunque si è riusciti a trovare una grandezza P'_n (una delle grandezze *T*, per intenderci) che, approssimandosi a nostro piacere a C', supera *S*. Ma questo è assurdo, perché le grandezze P'_1, P'_2, P'_3... devono essere tutte minori tanto di C' quanto di *S*. Che siano minori di C' è evidente, dal momento che si tratta di poligoni iscritti proprio nel cerchio C'; ma possiamo facilmente dimostrare che le P'_1, P'_2, P'_3... sono anche necessariamente minori di *S*.

Infatti, se applichiamo il teorema precedente XII, 1 a due poligoni regolari P_n, P'_n regolari di ugual numero di lati (quindi simili) iscritti rispettivamente in ciascuno dei due cerchi *C*, C', abbiamo:

$$P_n : P'_n = Q : Q'.$$

Ma si è posto:

$$Q : Q' = C : S$$

quindi per la proprietà transitiva dell'uguaglianza di rapporti (V, 11) si ha:

$$P_n : P'_n = C : S$$

ovvero, *permutando*:

$$P_n : C = P'_n : S$$

Ma P_n è minore di *C*, dunque anche P'_n è minore di *S*. E ciò vale qualunque sia il numero dei lati, cioè *tutte* le grandezze P'_1, P'_2, P'_3...

è minore del quadrato circoscritto, cosicché il quadrato iscritto *EFGH* è maggiore della metà del cerchio *EFGH*. Si dividano per metà gli archi *EF*, *FG*, *GH*, *HE* nei punti

sono minori di S. È dunque assurdo che una delle P'_n sia maggiore di S, cioè si possa infiltrare tra S e C'. In modo somigliante si dimostra che non può neppure essere $S > C'$.

Infatti, mentre prima avevamo considerato la grandezza S quarta proporzionale dopo Q, Q', C consideriamo ora anche la grandezza R quarta proporzionale dopo Q', Q, C', ossia tale che si abbia:

$$Q' : Q = C' : R$$

Ma s'è prima supposto che sia $Q : Q' = C : S$ ossia, invertendo:

$$Q' : Q = S : C$$

Confrontando con la:

$$Q' : Q = C' : R$$

si ricava:

$$S : C = C' : R$$

e permutando:

$$S : C' = C : R$$

Ma s'è supposta che sia S maggiore di C', quindi risulta che C è maggiore di R. Dunque deve essere R minore di C. Possiamo allora a questo punto ripetere, nei riguardi di R e di C, la dimostrazione già prima eseguita per S e C'.

Risulta quindi dimostrato che, non potendo essere né $S < C'$, né $S > C'$ si ha $C' = S$ e quindi:

$$Q : Q' = C : C'$$

Questo impiego del metodo di esaustione della X, 2 che abbiamo riportato come esempio, si ripete secondo lo stesso schema in tutte le dimostrazioni del genere: si tratta di uno schema fisso, che ricorre, è vero, all'uso indiretto dell'infinito, ma è perfettamente rigoroso.

Si tratta di un metodo, per dir così, *standard*: esso serve in una fase di sistemazione logica, ma non in una fase di ricerca. In altri termini, esso non permette di trovare quale valore abbia, ad esempio, una certa superficie o un certo volume: una volta, però, che si abbia motivo di ritenere (eventualmente attraverso considerazioni intuitive non rigorose) che la superficie (o il volume) abbia un valore X, il metodo di esaustione permette di dimostrare rigorosamente che effettivamente X è il valore di quella superficie (o di quel volume).

Il metodo di esaustione non ha, cioè, valore *euristico*: un tal valore ha, invece, per esempio, il cosiddetto *Metodo meccanico* di Archimede, che permette in modo non rigoroso di giungere al risultato: lo stesso Archimede si serve poi anche lui del metodo di esaustione per dimostrare rigorosamente il risultato ottenuto col *metodo meccanico*.

Chiudiamo questa nota alla XII, 2 facendo osservare che in questa, come s'è visto, si ammette l'esistenza della quarta proporzionale dopo tre grandezze date (almeno le prime due delle quali siano omogenee). Si tratta

K, *L*, *M*, *N*, e si traccino le congiungenti *EK*, *KF*, *FL*, *LG*, *GM*, *MH*, *HN*, *NE*; di conseguenza, pure ciascuno dei triangoli *EKF*, *FLG*, *GMH*, *HNE* è maggiore della metà del segmento di cerchio che lo racchiude [a], dal momento che, se per i punti *K*, *L*, *M*, *N* conduciamo rette tangenti al cerchio e completiamo i parallelogrammi posti sulle corde *EF*, *FG*, *GH*, *HE*, si avrà che ciascuno dei triangoli *EKF*, *FLG*, *GMH*, *HNE* è la metà del parallelogrammo che lo racchiude, mentre il segmento di cerchio da cui è racchiuso è invece minore del parallelogrammo; cosicché ognuno dei triangoli *EKF*, *FLG*, *GMH*, *HNE* è maggiore della metà del segmento di cerchio che lo racchiude. Se veniamo allora a dividere per metà gli archi di circonferenza, tracciamo le corde corrispondenti, e continuiamo a far questo sempre di séguito [b], finiremo col determinare come residui certi segmenti del cerchio *EFGH* la cui somma sarà minore dell'eccedenza di cui il cerchio *EFGH* supera l'area *S*. Fu infatti dimostrato nel primo teorema del libro decimo che, se assumiamo due grandezze disuguali, si sottrae dalla maggiore una grandezza che sia maggiore della sua metà, dalla parte che così rimane si sottrae un'altra grandezza maggiore della sua metà, e se si procede sempre così di séguito,

a. Letteralmente: all'intorno d'esso (καθ' ἑαυτό), intorno al medesimo.
b. Letteralmente: facendo questo sempre.

di un'ammissione che risponde ad una intuizione di continuità, ma s'è visto che una intuizione di tal genere viene introdotta anche nella proposizione V, 18. È infatti la definizione quarta del libro quinto, corrispondente al cosiddetto postulato di Archimede (vedi nota a detta definizione), che possedendo (per dir così) una forte *carica* di continuità, costituisce una specie di *punto di svolta* nella trattazione euclidea.

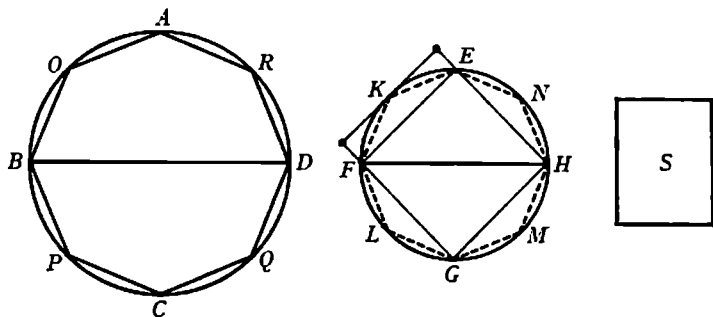
Nessuna meraviglia, quindi, se una questione esistenziale, quale quella concernente la quarta proporzionale, venga, dopo la definizione quarta del libro quinto, trattata mediante un'intuizione di continuità. E la teoria di Zeuthen, secondo la quale Euclide dimostra l'esistenza delle figure mediante la loro costruzione eseguita con rette e cerchi, si trova qui in fallo. Non sapremmo infatti, con i mezzi prescritti, costruire la quarta proporzionale dopo due quadrati e un cerchio (sappiamo invece costruirla dopo tre rette, come s'è veduto nel libro sesto, nella proposizione VI, 12).

finirà col restare una grandezza che sarà minore della minore delle due grandezze date (X, 1). Finisca dunque col risultare rimanente [una grandezza di tal genere], e supponiamo che sia appunto la somma dei segmenti del cerchio *EFGH* posti su *EK*, *KF*, *FL*, *LG*, *GM*, *MH*, *HN*, *NE* ad esser minore dell'eccedenza di cui il cerchio *EFGH* supera l'area *S*. Quindi il poligono iscritto *EKFLGMHN* è maggiore dell'area *S*. Si iscriva ora nel cerchio *ABCD* il poligono *AOBPCQDR* simile al poligono *EKFLGMHN*; il quadrato del diametro *BD* sta perciò al quadrato del diametro *FH* come il poligono *AOBPCQDR* sta al poligono *EKFLGMHN* (XII, 1). Ma si ha pure che $q(BD) : q(FH) =$ cerchio $ABCD : S$; quindi anche: cerchio $ABCD : S = AOBPCQDR : EKFLGMHN$, per cui si ha, *permutando* (V, 16): cerchio $ABCD : AOBPCQDR = S :$ $: EKFLGMHN$. Ma il cerchio *ABCD* è maggiore del poligono *AOBPCQDR* in esso iscritto; quindi, in tal caso, pure l'area *S* sarebbe maggiore del poligono *EKFLGMHN*. Ma essa è anche minore [come si è sopra veduto]: il che è impossibile. Dunque il quadrato di *BD* non può stare al quadrato di *FH* come il cerchio *ABCD* sta ad un'area *S* che sia minore del cerchio *EFGH*. Similmente potremo dimostrare come nemmeno possa darsi che il cerchio *EFGH* stia ad un'area minore del cerchio *ABCD* come il quadrato di *FH* sta al quadrato di *BD*.

Dico adesso che non può darsi neppure che sia: $q(BD) :$ $: q(FH) =$ cerchio $ABCD : S$ supponendo *S* maggiore del cerchio *EFGH*.

Invertendo nella proporzione sopra scritta (V, 7, coroll.), si ha: $q(FH) : q(BD) = S :$ cerchio *ABCD*. Ma l'area *S* sta al cerchio *ABCD* come il cerchio *EFGH* sta ad un'area che sia minore del cerchio *ABCD* (cfr. coroll. seguente); quindi anche, in tal caso, il quadrato di *FH* starebbe al quadrato di *BD* come il cerchio *EFGH* starebbe ad un'area minore del cerchio *ABCD*: il che fu dimostrato essere impossibile. Non può quindi darsi che il quadrato di *BD* stia al quadrato di *FH* come il cerchio *ABCD* starebbe ad un'area che fosse maggiore del cerchio *EFGH*. Ma fu dimostrato che ciò non può essere nemmeno con un'area che sia minore

del cerchio in questione, per cui il quadrato di *BD* sta al quadrato di *FH* come il cerchio *ABCD* sta al cerchio *EFGH*.

Dunque, i cerchi stanno fra loro... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: IV, 6; V, 7 coroll., 16; X, 1; XII, 1 e 2 lemma.
È APPLICATA IN: XII, 11.

LEMMA[a]

Dico ora che se l'area *S* è maggiore del cerchio *EFGH*, l'area *S* sta al cerchio *ABCD* come il cerchio *EFGH* sta ad un'area che sia minore del cerchio *ABCD*.

Infatti, si venga ad avere che l'area *S* stia al cerchio *ABCD* come il cerchio *EFGH* sta ad un'area *T*. Dico che l'area *T* è minore del cerchio *ABCD*. Poiché l'area *S* sta difatti al cerchio *ABCD* come il cerchio *EFGH* sta all'area *T*, si ha, ***permutando*** (V, 16), che l'area *S* sta al cerchio *EFGH* come il cerchio *ABCD* sta all'area *T*. Ma l'area *S* è maggiore del cerchio *EFGH*, per cui anche il cerchio *ABCD* è maggiore dell'area *T* (V, 14). Cosicché l'area *S* sta al cerchio *ABCD* come il cerchio *EFGH* sta ad un'area minore del cerchio *ABCD*. – C.D.D.

APPLICA: V, 14, 16.
È APPLICATO IN: XII, 2, 5, 11, 12, 18.

a. Dubitevole, secondo Heiberg, ne è la genuinità, come pure quella di alcuni passi nel corso della dimostrazione stessa (e difatti vi sono state interpolazioni avanti Teone).

PROPOSIZIONE 3.

Ogni piramide avente base triangolare si divide in due piramidi, uguali e simili fra loro e simili a tutta quanta la piramide iniziale, e aventi basi triangolari, ed in due prismi uguali; e la somma dei due prismi è maggiore della metà di tutta quanta la piramide.

Sia data una piramide, in cui sia base il triangolo *ABC* e vertice il punto *D*; dico che la piramide *ABCD* si divide in due piramidi uguali fra loro, aventi basi triangolari e simili alla piramide iniziale tutta quanta, ed in due prismi uguali; e che la somma dei due prismi è maggiore della metà di tutta quanta la piramide.

Infatti, si dividano *AB*, *BC*, *CA*, *AD*, *DB*, *DC* per metà nei punti *E*, *F*, *G*, *H*, *K*, *L*, e si traccino le congiungenti *HE*, *EG*, *GH*, *HK*, *KL*, *LH*, *KF*, *FG*, *EF*. Poiché *AE* è uguale ad *EB* ed *AH* è uguale ad *HD*, si ha che *EH* è parallela a *DB* (VI, 2). Per la stessa ragione, pure *HK* è parallela ad *AB*. Quindi *HEBK* è un parallelogrammo, e dunque *HK* è uguale ad *EB* (I, 34). Ma *EB* è uguale ad *EA*; quindi anche *AE*, *HK* sono uguali. Ma si ha pure che *AH* è uguale a *HD*; perciò nei due triangoli *AEH*, *HKD* i due lati *EA*, *AH* sono uguali rispettivamente ai due lati *KH*, *HD*; e l'angolo *EAH* è uguale all'angolo *KHD* (I, 29), per cui la base *EH* è uguale alla base *DK* e quindi il triangolo *AEH* è uguale e simile al triangolo *HKD* (I, 4). Per la stessa ragione, anche il triangolo *AHG* è uguale e simile al triangolo *HDL*. Ora, poiché le due rette *EH*, *HG*, che si incontrano fra loro, sono parallele alle due rette *KD*, *DL*, che [pure] si incontrano fra loro e non sono nel piano delle prime due, le une e le altre comprenderanno angoli uguali (XI, 10). L'angolo *EHG* è quindi uguale all'angolo *KDL*. Ma poiché i due lati *EH*, *HG* sono uguali rispettivamente ai due lati *KD*, *DL*, e l'angolo *EHG* è uguale all'angolo *KDL*, la base *EG* è uguale alla base *LK* (I, 4), per cui il

triangolo *EHG* è uguale e simile al triangolo *KDL*[3]. Per la stessa ragione, anche il triangolo *AEG* è uguale e simile al triangolo *HKL*. Quindi la piramide, di cui è base il triangolo *AEG* e vertice il punto *H*, è uguale e simile alla piramide di cui è base il triangolo *HKL* e vertice il punto *D* (XI, def. X). Ora, poiché nel triangolo *ADB* la retta *HK* è condotta parallela ad uno dei lati, cioè *AB*, i triangoli *ADB*, *DHK* hanno gli angoli rispettivamente uguali (I, 29), ed hanno quindi i lati proporzionali (VI, 4); il triangolo *ADB* è quindi simile al triangolo *DHK* (VI, def. I). Per la stessa ragione, pure il triangolo *DBC* è simile al triangolo *DKL*, e quello *ADC* è simile a quello *DLH*. Ma poiché le due rette *BA*, *AC*, che si incontrano fra loro, sono parallele alle due rette *KH*, *HL*, che pure si incontrano fra loro e non sono nello stesso piano delle prime due, le une e le altre comprenderanno angoli uguali (XI, 10). Quindi l'angolo *BAC* è uguale all'angolo *KHL*. Ma *AB* sta ad *AC* come *HK* sta a *HL*, per cui il triangolo *ABC* è simile al triangolo *HKL* (VI, 6). Perciò anche la piramide, di cui è base il triangolo *ABC* e vertice il punto *D*, è simile alla piramide di cui è base il triangolo *HKL* e vertice il punto *D* (XI, def. IX). Ma fu dimostrato che la piramide, di cui è base il triangolo *HKL* e vertice il punto *D*, è simile alla piramide di cui è base il triangolo *AEG* e vertice il punto *H* [cosicché pure la piramide, di cui è base il triangolo *ABC* e vertice il punto *D*, è simile alla piramide di cui è base il triangolo *AEG* e vertice il punto *H*][a]. Dunque, ciascuna delle due piramidi *AEGH*, *HKLD* è simile a tutta quanta la piramide *ABCD*.

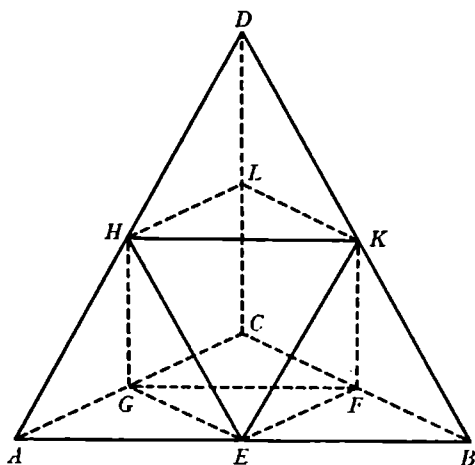
E poiché *BF* è uguale a *FC*, il parallelogrammo *EBFG* è il doppio del triangolo *GFC* (I, 41). Ma poiché, se si dànno due prismi di uguale altezza, ed uno di essi ha per base un

a. È omesso dal codice P.

[3] Degno di nota è il fatto che, riferendosi al cosiddetto primo criterio d'uguaglianza dei triangoli (I, 4), Euclide usi qui la nomenclatura «uguale e simile», parallelamente alla def. X del libro undicesimo.

parallelogrammo, mentre l'altro ha per base un triangolo, e se inoltre il parallelogrammo è il doppio del triangolo, i prismi sono uguali, si ha che il prisma compreso dai due triangoli *BKF*, *EHG*, e dai tre parallelogrammi *EBFG*, *EBKH*, *HKFG*, è uguale al prisma compreso dai due triangoli *GFC*, *HKL* e dai tre parallelogrammi *KFCL*, *LCGH*, *HKFG* (XI, 39). Ed è evidente che ciascuno dei due prismi: quello cioè in cui è base il parallelogrammo *EBFG* ed è opposta a questo la retta *HK*, e quello in cui è base il triangolo *GFC* ed è opposto a questo il triangolo *HKL*, è maggiore di ciascuna delle due piramidi di cui sono basi i triangoli *AEG*, *HKL* e vertici i punti *H*, *D*, dato che pure, se veniamo a tracciare le rette congiungenti *EF*, *EK*, il prisma in cui è base il parallelogrammo *EBFG*, ed è opposta a questo la retta *HK*, è maggiore della piramide di cui è base il triangolo *EBF* e vertice il punto *K*. Ma la piramide, di cui è base il triangolo *EBF* e vertice il punto *K*, è uguale alla piramide di cui è base il triangolo *AEG* e vertice il punto *H*: esse sono difatti comprese da facce uguali e simili. Cosicché anche il prisma in cui è base il parallelogrammo *EBFG*, ed è opposto a questo la retta *HK*, è maggiore della piramide di cui è base il triangolo *AEG* e vertice il punto *H*. Ma il prisma, in cui è base il parallelogrammo *EBFG* ed è opposta a questo la retta *HK*, è uguale al prisma in cui è base il triangolo *GFC* ed è opposto a questo il triangolo *HKL*, mentre la piramide, di cui è base il triangolo *AEG* e vertice il punto *H*, è uguale alla piramide di cui è base il triangolo *HKL* e vertice il punto *D*. Perciò la somma dei due prismi suddetti è maggiore della somma delle due piramidi indicate, di cui sono basi i triangoli *AEG*, *HKL* e vertici i punti *H*, *D*.

Dunque, la piramide tutta quanta, di cui è base il triangolo *ABC* e vertice il punto *D*, è stata divisa in due piramidi uguali fra loro[a] ed in due prismi uguali, e la somma

a. Il codice P omette pure, a questo punto: « e simile all'intiera ».

dei due prismi è maggiore della metà di tutta quanta la piramide iniziale. - C.D.D.

APPLICA: I, 4, 29, 34, 41; VI, 2, 4; XI, 10, 39.

È APPLICATA IN: XII, 4, 5.

PROPOSIZIONE 4.

Date due piramidi che abbiano uguale altezza[a] *e basi triangolari, e si divide ciascuna di esse in due piramidi uguali fra loro e simili a tutta quanta l'iniziale ed in due prismi uguali, si avrà che la base di una delle due piramidi iniziali sta alla base dell'altra piramide come la somma dei prismi della prima piramide sta a quella dei prismi, in ugual numero, dell'altra piramide.*

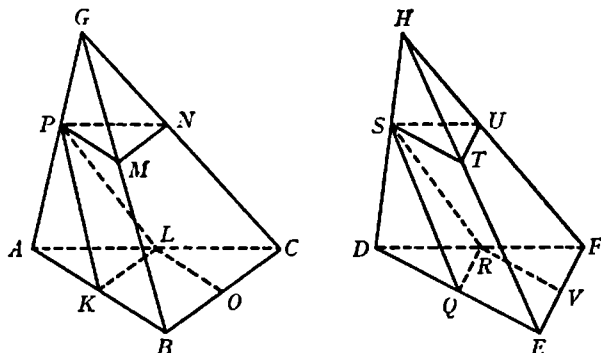
Siano date due piramidi di altezza uguale, che abbiano le basi *ABC*, *DEF* triangolari ed i punti *G*, *H* per vertici, e si divida ciascuna di esse in due piramidi uguali fra loro e simili a tutta quanta la piramide ed in due prismi uguali (XII, 3); dico che la base *ABC* sta alla base *DEF* come la somma dei prismi della piramide *ABCG* sta alla somma dei prismi, in ugual numero, della piramide *DEFH*.

Infatti, poiché *BO* è uguale ad *OC* ed *AL* è uguale ad *LC* (XII, 3), si ha che *LO* è parallela ad *AB* e che il triangolo *ABC* è simile al triangolo *LOC* (I, 29; VI, 4). Per la stessa ragione, pure il triangolo *DEF* è simile al triangolo *RVF*.

a. Letteralmente: Se vi sono due piramidi sotto la stessa altezza.

Ora, poiché *BC* è il doppio di *CO* ed *EF* è il doppio di *FV*, si ha che *BC* sta a *CO* come *EF* sta a *FV*. Ma su *BC*, *CO* risultano descritte le figure rettilinee *ABC*, *LOC*, simili fra loro e similmente poste, e su *EF*, *FV* le figure *DEF*, *RVF*, fra loro simili e similmente poste; quindi il triangolo *ABC* sta al triangolo *LOC* come il triangolo *DEF* sta al triangolo *RVF* (VI, 22), per cui si ha, *permutando*: $ABC : DEF = $ $= LOC : RVF$ (V, 16). Ma il triangolo *LOC* sta al triangolo *RVF* come il prisma, in cui è base il triangolo *LOC* ed è opposto a questo il triangolo *PMN*, sta al prisma in cui è base il triangolo *RVF* ed è opposto a questo il triangolo *STU* (cfr. coroll. seguente); quindi anche, il triangolo *ABC* sta al triangolo *DEF* come il prisma, in cui è base il triangolo *LOC* ed è opposto a questo il triangolo *PMN*, sta al prisma in cui è base il triangolo *RVF* ed è opposto a questo il triangolo *STU*. Ma i prismi indicati stanno fra loro come il prisma, di cui è base il parallelogrammo *KBOL* ed opposta ad esso la retta *PM*, sta al prisma di cui è base il parallelogrammo *QEVR* ed opposta ad esso la retta *ST* (XI, 39; cfr. XII, 3). Sta quindi pure in tale rapporto la somma dei due prismi, quello in cui è base il parallelogrammo *KBOL* ed è opposta a questo la retta *PM*, e quello in cui è base il triangolo *LOC* ed è opposto a questo il triangolo *PMN*, con la somma dei secondi due prismi, l'uno in cui è base il parallelogrammo *QEVR* ed è opposto a questo la retta *ST*, e l'altro in cui è base il triangolo *RVF* ed è opposto a questo il triangolo *STU* (V, 12). Dunque anche, la base *ABC* sta alla base *DEF* come la somma dei primi due prismi indicati sta a quella dei suddetti altri due prismi.

E similmente, se si dividono le piramidi *PMNG*, *STUH* in due prismi ed in due piramidi [ciascuna], si avrà che la base *PMN* sta alla base *STU* come la somma dei due prismi della piramide *PMNG* sta alla somma dei due prismi della piramide *STUH*. Ma la base *PMN* sta alla base *STU* come la base *ABC* sta alla base *DEF*: ciascuno dei due triangoli *PMN*, *STU* è difatti uguale rispettivamente ad uno dei due triangoli *LOC*, *RVF*. Quindi anche, la base *ABC* sta alla base *DEF* come la somma dei quattro prismi [della

prima piramide iniziale] sta alla somma dei quattro prismi [della seconda]. Ed allo stesso modo, se pure dividiamo le piramidi che rimangono in due piramidi ed in due prismi ciascuna, si avrà che la base *ABC* sta alla base *DEF* come la somma di tutti i prismi della piramide *ABCG* sta a quella di tutti i prismi, complessivamente uguali per numero, della piramide *DEFH* [a]. – C.D.D. [b].

Applica: I, 29; V, 12, 16; VI, 4; XI, 39; XII, 3.

È applicata in: XII, 5.

Lemma [c]

Che poi il triangolo *LOC* stia al triangolo *RVF* come il prisma, in cui è base il triangolo *LOC* ed è opposto a questo il triangolo *PMN*, sta al prisma in cui è base il triangolo *RVF* ed è opposto a questo il triangolo *STU*, va dimostrato nel modo seguente.

Infatti, si prendano in considerazione, nella stessa figura di cui sopra, delle perpendicolari ai piani *ABC*, *DEF* che si conducano dai punti *G*, *H*, e che, evidentemente, sono

a. Euclide aggiunge alla fine della proposizione *tutti* (πάντα) e *complessivamente uguali per numero* (ἰσοπληθῆ), dato che da « E similmente... » in poi veniva a fornirla in certo modo di un corollario.

b. Prova alternativa in Heiberg, IV, App. I, pp. 356-358.

c. Anche questo è sospetto, a parere di Heiberg, per sé stesso e per la forma discorsiva che adotta.

fra loro uguali, dato che per ipotesi le piramidi sono di uguale altezza. Ora, poiché due rette, cioè GC e la perpendicolare dal punto G, sono tagliate dai piani paralleli ABC, PMN, esse verranno tagliate secondo gli stessi rapporti (XI, 17). Ma GC risulta divisa nel punto N per metà dal piano PMN; quindi anche la perpendicolare condotta da G al piano ABC sarà divisa per metà dal piano PMN. Per la stessa ragione, si avrà pure che la perpendicolare condotta al piano DEF da H sarà divisa per metà dal piano STU. Ora, le perpendicolari condotte da G, H ai piani ABC, DEF sono uguali fra loro, per cui sono uguali anche le perpendicolari condotte ai piani ABC, DEF a partire dai triangoli PMN, STU. Sono quindi di altezza uguale i prismi di cui sono basi i triangoli LOC, RVF ed opposti ad essi i triangoli PMN, STU. Cosicché pure solidi parallelepipedi, che vengano descritti a partire da detti prismi come fu detto, sono di uguale altezza e stanno fra loro come le basi (XI, 32); dunque anche le loro metà (XI, 28), vale a dire i prismi suddetti, stanno fra loro come la base LOC sta alla base RVF. – C.D.D.

APPLICA: XI, 17, 28.

PROPOSIZIONE 5.

Piramidi che abbiano altezze uguali e basi triangolari stanno fra loro come le basi.

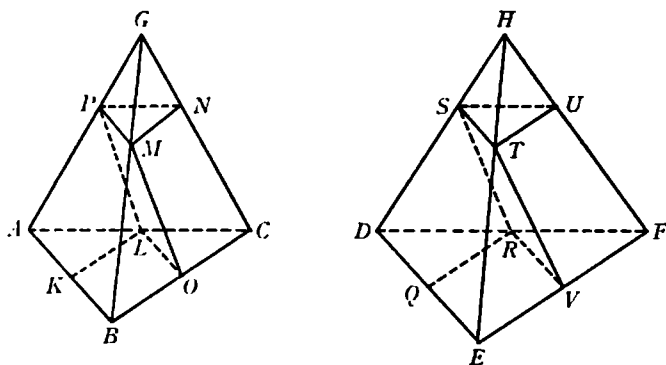
Siano date piramidi di uguale altezza, in cui siano basi i triangoli ABC, DEF e vertici i punti G, H; dico che la base ABC sta alla base DEF come la piramide $ABCG$ sta alla piramide $DEFH$.

Infatti, se si potesse avere che la base ABC non stesse alla base DEF come la piramide $ABCG$ sta alla piramide $DEFH$, si avrebbe che la base ABC starebbe in tal caso alla base DEF come la piramide $ABCG$ ad un solido che fosse minore della piramide $DEFH$, o ad uno che fosse maggiore [di essa]. Dapprima, la piramide $ABCG$ stia al solido W, minore di $DEFH$, cioè si abbia: $ABC : DEF = ABCG : W$ (con $W < DEFH$). Si divida la piramide

DEFH in due piramidi uguali fra loro, e simili alla piramide tutta quanta, ed in due prismi uguali; la somma dei due prismi è allora maggiore della metà di tutta quanta la piramide (XII, 3). Di nuovo, si dividano similmente le piramidi che la [prima] divisione ha determinato, e si continui a far ciò[a] fino a che della piramide *DEFH* restino piramidi la cui somma sia minore dell'eccedenza per cui la piramide *DEFH* supera il solido *W* (X, 1). Tali piramidi restanti siano, a titolo di esempio, *DQRS*, *STUH*; quindi $DQRS + STUH < DEFH - W$, quindi la somma dei prismi della piramide *DEFH*, che così restano cioè $DEFH - (DQRS + STUH)$, è maggiore del solido *W*. Si divida anche la piramide *ABCG* allo stesso modo della piramide *DEFH*, ed un ugual numero di volte; si ha perciò che la base *ABC* sta alla base *DEF* come la somma dei prismi della piramide *ABCG* sta alla somma dei prismi della piramide *DEFH* (XII, 4). Ma si ha pure che la base *ABC* sta alla base *DEF* come la piramide *ABCG* sta al solido *W*; quindi anche, la piramide *ABCG* sta al solido *W* come la somma dei prismi della piramide *ABCG* sta alla somma dei prismi della piramide *DEFH*, per cui, *permutando* (V, 16), la piramide *ABCG* sta alla somma dei prismi in essa contenuti come il solido *W* sta a quella dei prismi della piramide *DEFH*. Ma la piramide *ABCG* è maggiore della somma dei prismi in essa contenuti; quindi, pure il solido *W* sarebbe maggiore della somma dei prismi della piramide *DEFH* (V, 14). Ma esso è anche minore di tale somma [come si è sopra veduto]: il che è impossibile. Dunque non può darsi che la base *ABC* stia alla base *DEF* come la piramide *ABCG* sta ad un solido che sia minore della piramide *DEFH*. Similmente si potrà dimostrare come non possa darsi neppure che la base *DEF* stia alla base *ABC* come la piramide *DEFH* sta ad un solido che sia minore della piramide *ABCG*.

Dico adesso che non può nemmeno darsi che la base *ABC* stia alla base *DEF* come la piramide *ABCG* sta ad un solido che sia maggiore della piramide *DEFH*.

a. Letteralmente: ed avvenga, si dia, sempre questo.

Infatti, se possibile, [la piramide $ABCG$] stia al solido W, maggiore di $DEFH$, cioè si abbia: $ABC : DEF = ABCG : W$ (con $W > DEFH$), quindi si avrebbe, *invertendo*, che $DEF : ABC = W : ABCG$ (V, 7, coroll.). Ma il solido W sta alla piramide $ABCG$ come la piramide $DEFH$ sta ad un solido minore della piramide $ABCG$, come fu prima dimostrato (XII, 2, coroll.); quindi anche, la base DEF sta in tal caso alla base ABC come la piramide $DEFH$ sta ad un solido minore della piramide $ABCG$: il che fu dimostrato assurdo. Perciò non può darsi che la base ABC stia alla base DEF come la piramide $ABCG$ sta ad un solido maggiore della piramide $DEFH$. Ma fu dimostrato che [la piramide $ABCG$] non può avere tale rapporto neppure con un solido minore [della piramide $DEFH$]. Dunque, la base ABC sta alla base DEF come la piramide $ABCG$ sta alla piramide $DEFH$. - C.D.D.

APPLICA: V, 7 coroll., 14, 16; X, 1; XII, 2 coroll., 3, 4.

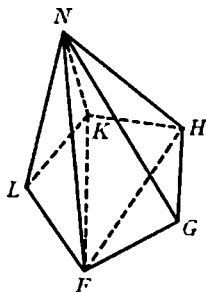
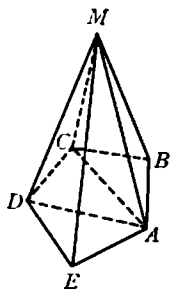
È APPLICATA IN: XII, 6, 7.

PROPOSIZIONE 6.

Piramidi che abbiano altezze uguali e basi poligonali stanno fra loro come le basi.

Siano date piramidi di uguale altezza, in cui siano basi i poligoni $ABCDE$, $FGHKL$ e vertici i punti M, N; dico

che la base *ABCDE* sta alla base *FGHKL* come la piramide *ABCDEM* sta alla piramide *FGHKLN*.

Infatti, si traccino le congiungenti *AC*, *AD*, *FH*, *FK*. Poiché *ABCM*, *ACDM* sono dunque due piramidi aventi basi triangolari ed uguale altezza, esse stanno fra loro come le basi (XII, 5); quindi la base *ABC* sta alla base *ACD* come la piramide *ABCM* sta alla piramide *ACDM*. *Componendo*, si ha che la base *ABCD* sta alla base *ACD* come la piramide *ABCDM* sta alla piramide *ACDM* (V, 18). Ma si ha pure che la base *ACD* sta alla base *ADE* come la piramide *ACDM* sta alla piramide *ADEM* (XII, 5). Perciò, *ex aequo*, la base *ABCD* sta alla base *ADE* come la piramide *ABCDM* sta alla piramide *ADEM* (V, 22). E di nuovo *componendo*, si ha che la base *ABCDE* sta alla base *ADE* come la piramide *ABCDEM* sta alla piramide *ADEM*. Similmente si potrà dimostrare come si abbia pure che la base *FGHKL* sta alla base *FGH* come la piramide *FGHKLN* sta alla piramide *FGHN*. Ora, poiché *ADEM*, *FGHN* sono due piramidi aventi basi triangolari ed altezza uguale, la base *ADE* sta alla base *FGH* come la piramide *ADEM* sta alla piramide *FGHN* (XII, 5). Ma la base *ADE* sta alla base *ABCDE* come la piramide *ADEM* stava alla piramide *ABCDEM*. Quindi, *ex aequo*, si ha pure che la base *ABCDE* sta alla base *FGH* come la piramide *ABCDEM* sta alla piramide *FGHN* (V, 22). Ma anche, tuttavia, la base *FGH* sta alla base *FGHKL* come la piramide *FGHN* sta alla piramide *FGHKLN*. Dunque, si ha pure *ex aequo* che la base *ABCDE* sta alla base *FGHKL* come la piramide *ABCDEM* sta alla piramide *FGHKLN*. – C.D.D.

APPLICA: V, 18, 22; XII, 5.

È APPLICATA IN: XII, 11.

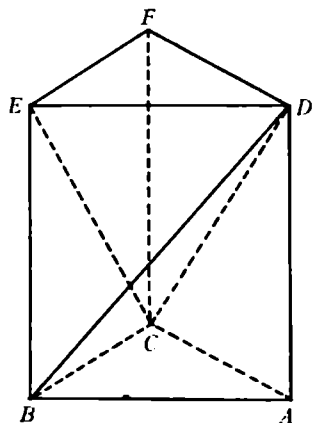
PROPOSIZIONE 7.

Ogni prisma che abbia base triangolare si divide in tre piramidi uguali fra loro ed aventi basi triangolari.

Sia dato un prisma, in cui sia base il triangolo *ABC*, mentre opposto a questo è il triangolo *DEF*; dico che il prisma *ABCDEF* si divide in tre piramidi uguali fra loro ed aventi basi triangolari.

Infatti, si traccino le congiungenti *BD*, *EC*, *CD*. Poiché *ABED* è un parallelogrammo e *BD* è la sua diagonale, il triangolo *ABD* è uguale al triangolo *EBD* (I, 34); perciò anche la piramide, di cui è base il triangolo *ABD* e vertice il punto *C*, è uguale alla piramide di cui è base il triangolo *DEB* e vertice il punto *C* (XII, 5). Ma la piramide, di cui è base il triangolo *DEB* e vertice il punto *C*, è la stessa piramide di cui è base il triangolo *EBC* e vertice il punto *D*: è compresa difatti dalle stesse facce. Pure la piramide, di cui è base il triangolo *ABD* e vertice il punto *C*, è uguale quindi alla piramide di cui è base il triangolo *EBC* e vertice il punto *D*. Di nuovo, poiché *FCBE* è un parallelogrammo, e *CE* è la sua diagonale, il triangolo *CEF* è uguale al triangolo *CBE* (I, 34). Perciò anche la piramide, di cui è base il triangolo *BCE* e vertice il punto *D*, è uguale alla piramide di cui è base il triangolo *ECF* e vertice il punto *D*. Ma fu dimostrato che la piramide, di cui è base il triangolo *BCE* e vertice il punto *D*, è uguale alla piramide di cui è base il triangolo *ABD* e vertice il punto *C*; quindi pure la piramide, di cui è base il triangolo *CEF* e vertice il punto *D*, è uguale alla piramide di cui è base il triangolo *ABD* e vertice il punto *C*; dunque, il prisma *ABCDEF* è stato diviso in tre piramidi uguali fra loro ed aventi basi triangolari.

E poiché la piramide, di cui è base il triangolo *ABD* e vertice il punto *C*, è la stessa piramide di cui è base il triangolo *CAB* e vertice il punto *D* – sono difatti comprese dalle stesse facce –, ma fu d'altra parte dimostrato che la piramide, di cui è base il triangolo *ABD* e vertice il punto *C*,

è la terza parte del prisma di cui è base il triangolo *ABC* ed opposto ad esso il triangolo *DEF*, si ha che pure la piramide, di cui è base il triangolo *ABC* e vertice il punto *D*, è la terza parte del prisma che ha la stessa base, cioè il triangolo *ABC*, e come faccia opposto ad esso il triangolo *DEF*.

APPLICA: I, 34; XII, 5.
È APPLICATA IN: XII, 8.

COROLLARIO

È da ciò evidente che ogni piramide è la terza parte di un prisma che abbia la stessa base della piramide ed altezza uguale [a]. – C.D.D. [4]

a. Vi sarebbe qui una interposizione: « dato che, se anche la base del prisma viene ad assumere una qualch'altra figura retti-

[4] Si tratta del risultato fondamentale riguardante il volume della piramide: questo è la terza parte del volume del prisma avente la stessa base e uguale altezza. Il risultato verrà poi esteso al cono, rispetto al cilindro.

Secondo la preziosa notizia trasmessaci da Archimede nella prefazione alla sua opera *Sul metodo*, si tratta di un risultato che Democrito enunciò per primo, *senza dimostrazione*, mentre Eudosso per primo lo *dimostrò*. Evidentemente Archimede intendeva alludere ad una *dimostrazione rigorosa*: secondo ogni probabilità essa fu fondata sul metodo di esaustione (cfr. nota alla XII, 2) che ad Eudosso stesso viene attribuito.

Va ricordato, a questo proposito, che i problemi di *uguaglianza* di piramidi non possono essere ricondotti *al finito*, cioè alla equicomposizione (come per i prismi), ma che per stabilire che due piramidi sono *uguali* (cioè hanno uguale volume) è necessario ricorrere a considerazioni di carattere infinitesimale. Assai probabilmente ad esse fece ricorso, per giungere al risultato, Democrito: e ciò in modo spregiudicatamente non rigoroso.

Secondo una suggestiva ipotesi dell'Enriques (cfr. sua edizione dell'Euclide, vol. IV, pp. 182-183), Democrito non avrebbe fatto ricorso alla

linea, e ciò vale pure per la base opposta, esso è divisibile in prismi aventi dei triangoli come basi, e triangolari quelle opposte, e tutta quanta la base è proporzionale a ciascuno ». Si tratta di parole da considerarsi senza dubbio, con Heiberg, aggiunte e che – per di più – nei codici teonini mancano di ogni senso, si

scomposizione del prisma in tre piramidi uguali (come si vede nella XII, 7 degli *Elementi* di Euclide), ma avrebbe utilizzato il procedimento costruttivo che troviamo nella XII, 3 degli *Elementi* (scomposizione della piramide nella somma di due piramidi simili alla data ed in due prismi triangolari), mettendo in opera, attraverso la reiterazione della costruzione, un processo infinito e giungendo alla soluzione calcolando « *la somma di una progressione geometrica, la cui nozione può riattaccarsi agli argomenti di Zenone di Elea* ».

Comunque si pensi in proposito, Euclide ci offre nella XII, 7 una dimostrazione, che diremmo *visiva*, della scomposizione di un prisma a base triangolare in tre piramidi uguali tra loro. Vediamo infatti che il prisma $ABCDEF$ è composto:

1) dalla piramide di base ABC e vertice D, ossia dalla piramide avente per base la base inferiore del prisma ed avente per vertice un vertice della base superiore del prisma stesso;

2) dalla piramide di base EBC e vertice D;

3) dalla piramide di base CEF e vertice D.

Che le due ultime piramidi siano *uguali* tra loro si vede facilmente: hanno infatti la stessa altezza (dato che hanno in comune il vertice D, ed hanno in comune il piano delle basi, piano che costituisce la faccia laterale $BCFE$ del prisma), ed hanno basi uguali perché la diagonale EC divide il parallelogrammo $BCFE$ in due triangoli uguali EBC, CEF.

Che poi la prima piramide sia *uguale* alla seconda (e sian quindi *uguali* tutt'e tre le piramidi) viene da Euclide dimostrato considerando ambedue le piramidi come aventi vertice in C: la prima avrà allora come base il triangolo ABD, e la seconda avrà per base il triangolo DEB: le due altezze risultano così uguali, ed uguali anche le basi (poiché la diagonale BD divide il parallelogrammo $ADEB$ in due triangoli uguali).

Come si vede, la dimostrazione si fonda sul riconoscimento dell'equivalenza di piramidi aventi basi uguali e altezze uguali. Questo teorema viene dimostrato nella XII, 5 sotto forma più generale: piramidi P, P' aventi altezze uguali stanno tra loro come le basi B, B' (sicché se le basi sono *uguali* le piramidi sono *uguali*). Ed è per dimostrare la XII, 5 (cosa che non può fare *al finito*) che Euclide impiega il metodo di esaustione, già applicato nella XII, 2 (cfr. ivi).

Si tratta di dimostrare che vale la proporzione:

$$P : P' = B : B'$$

ossia quella:

$$B : B' = P : P'$$

Anche questa volta, come nella XII, 2, si ammette che dopo le tre grandezze B, B', P esista una quarta proporzionale W:

$$B : B' = P : W$$

leggono con abbastanza scorrevolezza nel codice P, ma mancano, pure in questo, di ciò che doveva essere una dimostrazione, e di essa le parole « e tutta quanta la base è proporzionale, sta, a ciascuno » sono ad evidenza l'inizio; ora, ciò conferma in pieno, oltre che la non completezza, la dubbia autenticità della frase, poiché non è per nulla proprio di corollari arrecare dimostrazioni.

sicché si tratta di far vedere che è $W = P'$. Qui interviene appunto il metodo di esaustione, secondo il quale verrà mostrato che W non è né minore né maggiore di P'. Sia, ad esempio, se possibile, W minore di P'. Si esegue a questo punto su P' la costruzione indicata nella XII, 3: costruzione che, congiungendo in vario modo i punti medi degli spigoli della piramide, permette di dividere quest'ultima in due piramidi uguali tra loro (e simili alla piramide totale) e in due prismi uguali. E nella XII, 3 si è anche mostrato che la somma dei due prismi è maggiore della metà della piramide totale.

Si mette dunque in opera un procedimento che dalla piramide P' toglie più della metà: sulle due piramidi residue si replica la costruzione, sicché anche dalla loro somma si toglie più della metà, e così via. Si giunge in tal modo ad una somma di piramidi residue minore di qualunque grandezza prefissata, e si ferma il procedimento quando detta somma sia divenuta minore di una supposta differenza D tra W e P' (essendo cioè $D = P' - W$). Ciò significa che corrispondentemente la somma dei prismi si è andata sempre più avvicinando a P', giungendo a differirne per meno di D. Detta somma di prismi avrebbe dunque, a tal punto, superato W. Ma ciò è impossibile: infatti si è supposto che sia:

$$B : B' = P : W$$

e d'altra parte nella XII, 4 Euclide ha dimostrato che, eseguendo le costruzioni vedute su due piramidi P, P' di uguale altezza, e fermando le costruzioni stesse in corrispondenza (in modo, cioè, da avere prismi in ugual numero), si ha:

$$B : B' = S : S'$$

cioè le due basi B, B' di P, P' stanno tra loro come le somme S, S' dei prismi (in ugual numero). Se ne ricava:

$$S : S' = P : W$$

da cui, permutando:

$$S : P = S' : W.$$

Ma S è minore di P (la somma di un certo numero di prismi è infatti sempre minore della piramide totale), quindi S' risulta minore di W. Dunque è assurdo che la somma S' dei prismi di P' superi W, come invece era stato prima trovato. Non può dunque essere, come s'era supposto, W minore di P'. Similmente si vede che non può essere neppure maggiore, e che è quindi:

$$W = P'.$$

Pertanto vale la proporzione:

$$P : P' = B : B'$$

PROPOSIZIONE 8.

Piramidi fra loro simili e che abbiano basi triangolari stanno fra loro in rapporto triplicato rispetto a quello dei lati omologhi [5].

Siano date le piramidi, simili fra loro e similmente poste, di cui siano basi i triangoli ABC, DEF e vertici i punti G, H; dico che la piramide $ABCG$ ha con la piramide $DEFH$ rapporto triplicato rispetto a quello che il lato BC ha col lato EF.

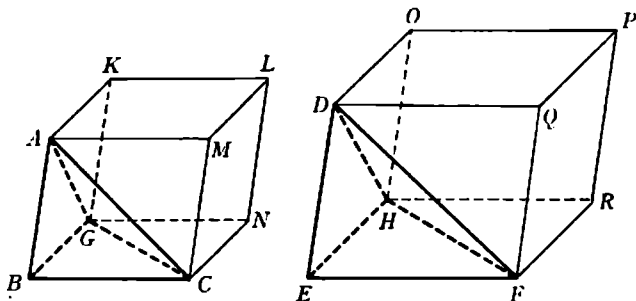
Infatti, si completino i solidi parallelepipedi $BGML$, $EHQP$. Ora, poiché la piramide $ABCG$ è simile alla piramide $DEFH$, si ha che l'angolo ABC è uguale all'angolo DEF, l'angolo GBC è uguale a quello HEF, e quello ABG è uguale a quello DEH, e che $AB : DE = BC : EF = BG : EH$ (XI, def. IX). Ma poiché AB sta a DE come BC sta ad EF e sono [così] proporzionali lati che comprendono angoli uguali, il parallelogrammo $BCMA$ è simile al parallelogrammo $EFQD$. Per la stessa ragione, anche $BCNG$ è simile ad $EFRH$ e $BGKA$ è simile ad $EHOD$, per cui i tre parallelogrammi $BCMA$, $BCNG$, $BGKA$ sono simili ai tre parallelogrammi $EFQD$, $EFRH$, $EHOD$. Ma i tre parallelogrammi $BCMA$, $BCNG$, $BGKA$ sono uguali e simili ai tre che sono loro opposti (XI, 24), e sono uguali ai tre che sono loro opposti i tre parallelogrammi $EFQD$, $EFRH$, $EHOD$. Quindi i solidi

e se le basi sono *uguali*, sono *uguali* anche le piramidi (supposte di uguale altezza).

In sostanza, dovendosi dimostrare che è $P' = W$ si costruisce una successione di figure (somme successive di prismi) che approssimano per difetto tanto P' quanto W. Senonché, supposto che, se possibile, sia W minore di P', le somme di prismi vengono ad approssimare tanto bene P' da differirne, ad un certo punto, per meno di $D = P' - W$, quindi *si infiltrano* tra W e P', ossia diventano maggiori di W. Ma ciò è assurdo, poiché le somme S' di prismi sono valori approssimati per difetto non solo di P' ma anche di W. Lo schema della dimostrazione (per esaustione) è dunque lo stesso usato per la XII, 2.

Va infine osservato che tutte le enunciazioni e dimostrazioni vengono da Euclide riferite a piramidi aventi base triangolare: è soltanto nella XII, 6 che si ha una estensione a piramidi a base poligonale qualunque.

[5] Cioè: stanno tra loro come i cubi dei lati omologhi. Per il concetto di rapporto triplicato (o ragione triplicata) cfr. la nota alla XI, 33.

BGML, *EHQP* sono compresi da facce simili, uguali in numero. Il solido *BGML* è perciò simile al solido *EHQP* (XI, def. IX). Ma solidi parallelepipedi simili stanno fra loro in rapporto triplicato rispetto a quello dei lati omologhi (XI, 33). Quindi il solido *BGML* ha col solido *EHQP* rapporto triplicato rispetto a quello che il lato omologo *BC* ha col lato omologo *EF*. Ma il solido *BGML* sta al solido *EHQP* come la piramide *ABCG* sta alla piramide *DEFH*, dato che la piramide [*ABCG*] è la sesta parte del solido [*BGML*], poiché il prisma che è la metà del solido parallelepipedo (XI, 28) è triplo della piramide relativa (XII, 7). Dunque, anche la piramide *ABCG* ha con la piramide *DEFH* rapporto triplicato rispetto a quello che *BC* ha con *EF*.

APPLICA: XI, 24, 28, 33; XII, 7.

È APPLICATA IN: XII, 9, 12.

COROLLARIO [a]

È da ciò evidente che pure piramidi simili, le quali abbiano basi poligonali, stanno fra loro in rapporto triplicato rispetto a quello dei lati omologhi. Infatti, una volta che si dividano le piramidi in questione nelle piramidi di base triangolare contenute nelle prime, dividendo appunto anche

a. Poiché il corollario non è usato dove ci si aspetterebbe di vederlo usato (XII, 12), v'è una qualche ragione di dubitare della sua genuinità (cfr. HEATH, *op. cit.*, vol. III, p. 397).

i poligoni simili delle basi in triangoli simili, uguali fra loro per numero ed omologhi agli intieri poligoni iniziali (VI, 20), si avrà che una qualunque delle piramidi aventi basi triangolari e contenute nella prima piramide considerata sta ad una qualunque delle piramidi aventi basi triangolari e contenute nella seconda[a] come anche la somma delle piramidi aventi basi triangolari e che sono contenute nella prima piramide sta alla somma delle piramidi aventi basi triangolari e che sono contenute nella seconda (V, 12), vale a dire come la stessa prima piramide avente base poligonale sta all'altra piramide avente base poligonale. Ma una piramide che abbia base triangolare sta ad un'altra piramide avente base triangolare in rapporto triplicato rispetto a quello dei lati omologhi (XII, 8); quindi anche, una piramide che abbia base poligonale ha con altra piramide avente una base simile rapporto triplicato rispetto a quello che un lato della prima ha col lato omologo della seconda.

APPLICA: V, 12; VI, 20; XII, 8.

PROPOSIZIONE 9.

In piramidi uguali, che abbiano basi triangolari, le basi sono inversamente proporzionali alle altezze; e le piramidi aventi basi triangolari, e le cui basi siano inversamente proporzionali alle altezze, sono uguali.

Infatti, siano date [due] piramidi uguali, aventi triangolari le basi *ABC*, *DEF*, e come vertici i punti *G*, *H*; dico che le basi delle piramidi *ABCG*, *DEFH* sono inversamente proporzionali alle altezze, e si ha che la base *ABC* sta alla base *DEF* come l'altezza della piramide *DEFH* sta all'altezza della piramide *ABCG*.

Si completino difatti i solidi parallelepipedi *BGML*, *EHQP*. Ora, poiché la piramide *ABCG* è uguale alla pira-

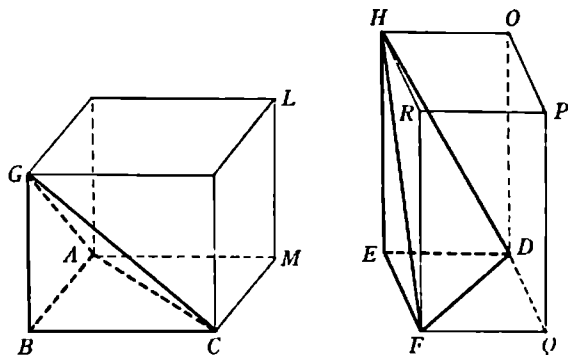
a. Letteralmente: si avrà che l'una piramide [contenuta] nell'una delle due sta all'una piramide [contenuta] nell'altra delle due...

mide *DEFH*, ed il solido *BGML* è il sestuplo della piramide *ABCG*, mentre il solido *EHQP* è il sestuplo della piramide *DEFH*, si ha che il solido *BGML* è uguale al solido *EHQP*. Ma in solidi parallelepipedi uguali le basi sono inversamente proporzionali alle altezze (XI, 34); quindi la base *ABCM* sta alla base *EFQD* come l'altezza del solido *EHQP* sta all'altezza del solido *BGML*. Ma la base *ABCM* sta alla base *EFQD* come il triangolo *ABC* sta al triangolo *DEF* (I, 34). Quindi anche, il triangolo *ABC* sta al triangolo *DEF* come l'altezza del solido *EHQP* sta all'altezza del solido *BGML*. Ma l'altezza del solido *EHQP* è uguale all'altezza della piramide *DEFH*, mentre l'altezza del solido *BGML* è uguale a quella della piramide *ABCG*, per cui la base *ABC* sta alla base *DEF* come l'altezza della piramide *DEFH* sta all'altezza della piramide *ABCG*. Dunque, nelle piramidi *ABCG*, *DEFH* le basi sono inversamente proporzionali alle altezze.

Ma sia adesso il caso in cui, nelle piramidi *ABCG*, *DEFH*, le basi siano inversamente proporzionali alle altezze, e si abbia che la base *ABC* sta alla base *DEF* come l'altezza della piramide *DEFH* sta all'altezza della piramide *ABCG*; dico che la piramide *ABCG* è uguale alla piramide *DEFH*.

Infatti, eseguita la medesima costruzione di prima, poiché la base *ABC* sta alla base *DEF* come l'altezza della piramide *DEFH* sta all'altezza della piramide *ABCG*, ma la base *ABC* sta alla base *DEF* come il parallelogrammo *ABCM* sta al parallelogrammo *EFQD* (I, 34), si ha pure che il parallelogrammo *ABCM* sta al parallelogrammo *EFQD* come l'altezza della piramide *DEFH* sta all'altezza della piramide *ABCG*. Ma l'altezza della piramide *DEFH* è uguale all'altezza del parallelepipedo *EHQP*, mentre l'altezza della piramide *ABCG* è uguale a quella del parallelepipedo *BGML*; la base *BM* sta perciò alla base *EQ* come l'altezza del parallelepipedo *EHQP* sta all'altezza del parallelepipedo *BGML*. Ma sono uguali i solidi parallelepipedi le cui basi siano inversamente proporzionali alle altezze; quindi il solido parallelepipedo *BGML* è uguale al solido parallelepipedo *EHQP*. Ora, la piramide *ABCG* è la sesta parte del parallelepipedo

BGML, mentre la piramide *DEFH* è la sesta parte del parallelepipedo *DEFH* (XII, 8); perciò la piramide *ABCG* è uguale alla piramide *DEFH*.

Dunque, in piramidi uguali, che abbiano basi triangolari... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 34; XI, 34; XII, 8.

PROPOSIZIONE 10.

Ogni cono è la terza parte del cilindro che abbia la sua stessa base ed uguale altezza[6].

Infatti, abbia un cono la stessa base di un cilindro, cioè il cerchio *ABCD*, ed altezza uguale; dico che il cono è la terza parte del cilindro, vale a dire che il cilindro è il triplo del cono.

[6] In questa proposizione fondamentale, che dà il volume del cono (terza parte di quello del cilindro avente uguale base ed uguale altezza) viene applicato, in certo senso, due volte il metodo di esaustione. Con detto metodo si dimostra, infatti, che un cilindro è uguale al triplo del cono di ugual base ed uguale altezza. Supposto che il cilindro sia maggiore del triplo del cono, le figure *approssimanti per difetto* sono prismi iscritti nel cilindro, dei quali si va sempre raddoppiando il numero dei lati della base. Che questi prismi sian tutti valori approssimati per difetto del cilindro è evidente, trattandosi di prismi iscritti. Ma per dimostrare che tali prismi son valori approssimati per difetto anche del triplo del cono è necessario applicare il teorema precedente, sul prisma triplo della piramide (XII, 7). E poiché detto teorema è stato pure dimostrato col

Se difatti il cilindro non fosse il triplo del cono, in tal caso si avrebbe che il cilindro sarebbe maggiore o minore del triplo del cono. Dapprima, sia maggiore, e nel cerchio *ABCD* si iscriva il quadrato *ABCD* (IV, 6); il quadrato *ABCD* è così maggiore della metà del cerchio *ABCD* (cfr. XII, 2, inizio). Si costruisca ora sul quadrato *ABCD* un prisma d'altezza uguale al cilindro. Il prisma così costruito è maggiore in tal modo della metà del cilindro, dato che se circoscriviamo un quadrato al cerchio *ABCD* (IV, 7), il quadrato iscritto nel cerchio *ABCD* è la metà di quello circoscritto, ed i solidi che su essi vengano costruiti sono prismi paral-

metodo di esaustione, ecco che detto metodo, in certo senso, viene applicato due volte in questa proposizione XII, 10.

Lo schema della dimostrazione della XII, 10 è il seguente.

Si vuol dimostrare che il cilindro è uguale al triplo di quel tal cono:

$$Ci = 3\ Co$$

Si suppone allora che non si abbia l'uguaglianza, ma che (per esempio) sia il cilindro maggiore del triplo del cono, e si pone uguale a D la differenza:

$$Ci - 3\ Co = D$$

I prismi che si vanno iscrivendo nel cilindro son tutti minori di esso:

$$Pri < Ci$$

ma l'approssimano, ad un certo punto, così bene da differirne per meno di D:

$$Ci - Pri < D$$

ossia:

$$Ci - Pri < Ci - 3\ Co$$

Ciò significa che quel prisma è maggiore del triplo del cono. Perché si veda che ciò è assurdo, occorre mostrare che è invece necessariamente:

$$Pri < 3\ Co.$$

Ed è per questo che interviene il teorema XII, 7: il prisma è triplo della piramide avente ugual base ed uguale altezza:

$$Pri = 3\ Pir$$

Ma la piramide (risultando iscritta) è certamente minore del cono:

$$Pir < Co$$

quindi:

$$3\ Pir < 3\ Co$$

ossia:

$$Pri < 3\ Co$$

Risulta così saldato l'ultimo anello che mancava alla catena dimostrativa per essere perfetta.

lelepipedi[a] di uguale altezza. Ma solidi parallelepipedi che abbiano altezze uguali stanno fra loro come le basi (XI, 32); si ha anche, perciò, che il prisma costruito sul quadrato *ABCD* è la metà del prisma costruito sul quadrato circoscritto al cerchio *ABCD*; ora, il cilindro [che consideriamo] è minore del prisma che sia costruito sul quadrato circoscritto al cerchio *ABCD*, per cui il prisma, costruito sul quadrato *ABCD* con altezza uguale a quella del cilindro, è maggiore della metà del cilindro. Si dividano gli archi di circonferenza *AB*, *BC*, *CD*, *DA* per metà nei punti *E*, *F*, *G*, *H*, e si traccino le congiungenti *AE*, *EB*, *BF*, *FC*, *CG*, *GD*, *DH*, *HA*; pure ciascuno dei triangoli *AEB*, *BFC*, *CGD*, *DHA* è quindi maggiore della metà del segmento del cerchio *ABCD* che lo racchiude, come dimostrammo sopra (XII, 2). Su ognuno dei triangoli *AEB*, *BFC*, *CGD*, *DHA* si costruiscano prismi di altezza uguale a quella del cilindro: quindi anche ciascuno dei prismi così costruiti è maggiore della metà del segmento di cilindro da cui è racchiuso, dato che se per i punti *E*, *F*, *G*, *H* conduciamo rette parallele ad *AB*, *BC*, *CD*, *DA*, completiamo i parallelogrammi aventi per basi *AB*, *BC*, *CD*, *DA*, e su essi costruiamo solidi parallelepipedi di altezza uguale a quella del cilindro, i prismi, disposti sui triangoli *AEB*, *BFC*, *CGD*, *DHA*, sono la metà di ciascuno dei solidi [precedentemente] costruiti; ora, la somma dei segmenti del cilindro è minore di quella dei solidi parallelepipedi che abbiamo costruito, cosicché anche la somma dei prismi disposti sui triangoli *AEB*, *BFC*, *CGD*, *DHA* è maggiore della metà della somma dei segmenti di cilindro che li racchiudono. Se dividiamo così per metà gli archi di circonferenza rimasti indivisi, tracciamo le relative corde, su ciascuno dei triangoli [ottenuti] costruiamo prismi di altezza uguale a quella del cilindro, e continuiamo a far questo sempre di séguito, finiremo con l'avere come residuo certi segmenti del cilindro, la cui somma sarà minore del-

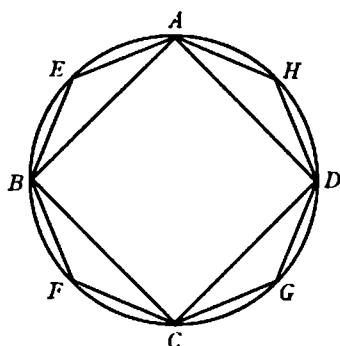
a. Parallelepipedi è aggettivo, come d'ordinario, ma appartiene a *prismi*, non a *solidi*, come invece di solito è usato.

l'eccedenza di cui il cilindro supera il triplo del cono (X, 1). Risulti ciò fatto tracciando le corde *AE*, *EB*, *BF*, *FC*, *CG*, *GD*, *DH*, *HA*; quindi il prisma, di cui è base il poligono *AEBFCGDH* e che ha altezza uguale a quella del cilindro, [differirà del cilindro meno del triplo del cono, e quindi] sarà maggiore del triplo del cono. Ma il prisma, di cui è base il poligono *AEBFCGDH* e che ha altezza uguale a quella del cilindro, è il triplo della piramide di cui è base il poligono *AEBFCGDH* e che ha per vertice lo stesso vertice del cono (XII, 7, coroll.) [a]; perciò anche la piramide, di cui è base il poligono *AEBFCGDH* e che ha per vertice lo stesso vertice del cono, sarebbe in tal caso maggiore del cono, che ha come base il cerchio *ABCD*. Ma è pure minore – difatti è compresa da esso: il che è impossibile. Dunque, il cilindro non può essere maggiore del triplo del cono.

Dico adesso che non può neppur darsi che il cilindro sia minore del triplo del cono.

Infatti, se possibile, sia il cilindro minore del triplo del cono; si ha quindi, inversamente, che il cono sarebbe maggiore della terza parte del cilindro. Si iscriva allora nel cerchio *ABCD* il quadrato *ABCD* (IV, 6); il quadrato *ABCD* è allora maggiore della metà del cerchio *ABCD* (cfr. XII, 2, inizio). E sul quadrato *ABCD* si costruisca una piramide che abbia lo stesso vertice del cono; la piramide così costruita è quindi maggiore della metà del cono, dato che, come sopra dimostrammo, se circoscriviamo al cerchio un quadrato (IV, 7), il quadrato *ABCD* sarà metà del quadrato circoscritto al cerchio, e se costruiremo sui quadrati dei solidi parallelepipedi di altezza uguale a quella del cono, i quali solidi sono pure chiamati prismi, il solido costruito sul quadrato *ABCD* sarà la metà di quello costruito sul quadrato circoscritto al cerchio: essi stanno difatti tra loro come le basi (XI, 32). Cosicché anche le loro terze parti avranno tale relazione, per cui pure la piramide, di cui è base il quadrato *ABCD*, sarà la metà della piramide costruita sul

a. Letteralmente: e vertice quello stesso del cono.

quadrato circoscritto al cerchio medesimo (XII, 7, coroll.). Ma la piramide costruita sul quadrato circoscritto al cerchio è maggiore del cono – difatti lo comprende. Quindi la piramide, di cui è base il quadrato *ABCD* e che ha per vertice lo stesso vertice del cono, è maggiore della metà del cono. Si dividano gli archi di circonferenza *AB*, *BC*, *CD*, *DA* per metà nei punti *E*, *F*, *G*, *H*, e si traccino le congiungenti *AE*, *EB*, *BF*, *FC*, *CG*, *GD*, *DH*, *HA*; perciò anche ciascuno dei triangoli *AEB*, *BFC*, *CGD*, *DHA* è maggiore della metà del segmento del cerchio *ABCD* da cui è racchiuso (XII, 2, inizio). E su ciascuno dei triangoli *AEB*, *BFC*, *CGD*, *DHA* si costruiscano piramidi aventi lo stesso vertice del cono: quindi pure ognuna delle piramidi così costruite è maggiore della metà del segmento di cono che la racchiude. Se dividiamo allora per metà gli archi di circonferenza rimasti indivisi, tracciamo le relative corde, su ciascuno dei triangoli ottenuti costruiamo una piramide che abbia lo stesso vertice del cono, e continuiamo a far questo sempre di séguito, finiremo con l'avere come residui certi segmenti del cono, la cui somma sarà minore dell'eccedenza di cui il cono supera la terza parte del cilindro (X, 1). Risulti ciò fatto tracciando le corde *AE*, *EB*, *BF*, *FC*, *CG*, *GD*, *DH*, *HA*; quindi la piramide di cui è base il poligono *AEBFCGDH* e che ha per vertice lo stesso vertice del cono, e che resta [tolti i segmenti], è maggiore della terza parte del cilindro. Ma la piramide, di cui è base il poligono *AEBFCGDH* e che ha per vertice lo stesso del cono, è la terza parte del prisma di cui è base il poligono *AEBFCGDH* ed altezza la stessa del cilindro, sicché il prisma, di cui è base il poligono *AEBFCGDH* e che ha per altezza la stessa del cilindro, sarebbe in tal caso maggiore del cilindro di cui è base il cerchio *ABCD*. Ma è pure minore di esso – difatti è da esso compreso: il che è impossibile. Quindi non può darsi che il cilindro sia minore del triplo del cono. Ma fu dimostrato che non è neppure maggiore del triplo del cono: il cilindro è perciò tre volte il cono, cosicché il cono è la terza parte del cilindro.

Dunque, ogni cono è la terza parte... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: IV, 6, 7; X, 1; XI, 32.
È APPLICATA IN: XII, 11, 12, 14.

PROPOSIZIONE 11.

Coni e cilindri che abbiano altezze uguali stanno fra loro come le basi.

Siano dati due coni e due cilindri che abbiano altezze uguali, e dei quali siano i cerchi $ABCD$, $EFGH$ le basi, siano KL, MN gli assi, ed AC, EG i diametri delle basi; dico che il cerchio $ABCD$ sta al cerchio $EFGH$ come il cono AL sta al cono EN.

Infatti, se così non fosse, il cerchio $ABCD$ starebbe al cerchio $EFGH$ come il cono AL starebbe ad un solido O minore del cono EN, oppure maggiore. Dapprima, supponiamo il solido O sia minore del cono EN, e che un altro solido X sia uguale alla differenza tra il cono EN e il solido O [ossia $X = EN - O$]: quindi il cono EN è uguale alla somma dei solidi O, X, cioè $EN = O + X$. Si iscriva nel cerchio $EFGH$ il quadrato $EFGH$ (IV, 6): detto quadrato è maggiore della metà del cerchio (XII, 2, inizio). Sul quadrato $EFGH$ si costruisca una piramide di altezza uguale a quella del cono EN; la piramide così costruita è quindi maggiore della metà del cono, dato che, se circoscriviamo al cerchio un quadrato (IV, 7), e costruiamo su di esso una piramide di altezza uguale a quella del cono, la piramide iscritta è la metà di quella circoscritta – stanno difatti tra loro come le basi (XII, 6) –, mentre il cono è minore della piramide circoscritta. Si dividano gli archi di circonferenza EH, FE,

GF, *HG* per metà nei punti *P*, *Q*, *R*, *S*, e si traccino le congiungenti *HP*, *PE*, *EQ*, *QF*, *FR*, *RG*, *GS*, *SH*. Perciò ciascuno dei triangoli *HPE*, *EQF*, *FRG*, *GSH* è maggiore della metà del segmento di cerchio che lo racchiude (XII, 2). Si costruisca su ciascuno dei triangoli *HPE*, *EQF*, *FRG*, *GSH* una piramide di altezza uguale a quella del cono, sicché ciascuna delle piramidi così costruite è maggiore della metà del segmento di cono da cui è racchiusa (cfr. XII, 10). Se dividiamo allora per metà gli archi di circonferenza rimasti indivisi, tracciamo le relative corde, su ciascuno dei triangoli così ottenuti costruiamo una piramide di altezza uguale a quella del cono, e continuiamo a far questo sempre di séguito, finiremo con l'ottenere certi segmenti residui del cono, la cui somma sarà minore del solido *X* (X, 1). Supponiamo che ciò si verifichi per i segmenti di cono posti su *HPE*, *EQF*, *FRG*, *GSH*; quindi la piramide, di cui è base il poligono *HPEQFRGS* e l'altezza della quale è la stessa del cono, e che rimane tolti i segmenti, è maggiore del solido *O* [segmenti cono $< W$ ossia $< EN - O$, quindi $EN -$ segmenti cono $> O$]. Si iscriva anche, nel cerchio *ABCD*, il poligono *DTAUBVCW*, che sia simile e similmente posto rispetto al poligono *HPEQFRGS* (VI, 18), e su esso si costruisca una piramide di altezza uguale a quella del cono *AL*. Poiché si ha dunque che il quadrato di *AC* sta al quadrato di *EG* come il poligono *DTAUBVCW* sta al poligono *HPEQFRGS* (XII, 1), ma il quadrato di *AC* sta al quadrato di *EG* come il cerchio *ABCD* sta al cerchio *EFGH* (XII, 2), si ha pure che il cerchio *ABCD* sta al cerchio *EFGH* come il poligono *DTAUBVCW* sta al poligono *HPEQFRGS*. Ma si è supposto che il cerchio *ABCD* sta al cerchio *EFGH* come il cono *AL* sta al solido *O*, mentre il poligono *DTAUBVCW* sta al poligono *HPEQFRGS* come la piramide, di cui è base il poligono *DTAUBVCW* e vertice il punto *L*, sta alla piramide di cui è base il poligono *HPEQFRGS* e vertice il punto *N* (XII, 6). Quindi anche, il cono *AL* sta al solido *O* come la piramide, di cui è base il poligono *DTAUBVCW* e vertice il punto *L*, sta alla piramide di cui è base il poligono *HPEQFRGS* e vertice il punto *N* (V, 11);

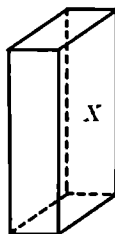
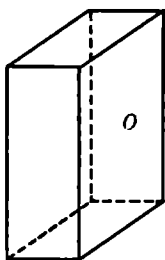
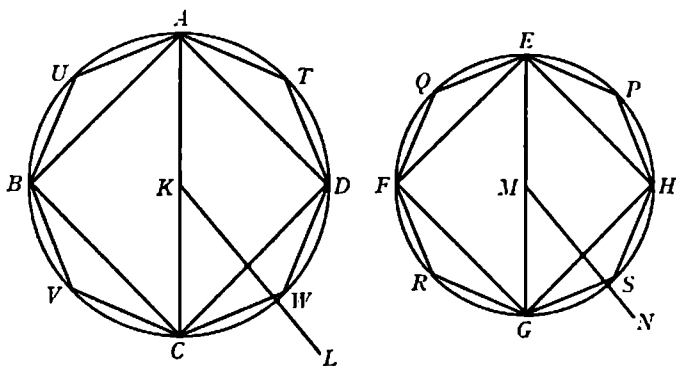
perciò si ha, *permutando*, che il cono *AL* sta alla piramide in esso contenuta come il solido *O* sta alla piramide contenuta nel cono *EN* (V, 16). Ma il cono *AL* è maggiore della piramide contenuta in esso, per cui anche il solido *O* sarebbe in tal caso maggiore della piramide contenuta nel cono *EN* (V, 14). Ma s'è supposto che fosse minore della piramide in questione: ciò è dunque assurdo. Non può quindi darsi che il cerchio *AL* stia al cerchio *EFGH* come il cono *AL* sta ad un solido che sia minore del cono *EN*. Similmente potremo dimostrare che non può neppur darsi che il cerchio *EFGH* stia al cerchio *ABCD* come il cono *EN* sta ad un solido minore del cono *AL*.

Dico adesso che non può darsi nemmeno che il cerchio *ABCD* stia al cerchio *EFGH* come il cono *AL* sta ad un solido *O* il quale sia maggiore del cono *EN*.

Infatti, *invertendo*, il cerchio *EFGH* starebbe in tal caso al cerchio *ABCD* come il solido *O* sta al cono *AL* (V, 7, coroll.) ossia: $EFGH : ABCD = O : AL$. Ma il solido *O* sta al cono *AL* come il cono *EN* sta ad un solido minore del cono *AL* (XII, 2, coroll.), per cui si avrebbe anche che il cerchio *EFGH* starebbe al cerchio *ABCD* come il cono *EN* sta ad un solido minore del cono *AL*: il che fu dimostrato impossibile nella prima parte di questa dimostrazione. Quindi non può darsi che il cerchio *ABCD* stia al cerchio *EFGH* come il cono *AL* sta ad un solido maggiore del cono *EN*. Ma fu dimostrato che non sta in proporzione neppure con un solido che sia minore di *EN*; perciò il cerchio *ABCD* sta al cerchio *EFGH* come il cono *AL* sta al cono *EN*.

Ma un cono sta all'altro cono come un cilindro sta all'altro cilindro [avente la stessa base e uguale altezza]: ciascuno dei due cilindri, difatti, è il triplo del cono rispettivo (XII, 10). Quindi anche, il cerchio *ABCD* sta al cerchio *EFGH* come stanno fra loro i cilindri su di essi costruiti con altezza uguale [a].

a. È ritrovabile un τοῖς κώνοις, ai coni, ma è, per Heiberg, un'antica glossa; difatti non si tratta qui di cilindri che debbano

Dunque, coni e cilindri che abbiano altezze uguali... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: IV, 6, 7; V, 11, 14, 16; VI, 18; XII, 1, 2, 2 coroll., 10.
È APPLICATA IN: XII, 13, 14, 15.

PROPOSIZIONE 12.

Coni e cilindri simili stanno fra loro in rapporto triplicato rispetto a quello dei diametri delle basi.

Siano dati [due] coni simili e [due] cilindri simili, le cui basi siano i cerchi *ABCD*, *EFGH*, siano *BD*, *FH* i diametri

avere la stessa altezza dei coni, ma, come dimostrato, di cilindri che essendo ἰσουψεῖς, di altezza uguale, hanno fra loro lo stesso rapporto delle basi.

delle basi, e *KL*, *MN* gli assi (dei coni e dei cilindri in questione); dico che il cono, di cui è base il cerchio *ABCD* e vertice il punto *L*, ha col cono, di cui è base il cerchio *EFGH* e vertice il punto *N*, rapporto triplicato rispetto a quello che *BD* ha con *FH*.

Infatti, se il cono *ABCDL* non avesse col cono *EFGHN* rapporto triplicato rispetto a quello che *BD* ha con *FH*, in tal caso il cono *ABCDL* avrebbe rapporto triplicato con un solido minore del cono *EFGHN*, o con uno maggiore. Dapprima, abbia tale rapporto[a] col solido *O*, minore di *EFGHN*, e si iscriva nel cerchio *EFGH* il quadrato *EFGH* (IV, 6); perciò il quadrato *EFGH* è maggiore della metà del cerchio *EFGH* (cfr. XII, 2, inizio). E sul quadrato *EFGH* si costruisca una piramide che abbia lo stesso vertice del cono [*EFGHN*]; la piramide così costruita è quindi maggiore della metà del cono. Si dividano ora gli archi di circonferenza *EF*, *FG*, *GH*, *HE* per metà nei punti *P*, *Q*, *R*, *S*, e si traccino le congiungenti *EP*, *PF*, *FQ*, *QG*, *GR*, *RH*, *HS*, *SE*. Di conseguenza, pure ciascuno dei triangoli *EPF*, *FQG*, *GRH*, *HSE* è maggiore della metà del segmento del cerchio *EFGH* che lo racchiude (cfr. XII, 2, inizio). Ora, su ognuno dei triangoli *EPF*, *FQG*, *GRH*, *HSE* si costruisca una piramide che abbia lo stesso vertice del cono [*EFGHN*]; anche ciascuna delle piramidi così costruite è quindi maggiore della metà del segmento di cono da cui è racchiusa (cfr. XII, 10). Se dividiamo allora per metà gli archi di circonferenza rimasti indivisi, tracciamo le relative corde, su ciascuno dei triangoli così ottenuti costruiamo una piramide avente lo stesso vertice del cono, e continuiamo a far questo sempre di séguito, finiremo con l'ottenere certi segmenti residui del cono, la cui somma sarà minore della differenza tra il cono *EFGHN* e il solido *O*, ossia: somma segmenti cono $<$ $< EFGHN - O$ (X, 1). Tali segmenti risultino quelli posti sulle corde *EP*, *PF*, *FQ*, *QG*, *GR*, *RH*, *HS*, *SE*; perciò la piramide, di cui è base il poligono *EPFQGRHS* e vertice

a. Letteralmente: Dapprima, lo sia... (cioè, in ragione triplicata).

il punto *N*, e che rimane dopo aver tolto i segmenti residui del cono, è maggiore del solido *O*. (*EFGHN* — somma segmenti cono $> O$). Si iscriva anche, nel cerchio *ABCD*, il poligono *ATBUCVDW*, simile e similmente posto rispetto al poligono *EPFQGRHS* (VI, 18), sul poligono *ATBUCVDW* si costruisca una piramide avente lo stesso vertice del cono *ABCDL*. Il triangolo *LBT* sia una delle facce laterali della piramide di cui è base il poligono *ATBUCVDW* e vertice il punto *L*, mentre sia il triangolo *NFP* una delle facce laterali della piramide di cui è base il poligono *EPFQGRHS* e vertice il punto *N*, e si traccino le congiungenti *KT*, *MP*. Ora, poiché il cono *ABCDL* è simile per ipotesi al cono *EFGHN*, si ha che *BD* sta a *FH* come l'asse *KL* sta all'asse *MN* (XI, def. XXIV). Ma *BD* sta a *FH* come *BK* sta a *FM*; quindi anche: $BK : FM = KL : MN$. E si ha, *permutando*: $BK : KL = FM : MN$ (V, 16). Ma sono così proporzionali i lati che comprendono gli angoli uguali *BKL*, *FMN*, quindi il triangolo *BKL* è simile al triangolo *FMN* (VI, 6). Di nuovo, poiché *BK* sta a *KT* come *FM* sta a *MP* [essendo le quattro rette uguali tra loro], comprendendo inoltre gli angoli uguali *BKT*, *FMP*, dato che l'angolo *BKT* è quella stessa parte dei quattro angoli retti (aventi il vertice nel centro *K*) che pure l'angolo *FMP* è dei quattro angoli retti (aventi il vertice nel centro *M*), – poiché dunque sono proporzionali lati comprendenti angoli uguali[a], si ha che il triangolo *BKT* è simile al triangolo *FMP* (VI, 6). Di nuovo, poiché fu dimostrato che $BK : KL = FM : MN$, ma *BK* è uguale a *KT* e *FM* è uguale a *PM*, si ha: $KT : KL = PM : NM$. Ma sono così proporzionali lati che comprendono angoli uguali, cioè *TKL*, *PMN* – essi difatti sono retti –, quindi il triangolo *LKT* è simile al triangolo *NMP* (VI, 6). E poiché, per la similitudine dei triangoli *LKB*,

a. Letteralmente: difatti i poligoni sono simili ed i loro lati sono uguali di numero. Ma le parole da *dato che* sino a *comprendenti angoli uguali* sono per Heiberg da espungere; non ve ne è bisogno, infatti, mentre rappresentano invece un anacoluto in realtà, ed hanno forma discorsiva non solita.

NMF, si ha: $LB : BK = NF : FM$ e per la similitudine dei triangoli *BKT*, *FMP* si ha che $BK : BT = FM : FP$ (VI, def. I), *ex aequo* si ha: $LB : BT = NF : FP$ (V, 22). Di nuovo, poiché si ha, per la similitudine dei triangoli *LTK*, *NPM*, che $LT : TK = NP : PM$, e, per la similitudine dei triangoli *TKB*, *PMF*, che $TK : BT = PM : FP$, si ha, *ex aequo*: $LT : BT = NP : FP$ (V, 22). Perciò, nei triangoli *LTB*, *NPF*, i lati sono fra loro proporzionali, per cui i triangoli *LTB*, *NPF* hanno gli angoli rispettivamente uguali (VI, 5), cosicché sono simili (VI, def. I). Quindi pure la piramide, di cui è base il triangolo *BKT* e vertice il punto *L*, è simile alla piramide di cui è base il triangolo *FMP* e vertice il punto *N*: sono difatti comprese da facce simili, complessivamente uguali per numero (XI, def. IX). Ma piramidi simili che abbiano basi triangolari stanno fra loro in rapporto triplicato rispetto a quello dei lati omologhi (XII, 8). La piramide *BKTL* ha quindi con la piramide *FMPN* rapporto triplicato rispetto a quello che *BK* ha con *FM*. Similmente potremo dimostrare, se tracciamo rette che congiungano i punti *A*, *W*, *D*, *V*, *C*, *U* al punto *K*, ed i punti *E*, *S*, *H*, *R*, *G*, *Q* al punto *M*, e su ciascuno dei triangoli ottenuti costruiamo altrettante piramidi che abbiano lo stesso vertice, rispettivamente, dei coni *ABCDL*, *EFGHN*, che pure ognuna delle piramidi così allo stesso modo disposte avrà con ciascuna delle altre piramidi, le quali siano in ugual modo costruite, rapporto triplicato rispetto a quello che il lato omologo *BK* ha col lato omologo *FM*, vale a dire quello che *BD* ha con *FH*. Ora, uno dei termini antecedenti [di una proporzione] sta ad uno dei termini conseguenti come la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti (V, 12); quindi anche, la piramide *BKTL* sta alla piramide *FMPN* come tutta quanta la piramide, di cui è base il poligono *ATBUCVDW* e vertice il punto *L*, sta a tutta quanta la piramide di cui è base il poligono *EPFQGRHS* e vertice il punto *N*, cosicché la piramide, di cui è base il poligono *ATBUCVDW* e vertice il punto *L*, ha pure con l'altra piramide, di cui è base il poligono *EPFQGRHS* e vertice il punto *N*, rapporto triplicato rispetto a quello che

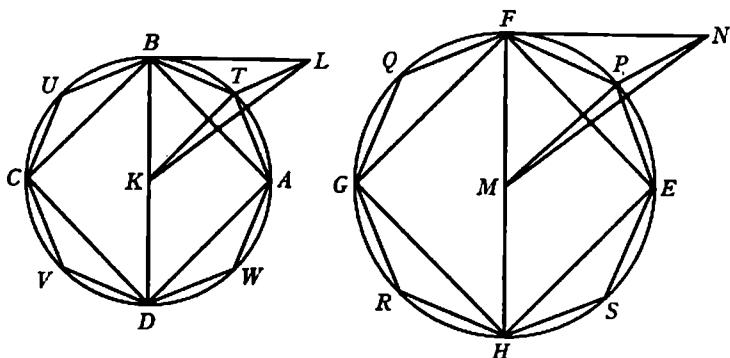
BD ha con *FH*. Ma si è supposto che anche il cono, di cui è base il cerchio *ABC* e vertice il punto *L*, abbia col solido *O* rapporto triplicato rispetto a quello che *BD* ha con *FH*; perciò il cono, di cui è base il cerchio *ABCD* e vertice il punto *O*, sta al solido *O* come la piramide, di cui è base il poligono *ATBUCVDW* e vertice il punto *L*, sta alla piramide di cui è base il poligono *EPFQGRHS* e vertice è il punto *N*; si ha quindi, *permutando*, che il cono, di cui è base il cerchio *ABCD* e vertice il punto *L*, sta alla piramide contenuta in esso, di cui è base il poligono *ATBUCVDW* e vertice il punto *L*, come il solido *O* sta alla piramide di cui è base il poligono *EPFQGRHS* e vertice il punto *N* (V, 16). Ma il cono suddetto è maggiore della piramide in esso contenuta: la comprende, difatti. Perciò pure il solido *O* sarebbe in tal caso maggiore della piramide di cui è base il poligono *EPFQGRHS* e vertice il punto *N*. Ma si è supposto che sia minore di essa: ciò è dunque impossibile. Dunque il cono, di cui è base il cerchio *ABCD* e vertice il punto *L*, non può avere con un solido che sia minore del cono, di cui è base il cerchio *EFGH* e vertice il punto *N*, rapporto triplicato rispetto a quello che *BD* ha con *FH*. Similmente potremo dimostrare che neppure il cono *EFGHN* può avere con un solido minore del cono *ABCDL* rapporto triplicato rispetto a quello che *FH* ha con *BD*.

Dico adesso che non può darsi nemmeno che il cono *ABCDL* abbia con un solido maggiore del cono *EFGHN* rapporto triplicato rispetto a quello che *BD* ha con *FH*.

Infatti, se possibile, [il cono *ABCDL*] abbia tale rapporto col solido *O*, maggiore [di *EFGHN*]. Si ha quindi, *invertendo*, che il solido *O* ha col cono *ABCDL* rapporto triplicato rispetto a quello che *FH* ha con *BD* (V, 7, coroll.). Ma il solido *O* sta al cono *ABCDL* come il cono *EFGHN* sta ad un solido che sia minore del cono *ABCDL* (XII, 2, coroll.). Perciò anche il cono *EFGHN* avrebbe in tal caso, con un solido minore del cono *ABCDL*, rapporto triplicato rispetto a quello che *FH* ha con *BD*: il che fu dimostrato impossibile. Il cono *ABCDL* non può quindi avere con un solido che sia maggiore del cono *EFGHN* rapporto triplicato

rispetto a quello che *BD* ha con *FH*. Ma fu dimostrato che tale rapporto non può averlo neppure con un solido minore [di *EFGHN*]. Dunque, il cono *ABCDL* ha col cono *EFGHN* rapporto triplicato rispetto a quello che *BD* ha con *FH*.

Ma cono sta a cono come cilindro rispettivo sta a cilindro rispettivo: difatti un cilindro che sia posto sulla stessa base di un cono e che abbia altezza uguale ad esso, è il triplo del cono in questione (XII, 10). Perciò anche il primo cilindro [che consideriamo] ha con l'altro cilindro rapporto triplicato rispetto a quello che *BD* ha con *FH*.

Dunque, coni e cilindri simili... (secondo l'enunciato). – C.D.D. [a].

APPLICA: IV, 6; V, 7 coroll., 12, 16, 22; VI, 6, 18; X, 1; XII, 2 coroll., 8, 10.

a. Euclide è qui passato da piramidi parziali a piramidi intere ripetendo in definitiva gli argomenti stessi del corollario a XII, 8, dove si aveva una similare ed anche più generale estensione dal lato di piramidi triangolari a quello di piramidi a base poligonale: è una conferma che, se il corollario a XII, 8 fosse genuino, sarebbe stato più naturale riferirsi ad esso, a questo punto (cfr. nota a XII, 8).

PROPOSIZIONE 13.

Se un cilindro è tagliato da un piano parallelo alle sue basi, dei due cilindri risultanti il primo sta al secondo come l'asse dell'uno sta all'asse dell'altro[a].

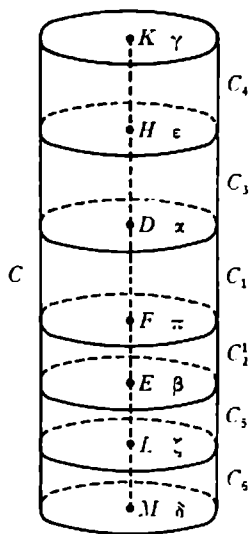
Infatti, il cilindro C di basi α, β sia tagliato dal piano π, parallelo alle basi, ed il piano π incontri l'asse DE del cilindro nel punto F; dico che il cilindro C_1 (di basi α, π) sta al cilindro C_2 (di basi π, β) come l'asse DF sta all'asse FE.

Si prolunghi difatti l'asse DE da ambedue le parti; si stacchino sul prolungamento dalla parte di D, quante si voglia rette DH, HK uguali all'asse DF, e sul prolungamento dalla parte di E quante si voglia rette EL, LM uguali all'asse FE, e si immagini il cilindro avente per asse KM e di cui sono basi i cerchi γ, δ. Per i punti H, L si conducano poi piani paralleli ai piani α, β, e si traccino[b] i cerchi ε, ζ intorno ai centri H, L. Ora, poiché gli assi KH, HD, DF sono uguali fra loro, i cilindri C_4, C_3, C_1 stanno fra loro come le basi (XII, 11). Ma le basi sono uguali, quindi anche i cilindri C_4, C_3, C_1 sono uguali fra loro. Poiché gli assi KH, HD, DF sono dunque uguali fra loro, e pure i cilindri C_4, C_3, C_1 sono fra loro uguali, ed il numero degli assi è uguale a quello dei cilindri[c], si avrà che l'asse KF è altrettante volte multiplo dell'asse DF quante volte il cilindro $C_4 + C_3 + C_1$ (ossia quello avente l'asse KF e le basi γ, π) è multiplo del cilindro C_1. Per la stessa ragione l'asse FM è altrettante volte multiplo dell'asse FE quante anche il cilindro $C_2 + C_5 + C_6$ è multiplo del cilindro C_2. E se l'asse KF è uguale all'asse FM, pure il cilindro $C_4 + C_3 + C_1$ sarà uguale al cilindro $C_2 + C_5 + C_6$, mentre invece, se l'asse KF è maggiore dell'altro asse, anche il cilindro sarà maggiore del cilindro, e se l'asse è minore dell'asse, il cilindro sarà

a. Letteralmente: starà, come il cilindro al cilindro, così l'asse all'asse; naturalmente, il «dei due cilindri risultanti» è aggiunta nostra.

b. Letteralmente: si producano, cioè: si determinino.

c. Letteralmente: ed il numero è uguale al numero.

minore del cilindro. Date allora quattro grandezze, gli assi *DF*, *FE* ed i cilindri C_1, C_2, ne sono stati presi equimultipli, cioè l'asse *KF* multiplo dell'asse *DF* ed il cilindro $C_4 + C_3 + C_1$ equimultiplo del cilindro C_1, così come l'asse *FM* multiplo dell'asse *FE* ed il cilindro $C_2 + C_5 + C_6$ equimultiplo del cilindro C_2, e si è dimostrato che se l'asse *KF* è maggiore dell'asse *FM*, anche il cilindro corrispondente è maggiore del cilindro corrispondente, se l'asse *KF* è uguale all'asse *FM*, l'un cilindro è uguale all'altro, e se l'asse *KF* è minore dell'altro, il primo cilindro è minore del secondo[a].

Dunque, l'asse *DF* sta all'asse *FE* come il cilindro C_1 sta al cilindro C_2 (V, def. V). - C.D.D.

APPLICA: XII, 11.

È APPLICATA IN: XII, 14, 15.

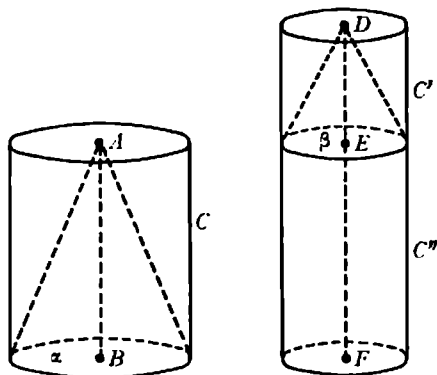
PROPOSIZIONE 14.

Coni e cilindri che siano posti su basi uguali stanno fra loro come le altezze.

Infatti, siano i cilindri *C*, *C'* posti su basi uguali, cioè i cerchi α, β; dico che il cilindro *C* sta al cilindro *C'* come l'asse *AB* sta all'asse *DE*.

Si prolunghi difatti l'asse *DE* oltre *E* e sul prolungamento si stacchi la retta *EF* uguale all'asse *BA*, e si im-

a. Letteralmente: se l'asse è uguale, è uguale, e se minore, minore; così come prima aveva detto, secondo il solito: se l'asse è maggiore dell'asse, anche il cilindro sarà maggiore del cilindro, e se minore, minore.

magini il cilindro C'' intorno all'asse EF. Poiché i cilindri C, C'' hanno dunque altezze uguali, essi stanno fra loro come le basi (XII, 11). Ma le basi sono uguali fra loro, quindi sono uguali anche i cilindri C, C''. E poiché il cilindro $C' +$ $+ C''$ (cioè quello avente per asse DF) è tagliato dal piano β che è parallelo alle basi del cilindro, il cilindro C'' sta al cilindro C' come l'asse EF sta all'asse DE (XII, 13). Ma il cilindro C'' è uguale al cilindro C, mentre l'asse EF è uguale all'asse BA; quindi il cilindro C sta al cilindro C' come l'asse BA sta all'asse DE. Ma il cilindro C sta al cilindro C' come il cono $A\alpha$ sta al cono $D\beta$ (XII, 10). Dunque anche, l'asse BA sta all'asse DE come il cono $A\alpha$ sta al cono $D\beta$ e come il cilindro C sta al cilindro C'. – C.D.D.

APPLICA: XII, 10, 11, 13.

PROPOSIZIONE 15.

In coni ed in cilindri uguali le basi sono inversamente proporzionali alle altezze; ed i coni ed i cilindri, le cui basi siano inversamente proporzionali alle altezze, sono uguali.

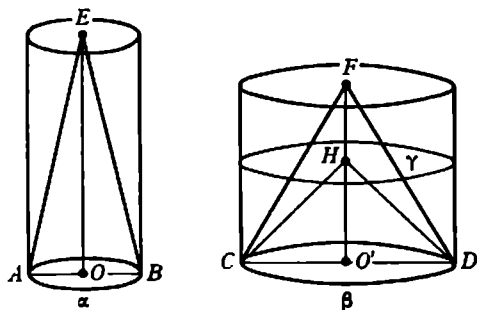
Siano dati coni uguali e cilindri uguali, le cui basi siano i cerchi α, β di diametri AB, CD [e di centri O, O'], siano OE, $O'F$ gli assi, i quali sono pure le altezze sia dei coni che dei cilindri, e si completino i due cilindri. Dico che nei due detti cilindri le basi sono inversamente proporzionali alle altezze, ossia che $\alpha : \beta = O'F : OE$.

Infatti, l'altezza OE o è uguale all'altezza $O'F$, oppure non lo è. Dapprima, sia uguale. Ma i cilindri ABE, CDF sono pure uguali per ipotesi. E coni e cilindri, che abbiano

altezze uguali, stanno fra loro come le basi (XII, 11), quindi anche la base α è uguale alla base β. Cosicché anche sono inversamente proporzionali basi ed altezze, cioè la base α sta alla base β come l'altezza $O'F$ sta all'altezza OE. Ma sia adesso il caso in cui l'altezza OE non sia uguale all'altezza $O'F$, ma sia minore. Dall'altezza FO' si sottragga la retta $O'H$ uguale all'asse OE (I, 3), e per il punto H, mediante il piano γ parallelo ai piani del cerchio β, si tagli il cilindro CDF, e si immagini il cilindro βH avente a base il cerchio βH e $O'H$ per altezza. Ora, poiché il cilindro ABE è uguale per ipotesi al cilindro CDF, il cilindro ABE sta al cilindro βH come il cilindro CDF sta al cilindro βH (V, 7). Ma il cilindro ABE sta al cilindro βH come la base α sta alla base β – i cilindri ABE, βH hanno difatti altezze uguali (XII, 11) –, mentre il cilindro CDF sta a quello βH come l'altezza $O'F$ sta all'altezza $O'H$: difatti il cilindro CDF è tagliato da un piano che è parallelo alle sue basi (XII, 13). Quindi anche, la base α sta alla base β come l'altezza $O'F$ sta all'altezza $O'H$. Ma l'altezza $O'H$ è uguale per costruzione all'altezza OE, quindi la base α sta alla base β come l'altezza $O'F$ sta all'altezza OE. Dunque, nei cilindri ABE, CDF le basi sono inversamente proporzionali alle altezze.

Ma sia adesso il caso in cui le basi, nei cilindri ABE, CDF, siano inversamente proporzionali alle altezze, cioè si abbia che la base α sta alla base β come l'altezza $O'F$ sta all'altezza OE; dico che il cilindro ABE è uguale al cilindro CDF. Infatti, eseguita la medesima costruzione di prima, poiché la base α sta alla base β come l'altezza $O'F$ sta all'altezza OE, ma l'altezza OE è uguale all'altezza $O'H$, si ha che la base α sta alla base β come l'altezza $O'F$ sta all'altezza $O'H$. Ma la base α sta alla base β come il cilindro ABE sta al cilindro βH – hanno difatti altezze uguali (XII, 11) –, mentre l'altezza $O'F$ sta all'altezza $O'H$ come il cilindro CDF sta al cilindro βH (XII, 13); perciò il cilindro ABE sta al cilindro βH come il cilindro CDF sta a quello βH (V, 11).

Dunque, il cilindro ABE è uguale al cilindro CDF (V, 9). Lo stesso vale anche per i coni. – C.D.D.

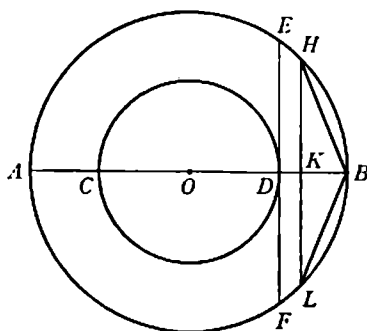
APPLICA: I, 3; V, 7, 9, 11; XII, 11, 13.

PROPOSIZIONE 16.

Dati due cerchi che abbiano lo stesso centro, iscrivere nel cerchio maggiore un poligono equilatero, avente numero pari di lati, che non tocchi il cerchio minore.

Siano dati due cerchi, che abbiano lo stesso centro O; si deve dunque iscrivere nel cerchio maggiore, un poligono equilatero e di numero pari di lati, in modo che non tocchi il cerchio minore.

Infatti, per il centro O si conduca il diametro AOB, che tagli in C, D la circonferenza del cerchio minore: dal punto D si innalzi la perpendicolare al diametro AB e la si prolunghi fino a tagliare la circonferenza del cerchio maggiore nei punti E, F: la retta EF è quindi tangente al cerchio minore (III, 16, coroll.). Se dividiamo allora per metà la semicirconferenza AEB del cerchio maggiore [a], per metà la metà di essa, e continuiamo a far questo sempre di séguito, finiremo con l'ottenere un arco di circonferenza minore dell'arco EB (X, 1). Sia HB un tale arco. Dal punto H si conduca la perpendicolare HK ad AB, la si prolunghi oltre K sino a L, e si traccino le congiungenti HB, BL; quindi HB è uguale a BL (III, 3; I, 4). Ma poiché HL è parallela ad EF (I, 28), ed EF è tangente al cerchio minore, si ha che HL non è tangente al cerchio minore, e quindi, a maggior ragione, non sono tangenti al cerchio minore le

a. Letteralmente: la circonferenza AEB.

rette HB, BL. Se allora nel cerchio maggiore adatteremo delle rette uguali alla retta HB, sempre l'una di séguito all'altra (IV, 1), risulterà iscritto nel cerchio maggiore un poligono equilatero e di numero pari di lati, tale che non tocchi il cerchio minore. – C.D.D.

APPLICA: I, 4, 28; III, 3, 16 coroll.; IV, 1; X, 1.

È APPLICATA IN: XII. 17.

PROPOSIZIONE 17.

Date due sfere che abbiano lo stesso centro, iscrivere nella sfera maggiore un solido poliedrico che non tocchi in nessun punto la superficie della sfera minore[a].

Si immaginino due sfere che abbiano lo stesso centro A; si deve dunque iscrivere nella sfera maggiore un solido poliedrico che non tocchi in nessun punto la superficie della sfera minore.

Siano tagliate le sfere da un piano passante per il centro; le sezioni saranno così dei cerchi, dato che, restando immobile un diametro e facendo attorno ad esso ruotare il semicerchio relativo, si è originata la sfera (XI, def. XIV): cosicché anche, in qualunque posizione vorremo pensare il semicerchio, un piano condotto per esso determinerà un cerchio sulla superficie della sfera. Ed è evidente che quel cerchio è pure il maggiore possibile (= è un cerchio massimo della sfera), dato che il diametro della sfera, il quale è anche il diametro del semicerchio, ed evidentemente del cerchio relativo, è maggiore di tutte le rette che possano condursi attra-

a. Letteralmente: la sfera minore secondo la superficie (di essa).

verso ad essi nel cerchio o nella sfera. Sia dato dunque nella sfera maggiore il cerchio *BCDE*, e nella sfera minore sia dato il cerchio *FGH*: in essi si conducano, perpendicolari fra loro, i due diametri *BD*, *CE*. Avendo i due cerchi *BCDE*, *FGH* lo stesso centro si iscriva nel cerchio maggiore *BCDE* un poligono equilatero e di numero pari di lati, che non tocchi il cerchio minore *FGH* (XII, 16), e del quale *BK*, *KL*, *LM*, *ME* siano i lati nel quadrante *BE*, si tracci la congiungente *KA* e la si prolunghi oltre *A* sino a *N*; dal punto *A* si innalzi *AO* perpendicolarmente al piano del cerchio *BCDE*, ed essa si incontri con la superficie della sfera maggiore nel punto *O*, e si conducano dei piani per *AO* e per ciascuna delle due rette *BD*, *KN*: essi determineranno allora sulla superficie della sfera, per le ragioni dette prima, cerchi che saranno i maggiori possibili (= cerchi massimi). Li determinino, e loro semicerchi, sui diametri *BD*, *KN*, siano *BOD*, *KON*. Ma poiché *OA* è perpendicolare al piano del cerchio *BCDE*, pure tutti i piani passanti per *OA* sono perpendicolari al piano del cerchio *BCDE* (XI, 18); cosicché anche i [piani dei] semicerchi *BOD*, *KON* sono perpendicolari al piano del cerchio *BCDE*. Ora, poiché i semicerchi *BED*, *BOD*, *KON* sono uguali – sono difatti posti sui diametri uguali *BD*, *KN* (III, def. I) –, anche i quadranti *BE*, *BO*. *KO* sono uguali fra loro. Quindi, per quanti sono i lati del poligono contenuti nel quadrante *BE*, altrettanti ve ne sono, uguali alle rette *BK*, *KL*, *LM*, *ME*, pure nei quadranti *BO*, *KO*. Risultino iscritti, e siano *BP*, *PQ*, *QR*, *RO*; *KS*, *ST*, *TU*, *UO*, si traccino le congiungenti *SP*, *TQ*, *UR*, e dai punti *P*, *S* si conducano perpendicolari al piano del cerchio *BCDE* (XI, 11); esse cadranno allora sulle rette di intersezione dei piani rispettivi, cioè *BD*, *KN*, dato che pure i piani *BOD*, *KON* sono perpendicolari al piano del cerchio *BCDE* (cfr. XI, def. IV). Tali siano *PV*, *SW*, e si tracci la congiungente *WV*. E poiché nei semicerchi uguali *BOD*, *KON* sono stati tagliati uguali gli archi *BP*, *KS* (III, 28), e sono state condotte *PV*, *SW* perpendicolarmente ai diametri dei semicerchi, si ha che *PV* è uguale a *SW* a che *BV* è uguale a *KW* (III, 27; I, 26). Ma anche tutta quanta la

retta *BA* è uguale a tutta quanta la retta *KA*, per cui pure la parte che rimane della prima, tolta *BV*, cioè *VA* [a], è uguale alla parte rimanente, tolta *KW*, della seconda, cioè *WA*; quindi *BV* sta a *VA* come *KW* sta a *WA*, e *WV* è perciò parallela a *KB* (VI, 2). Ma poiché ciascuna delle due rette *PV*, *SW* è perpendicolare al piano del cerchio *BCDE*, si ha che *PV* è parallela a *SW* (XI, 6). Ma fu dimostrato che è pure uguale ad essa, per cui anche *WV*, *SP* sono uguali e parallele (I, 33). E poiché *WV* è parallela a *SP*, ma *WV* è parallela a *KB*, pure *SP*, *KB* sono parallele (I, 30; XI, 9). E *BP*, *KS* le congiungono; quindi il quadrilatero *KBPS* è in un piano solo, dato che se si dànno due rette parallele, e su ciascuna di esse si prendono a caso dei punti, la retta che congiunge i punti in questione è posta nello stesso piano delle parallele (XI, 7). Per la stessa ragione, anche ciascuno dei due quadrilateri *SPQT*, *TQRU* giace [b] in un solo piano. Ma pure il triangolo *URO* giace in un piano solo (XI, 2). Se immagineremo allora rette che congiungano i punti *P*, *S*, *Q*, *T*, *R*, *U* al punto *A*, verrà a costruirsi una figura solida poliedrica fra gli archi di circonferenza *BO*, *KO*, composta di piramidi delle quali sono basi i quadrilateri *KBPS*, *SPQT*, *TQRU* ed il triangolo *URO*, e vertice è il punto *A*. Se poi procederemo, come sul lato *BK*, anche su ciascuno dei lati *KL*, *LM*, *ME* alla medesima costruzione di prima, e così ancora faremo nei tre rimanenti quadranti del cerchio *BEDC*, si costruirà una figura poliedrica, iscritta nella sfera e compresa da piramidi, di cui sono basi i detti quadrilateri, il triangolo *URO*, e le altre figure che successivamente si costituiscano in modo a loro simile, mentre vertice è il punto *A*.

Dico che il poliedro indicato non incontrerà la sfera minore in nessun punto della superficie sulla quale è posto il cerchio *FGH*.

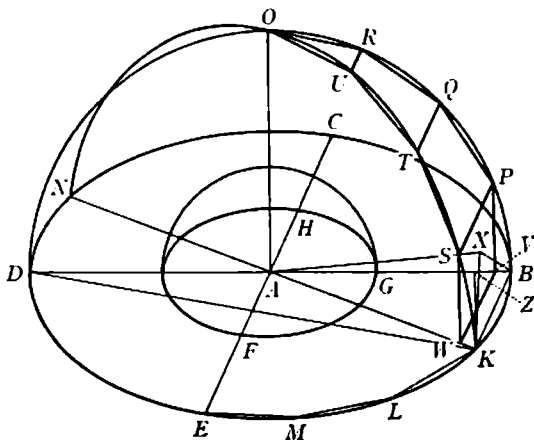
a. Letteralmente: la (retta) restante *VA*.

b. Letteralmente: « è »; ed ugualmente dopo, alla stessa espressione.

Dal punto *A* si conduca la perpendicolare *AX* al piano del quadrilatero *KBPS* ed essa si incontri col piano [stesso] nel punto *X* (XI, 11), e si traccino le congiungenti *XB*, *XK*. Ora, poiché *AX* è perpendicolare al piano del quadrilatero *KBPS*, è perpendicolare anche a tutte le rette che la incontrino e che siano sul piano del quadrilatero (XI, def. III). Quindi *AX* è perpendicolare a ciascuna delle due rette *BX*, *XK*. E poiché *AB* è uguale ad *AK*, pure il quadrato di *AB* è uguale al quadrato di *AK*. Ma la somma dei quadrati di *AX*, *XB* è uguale al quadrato di *AB* – difatti l'angolo in *X* è retto (I, 47) –, mentre al quadrato di *AK* è uguale la somma dei quadrati di *AX*, *XK* (id.). Perciò la somma dei quadrati di *AX*, *XB* è uguale a quella dei quadrati di *AX*, *XK*. Se ne sottragga il quadrato di *AX*, che è comune: quindi il quadrato di *BX*, che rimane della prima somma, è uguale al quadrato di *XK* che rimane della seconda; quindi *BX* è uguale a *XK*. Similmente potremo dimostrare che anche le rette, tracciate a congiungere il punto *X* ai punti *P*, *S*, sono uguali a ciascuna delle due rette *BX*, *XK*. Quindi il cerchio descritto con centro *X*, e che abbia per raggio una delle rette *XB*, *XK*, passerà pure per *P*, *S*, ed il quadrilatero *KBPS* sarà iscritto nel cerchio.

E poiché *KB* è maggiore di *WV*, ma *WV* è uguale a *SP*, si ha che *KB* è maggiore di *SP*. Ma *KB* è uguale a ciascuna delle due rette *KS*, *BP*; anche ognuna delle due rette *KS*, *BP* è quindi maggiore di *SP*. Ora, poiché il quadrilatero *KBPS* è iscritto in un cerchio, e *KB*, *BP*, *KS* sono uguali, ed è minore *PS*, e *BX* è il raggio del cerchio di centro *X*, il quadrato di *KB* è maggiore del doppio del quadrato di *BX* [poiché l'angolo *KXB* risulta ottuso]. Dal punto *K* si conduca alla retta *BV* la perpendicolare *KZ*. E poiché *BD* è minore del dòppio di *DZ*, e *BD* sta a *DZ* come il rettangolo di *BD*, *BZ* sta al rettangolo di *DZ*, *ZB*, se descriviamo un quadrato su *BZ*, e completiamo il parallelogrammo posto su *ZD*, anche il rettangolo di *DB*, *BZ* è minore del doppio del rettangolo di *DZ*, *ZB*. Se poi è tracciata la congiungente *KD*, il rettangolo di *DB*, *BZ* è uguale al quadrato di *BK*, mentre il rettangolo di *DZ*, *ZB* è uguale al quadrato

di KZ (III, 31; VI, 8, coroll.); perciò il quadrato di KB è minore del doppio del quadrato di KZ. Ma il quadrato di KB [come si è mostrato prima] è maggiore del doppio del quadrato di BX; il quadrato di KZ è quindi maggiore del quadrato di BX. E poiché BA è uguale a KA, il quadrato di BA è uguale al quadrato di KA. Ma al quadrato di BA è uguale la somma dei quadrati di BX, XA, mentre al quadrato di KA è uguale la somma dei quadrati di KZ, ZA, quindi la somma dei quadrati di BX, XA è uguale a quella dei quadrati di KZ, ZA, e in tali somme il quadrato di KZ è maggiore di quello di BX; di conseguenza il quadrato di ZA, che rimane della prima somma, è minore del quadrato di XA che rimane della seconda, e quindi XA è maggiore di ZA ed è molto maggiore di AG. Ora, AX è condotta ad una delle basi del poliedro [di cui trattiamo], mentre AG è condotta alla superficie della sfera minore, cosicché il poliedro non potrà incontrare in nessun punto la superficie della sfera minore.

Dunque, date due sfere... (secondo l'enunciato)[a].

Applica: I, 26, 30, 33, 47; III, 27, 28, 31; VI, 2, 8 coroll.; XI, 2, 6, 7, 9, 11, 18; XII, 16.

È applicata in: XII, 18.

a. Prova alternativa in Heiberg, IV, App. I, pp. 358-360.

COROLLARIO

Se poi iscriviamo anche in un'altra sfera un solido poliedrico simile al solido poliedrico iscritto nella sfera *BCDE*, il solido poliedrico iscritto nella sfera *BCDE* avrà col solido poliedrico iscritto nell'altra sfera rapporto triplicato rispetto a quello che il diametro della sfera *BCDE* ha col diametro dell'altra sfera. Infatti, se dividiamo i solidi in piramidi uguali di numero e disposte in posizione similare, le piramidi saranno simili fra loro. Ma piramidi simili stanno fra loro in rapporto triplicato rispetto a quello dei lati omologhi; quindi la piramide, di cui è base il quadrilatero *KBPS* e vertice il punto *A*, ha rapporto triplicato con la piramide di disposizione similare e contenuta nell'altra sfera, rispetto a quello che lato omologo dell'una ha con lato omologo dell'altra, vale a dire a quello che *AB*, raggio della sfera che ha per centro *A*, ha col raggio dell'altra sfera. Allo stesso modo pure ognuna delle piramidi contenute nella sfera di centro *A* avrà con ciascuna delle piramidi, disposte in ugual modo nell'altra sfera, rapporto triplicato rispetto a quello che il raggio *AB* ha col raggio dell'altra sfera. Ma uno dei termini antecedenti di una proporzione sta ad uno dei conseguenti come la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti (V, 12): cosicché tutto quanto il solido poliedrico iscritto nella sfera di centro *A* avrà con tutto quanto il solido poliedrico, iscritto nell'altra sfera, rapporto triplicato rispetto a quello che *AB* ha col raggio dell'altra sfera, vale a dire a quello che il diametro *BD* [dell'una] ha col diametro dell'altra sfera. – C.D.D.

APPLICA: V, 12.

È APPLICATO IN: XII, 18.

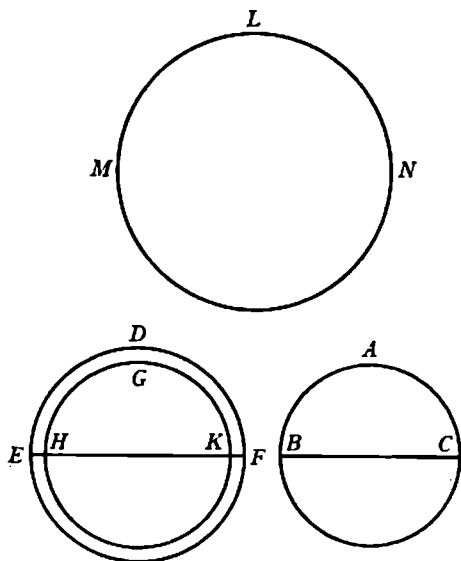
PROPOSIZIONE 18.

Le sfere stanno fra loro in ragione triplicata rispetto a quella dei propri diametri.

Si immaginino le sfere *ABC*, *DEF*, ed i loro diametri *BC*, *EF*; dico che la sfera *ABC* ha con la sfera *DEF* rapporto triplicato rispetto a quello che *BC* ha con *EF*.

Infatti, se la sfera *ABC* non avesse con la sfera *DEF* ragione triplicata rispetto a quella che *BC* ha con *EF*, la sfera *ABC* avrebbe in tal caso con una sfera minore o maggiore di quella *DEF* rapporto triplicato rispetto a quello che *BC* ha con *EF*. Dapprima, abbia tale rapporto con la sfera *GHK*, minore di quella *DEF*, si immagini *DEF* come avente lo stesso centro della *GHK*, e nella sfera maggiore *DEF* si iscriva un solido poliedrico che non incontri in nessun punto la superficie della sfera minore *GHK* (XII, 17), mentre, anche nella sfera *ABC*, si iscriva un solido poliedrico, che sia simile al solido poliedrico iscritto nella sfera *DEF*; quindi il solido poliedrico della sfera *ABC* ha col solido poliedrico della sfera *DEF* rapporto triplicato rispetto a quello che *BC* ha con *EF* (XII, 17, coroll.). Ma si è supposto che pure la sfera *ABC* abbia con la sfera *GHK* rapporto triplicato rispetto a quello che *BC* ha con *EF*, per cui la sfera *ABC* sta alla sfera *GHK* come il solido poliedrico della sfera *ABC* sta al solido poliedrico della sfera *DEF*; si ha quindi, *permutando*, che la sfera *ABC* sta al poliedro iscritto in essa come la sfera *GHK* sta al solido poliedrico iscritto nella sfera *DEF* (V, 16). Ma la sfera *ABC* è maggiore del poliedro in essa iscritto, per cui anche la sfera *GHK* sarebbe in tal caso maggiore del poliedro iscritto nella sfera *DEF* (V, 14). Ma è pure minore, rispetto ad esso: è difatti da esso compresa. Dunque, non può darsi che la sfera *ABC* abbia con un'altra, minore della sfera *DEF*, rapporto triplicato rispetto a quello che il diametro *BC* ha col diametro *EF*. Similmente potremo dimostrare come neppure possa darsi che la sfera *DEF* abbia con un'altra che sia minore della sfera *ABC* rapporto triplicato rispetto a quello che *EF* ha con *BC*.

Dico adesso che non può darsi nemmeno che la sfera *ABC* abbia con una sfera che sia maggiore di quella *DEF* rapporto triplicato rispetto a quello che *BC* ha con *EF*.

Infatti, se possibile, abbia un tale rapporto con la sfera *LMN*, maggiore di quella *DEF*; quindi, *invertendo*, la sfera *LMN* avrebbe con la sfera *ABC* rapporto triplicato rispetto a quello che il diametro *EF* ha col diametro *BC* (V, 7, coroll.). Ma la sfera *LMN* sta alla sfera *ABC* come la sfera *DEF* sta ad una che sia minore della sfera *ABC*, dato che la sfera *LMN* è maggiore della sfera *DEF*, come fu prima dimostrato (XII, 2, coroll.). Perciò anche la sfera *DEF*, con una che sia minore di quella *ABC*, verrebbe ad avere rapporto triplicato rispetto a quello che *EF* ha con *BC*: il che fu dimostrato impossibile. Non può quindi darsi che la sfera *ABC* abbia con una sfera maggiore di quella *DEF* rapporto triplicato rispetto a quello che *BC* ha con *EF*. Ma fu dimostrato che neppure può averlo con una minore. Dunque, la sfera *ABC* ha con la sfera *DEF* rapporto triplicato rispetto a quello che *BC* ha con *EF*. – C.D.D.

APPLICA: V, 7 coroll., 14, 16; XII, 2 coroll., 17, 17 coroll.

LIBRO TREDICESIMO

PROPOSIZIONI

PROPOSIZIONE I.

Se si divide una linea retta in estrema e media ragione, il quadrato costruito sulla parte maggiore aumentata della metà di tutta quanta la retta iniziale è il quintuplo del quadrato di detta metà [1].

Infatti, si divida la linea retta AB in estrema e media ragione nel punto C, sia AC la parte maggiore di essa. Si

[1] Il libro tredicesimo comincia con una serie di sei proposizioni riguardanti la divisione di una retta in estrema e media ragione, ossia riguardanti la cosiddetta sezione aurea d'un segmento. Queste sei proposizioni costituiscono dei veri e propri lemmi per la costruzione dei poliedri regolari che trova posto nelle proposizioni finali del libro. Così, ad esempio, le proposizioni quarta, quinta e sesta trovano applicazioni nella XIII, 17 nella quale viene costruito il dodecaedro regolare. Si comprende facilmente la necessità, a questo punto, dello studio di proprietà della sezione aurea (oltre alla costruzione vera e propria, che si trova in II, 11 e in VI, 30) se si pone mente al fatto che se un cubo è iscritto in una sfera, la parte aurea del suo spigolo costituisce lo spigolo del dodecaedro regolare iscritto nella sfera stessa (cfr. XIII, 17 e corollario).

Le prime proposizioni di questo libro vengono più facilmente seguite se si ricorre alle equazioni con riferimento alle lunghezze. Ricordiamo che l'equazione che determina la sezione aurea x di una retta a è:

$$x^2 = a\,(a - x)$$

cioè:

$$a : x = x : (a - x)$$

(il quadrato della parte aurea, cioè della parte maggiore, è equivalente al rettangolo compreso dall'intero segmento e dalla parte minore; ovvero

prolunghi la retta *AB* dalla parte di *A* e si stacchi sul prolungamento la retta *AD*[a] uguale alla metà di *AB* (I, 10);

a. Letteralmente: si prolunghi per diritto a *CA* la retta *AD* e si ponga *AD* metà di *AB*.

la parte aurea è media proporzionale tra l'intero segmento e la parte residua).

La XIII, 1 dice che se alla parte aurea si aggiunge la metà del segmento dato, il quadrato del segmento-somma è cinque volte il quadrato della metà del segmento dato, cioè:

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = 5\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Infatti, sviluppando si ha:

$$x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 5\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

ossia:

$$x^2 + ax = a^2$$

cioè si ritrova l'equazione della sezione aurea.

Anzi, procedendo in tal modo, si viene a dimostrare il teorema seguente (XIII, 2), che è l'inverso del primo.

Questo primo, invece, si dimostrerebbe procedendo in senso inverso nelle operazioni.

La XIII, 3 considera il quadrato costruito sulla parte minore e sulla metà della parte maggiore, e mostra che detto quadrato è il quintuplo del quadrato della metà della parte maggiore, cioè:

$$\left(a - x + \frac{x}{2}\right)^2 = 5\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

Infatti, sviluppando:

$$\left(a - \frac{x}{2}\right)^2 = a^2 - ax + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 5\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

ossia:

$$a^2 - ax = x^2$$

e:

$$x^2 = a\,(a - x)$$

come al solito.

Nella XIII, 4 si viene a dimostrare che:

$$a^2 + (a - x)^2 = 3x^2$$

ossia:

$$2a^2 - 2ax = 2x^2$$
$$a^2 - ax = x^2$$
$$a\,(a - x) = x^2$$

come al solito.

La XIII, 5 considera la retta formata come somma della retta data e della sua parte aurea. Afferma che anche questa retta-somma è pure già

dico che il quadrato di DC è il quintuplo del quadrato di DA.

Su AB, DC difatti si descrivano i quadrati $ABEK$, $DCFL$, si tracci nel quadrato $DCFL$ la figura [già usata prece-

divisa nelle sue due parti in estrema e media ragione, ossia che la sua parte aurea è la retta data. Cioè, si afferma che $a + x$ (retta-somma) ha la parte aurea di lunghezza a, vale a dire che:

$$a^2 = (a + x)\,x$$

ossia:

$$a^2 - ax = x^2$$

come al solito.

Questa XIII, 5 è notevole anche per la possibilità, che offre, di dimostrare che una retta è incommensurabile con la sua parte aurea.

Infatti se al segmento dato AB si aggiunge la sua parte aurea $DA = AC$, si ottiene la retta-somma DB. Ebbene: la XIII, 5 mostra che la parte aurea di DB è la retta data AB.

Interpretiamo ora questo risultato partendo dalla retta DB. La sua parte aurea è AB, la parte residua è DA. Cerchiamo ora la parte aurea della parte aurea AB: essa è $AC = DA$. Dunque la parte aurea della parte aurea di una retta è la parte residua.

Possiamo ora applicare ad una retta qualsiasi DB e alla sua parte aurea AB il teorema X, 1.

Riportiamo dunque AB su DB: esso è contenuto una volta, e si ha il resto DA. Secondo il procedimento del cosiddetto *algoritmo euclideo* della X, 1 riportiamo ora DA su AB, ossia AC su AB. Ma riportare AC su AB significa riportare su una retta AB la sua parte aurea AC: il procedimento, quindi, non ha mai termine, poiché ora il resto CB è la parte aurea di AC, e così via. Quindi, in base alla X, 1, una retta è incommensurabile con la sua parte aurea.

Del resto, che la parte aurea della parte aurea di un segmento sia la parte residua, si vede subito per mezzo delle equazioni.

Infatti, dato:

$$x^2 = a\,(a - x)$$

la parte aurea y della parte aurea x è data dall'equazione:

$$y^2 = x\,(x - y)$$

la quale è soddisfatta da $y = a - x$. Infatti, sostituendo si ha:

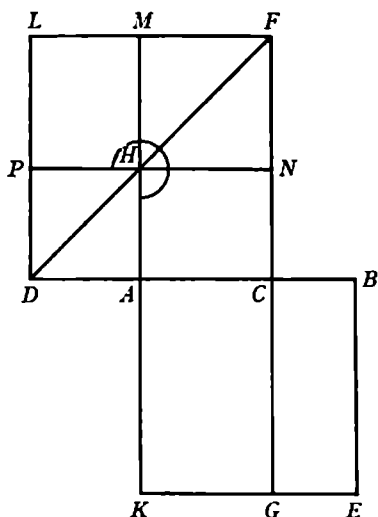
$$(a - x)^2 = x\,(x - a + x)$$

cioè:

$$a^2 - 2ax + x^2 = x^2 - ax + x^2$$
$$a^2 - ax = x^2$$

cioè l'equazione data in partenza.

dentemente come in II, 4], e si prolunghi FC oltre C sino a G. Ora, poiché AB è stata divisa in C in estrema e media ragione, il rettangolo di AB, CB è uguale al quadrato di AC (VI, def. III; VI, 17). Ma è $CBEG$ il rettangolo di AB, BC, mentre il quadrato di AC è $HNFM$, quindi $CBEG$ è uguale a $HNFM$. Poiché AB è il doppio di AD, ma AB è uguale ad AK, mentre AD è uguale ad AH, si ha che pure KA è il doppio di AH. Ma $KA : AH = ACGK : ACNH$ (VI, 1); perciò $ACGK$ è il doppio di $ACNH$. Ma anche la somma $LMHP + ACNH$ è il doppio di $ACNH$ [essendo $LMHP =$ $= ACNH$] (I, 43). Quindi $ACGK$ è uguale alla somma $LMHP + ACNH$. Ma fu dimostrato che sono pure uguali $CBEG$, $HNFM$, per cui tutto quanto il quadrato $ABEK$ è uguale al gnomone $HPLFCAH$. Ora, poiché AB è il doppio di AD, di quadrato di AB è il quadruplo del quadrato di AD, vale a dire $ABEK$ è quattro volte $DAHP$. Ma s'è dimostrato che $ABEK$ è uguale al gnomone, per cui anche il gnomone è il quadruplo di $DAHP$, e tutto quanto $DCFL$ è il quintuplo di $DAHP$. Ma $DCFL$ è il quadrato di DC, mentre $DAHP$ è il quadrato di DA; il quadrato di DC è quindi il quintuplo del quadrato di DA.

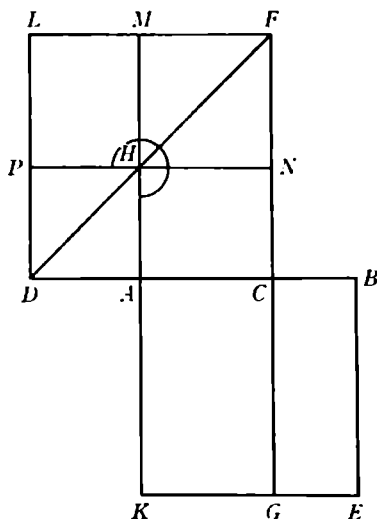
Dunque, se si divide una retta... (secondo l'enunciato). - C.D.D.

APPLICA: I, 10, 43; VI, 1, 17.

È APPLICATA IN: XIII, 6, 11.

PROPOSIZIONE 2.

Se il quadrato di una linea retta è il quintuplo del quadrato di una sua parte, e se si divide in estrema e media ragione il doppio della detta parte, la parte maggiore di detta divisione è uguale alla parte restante della retta data.

Infatti, il quadrato della linea retta DC sia il quintuplo di quello della sua parte DA, e AB sia il doppio di DA; dico che, se si divide AB in estrema e media ragione, la parte maggiore è AC [cioè il resto $DC - DA$].

Su ciascuna delle due rette DC, AB si descrivano difatti i quadrati $DCFL$, $ABEK$, in quello $DCFL$ si tracci la figura già usata precedentemente, e si conduca CG. Ora, poiché il quadrato di DC è per ipotesi il quintuplo del quadrato di DA, si ha che $DCFL$ è il quintuplo di $DAHP$. Quindi il gnomone $HPLFCAH$ è il quadruplo del quadrato $DAHP$. E poiché AB è il doppio di DA, il quadrato di AB è il quadruplo di quello di DA, vale a dire $ABEK$ è il quadruplo di $DAHP$. Ma fu dimostrato che pure il gnomone è il quadruplo del quadrato $DAHP$, quindi il gnomone è uguale al quadrato $ABEK$. E poiché AB è il doppio di DA, e inoltre AB è uguale ad AK, mentre DA è uguale ad AH, pure AK è il doppio di AH, ed anche il rettangolo $ACGK$ è il doppio del parallelogrammo $ACNH$ (VI, 1). Ma pure la somma dei parallelogrammi $LMHP$, $ACNH$ è il doppio del parallelogrammo $ACNH$ (I, 43); perciò $ACGK$ è uguale alla somma di $LMHP$, $ACNH$. Ma fu anche dimostrato che tutto quanto il gnomone è uguale a tutto quanto il quadrato $ABEK$, quindi il quadrato $HNFM$ che rimane tolti $LMHP$, $ACNH$ dal gnomone, è uguale a ciò che rimane sottraendo $ACGK$ da $ABEK$, ossia $HNFM = CBEG$. Ma $CBEG$ è il rettangolo di AB, CB – difatti AB è uguale a BE –, mentre $HNFM$ è il quadrato di AC: quindi il rettangolo di AB, CB è uguale al quadrato di AC. Perciò $AB : AC = AC : CB$ (VI, 17). Ma AB è maggiore di AC (cfr. lemma seguente); quindi AC

è maggiore di CB (V, 14). Se si divide perciò la retta AB in estrema e media ragione, AC ne è la parte maggiore.

Dunque, se il quadrato di una linea retta... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 43; V, 14; VI, 1, 17 e lemma seguente.

LEMMA [a]

Che poi una retta, la quale sia il doppio di DA, sia maggiore di AC, è da dimostrare nel modo seguente.

Se infatti non lo fosse, supponiamo, se possibile, che AC sia il doppio di DA. Il quadrato di AC è quindi, in tal caso, il quadruplo del quadrato di DA, per cui la somma dei quadrati di AC, DA è il quintuplo del quadrato di DA. Ma si è supposto che anche il quadrato di DC sia il quintuplo di quello di DA, per cui il quadrato di DC sarebbe uguale alla somma dei quadrati di AC, DA: il che è impossibile (II, 4). Quindi AC non può essere il doppio di DA. Similmente potremo dimostrare come nemmeno possa darsi che una retta minore di AC sia il doppio di DA: l'assurdità sarebbe difatti molto maggiore.

Dunque, una retta che sia il doppio di DA è maggiore di AC – C.D.D.

APPLICA: II, 4.

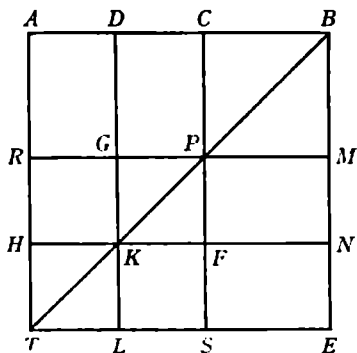
È APPLICATO IN: XIII, 2.

a. Dubitevole, per Heiberg, la genuinità del lemma, e perché non ve ne è necessità, e per la stessa forma locutiva greca.

PROPOSIZIONE 3.

Se si divide una linea retta in estrema e media ragione, il quadrato della parte minore aumentata della metà della parte maggiore è il quintuplo del quadrato della metà della parte maggiore.

Infatti, si divida una retta *AB* in estrema e media ragione nel punto *C*, sia *AC* la parte maggiore, e si divida *AC* per metà in *D*; dico che il quadrato di *DB* è il quintuplo del quadrato di *DC*.

Su *AB* si descriva difatti il quadrato *ABET*, e si tracci per due volte la figura già usata. Poiché *AC* è il doppio di *DC*, il quadrato di *AC* è il quadruplo del quadrato di *DC*, vale a dire *RPST* è il quadruplo di *GPFK*. Ora, poiché il rettangolo di *AB*, *CB* è uguale al quadrato di *AC* (VI, def. III; VI, 17), ed il rettangolo di *AB*, *CB* è il rettangolo *CBES*, si ha che *CBES* è uguale a *RPST*. Ma *RPST* è il quadruplo del quadrato *GPFK*, per cui anche *CBES* è il quadruplo di *GPFK*. Di nuovo, poiché *AD* è uguale a *DC*, pure *HK*, *KF* sono uguali. Cosicché è anche uguale il quadrato *GPFK* al quadrato *HKLT*. Quindi il lato *GK* è uguale al lato *KL*, vale a dire *MN* è uguale a *NE*, cosicché pure il parallelogrammo *MNFP* è uguale a quello *NESF*. Ma quello *MNFP* è uguale al parallelogrammo *DCPG* (I, 43); quindi anche *DCPG*, *NESF* sono uguali. Si aggiunga ad essi in comune il parallelogrammo *CBNF*; il gnomone *PGDBNFP* è perciò uguale al parallelogrammo *CBES*. Ma fu dimostrato che *CBES* è il quadruplo di *GPFK*, per cui pure il gnomone è il quadruplo del quadrato *GPFK*. Quindi la somma del gnomone e del quadrato *GPFK* è il quintuplo di *GPFK*. Ma la somma del gnomone e del quadrato

GPFK è uguale al quadrato *DBNK*. Ora, *DBNK* è il quadrato di *DB*, mentre *GPFK* è il quadrato di *DC*. Dunque, il quadrato di *DB* è il quintuplo del quadrato di *DC*. – C.D.D.

APPLICA: I, 43; VI, 17.

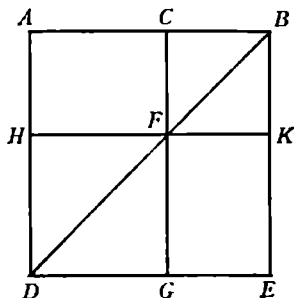
È APPLICATA IN: XIII, 16.

PROPOSIZIONE 4.

Se si divide una linea retta in estrema e media ragione, la somma del quadrato di tutta quanta la retta e di quello della parte minore è il triplo del quadrato della parte maggiore.

Sia *AB* una retta, la si divida in estrema e media ragione in *C*, ed *AC* sia la parte maggiore; dico che la somma dei quadrati di *AB*, *BC* è il triplo del quadrato di *AC*. Infatti, si descriva su *AB* il quadrato *ABED*, e si tracci la figura già usata. Poiché dunque *AB* è stata divisa in *C* in estrema e media ragione, ed *AC* ne è la parte maggiore, il rettangolo di *AB*, *CB* è uguale al quadrato di *AC* (VI, def. III; VI, 17). Ma il rettangolo di *AB*, *BC* è *ABKH*, mentre il quadrato di *AC* è *HFGD*; quindi *ABKH* è uguale a *HFGD*. Ora, poiché il parallelogrammo *ACFH* è uguale a quello *FKEG* (I, 43), si aggiunga ad essi in comune il quadrato *CBKF*; tutto quanto *ABKH* è quindi uguale a tutto quanto il parallelogrammo *CBEG*, quindi la somma *ABKH* + + *CBEG* è il doppio di *ABKH*. Ma la somma *ABKH* + + *CBEG* è uguale alla somma del gnomone *FHABEGF* e del quadrato *CBKF*; quindi la somma del gnomone e del quadrato *CBKF* è il doppio di *ABKH*. Ma fu tuttavia pure dimostrato che *ABKH* è uguale a *HFGD*; la somma del gnomone e [del quadrato *CBKF* è perciò il doppio di *HFGD*, cosicché la somma del gnomone e[a]] dei quadrati *CBKF*, *HFGD* è il triplo del quadrato *HFGD*. Ora, la somma del

a. Parole di genuinità men che dubbia, e d'ordinario, come fa Heiberg, omesse.

gnomone e dei quadrati *CBKF*, *HFGD* è uguale alla somma di tutto quanto *ABED* e di *CBKF*, che sono i quadrati di *AB*, *CB*; mentre *HFGD* è il quadrato di *AC*. Dunque, la somma dei quadrati di *AB*, *BC* è il triplo del quadrato di *AC*. – C.D.D.

APPLICA: I, 43; VI, 17.

È APPLICATA IN: XIII, 17.

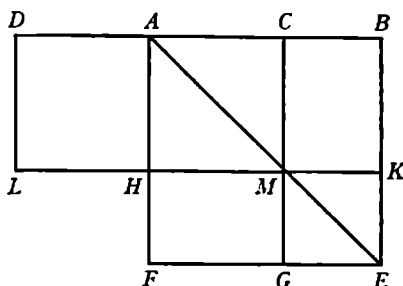
PROPOSIZIONE 5.

Se si divide una linea retta in estrema e media ragione, e si aggiunge ad essa la parte maggiore, la retta che ne risulta è divisa in estrema e media ragione, e la parte maggiore ne è la retta assunta inizialmente [a].

Infatti, si divida la linea retta *AB* in estrema e media ragione nel punto *C*, sia *AC* la sua parte maggiore, e la retta *AD* sia uguale ad *AC*. Dico che la retta *DB* è divisa in *A* in estrema e media ragione, e che la retta *AB* assunta inizialmente ne è la parte maggiore.

Su *AB* si descriva difatti il quadrato *ABEF*, e vi si tracci la figura già usata. Poiché *AB* è divisa in *C* in estrema e media ragione, il rettangolo di *AB*, *CB* è uguale al quadrato di *AC* (VI, def. III; VI, 17). Ora, il rettangolo di *AB*, *BC* è *CBEG*, mentre il quadrato di *AC* è *ACMH*, per cui *CBEG* è uguale ad *ACMH*. Ma il rettangolo *HKEF* è uguale a *CBEG* (I, 43), mentre ad *ACMH* è uguale il quadrato *DAHL*; perciò *DAHL*, *HKEF* sono uguali. Si aggiunga ad essi in comune il rettangolo *ABKH*. Tutto quanto il rettangolo *DBKL* è quindi uguale a tutto il quadrato *ABEF*.

a. Letterale nel testo.

Ma $DBKL$ è il rettangolo di DB, DA – difatti DA è uguale a DL –, mentre $ABEF$ è il quadrato di AB, per cui il rettangolo di DB, DA è uguale al quadrato di AB. Quindi DB sta ad AB come AB sta a DA (VI, 17). Ma DB è maggiore di AB; perciò anche AB è maggiore di DA (V, 14).

Dunque, DB è stata divisa in A in estrema e media ragione, ed AB è la parte maggiore di essa. – C.D.D.[a].

Applica: I, 43; V, 14; VI, 17.

È applicata in: XIII, 17.

Proposizione 6.

Se si divide una retta razionale in estrema e media ragione, ciascuna delle due parti è la retta irrazionale che si chiama apotome[2].

Sia AB una retta razionale, la si divida in estrema e media ragione in C, ed AC ne sia la parte maggiore; dico

a. Esiste una prova alternativa, riconosciuta come interpolata, riportata da Heiberg, IV, App. I, pp. 362-365.

[2] Secondo Heath, ma non secondo Heiberg, questa proposizione XIII, 6 non sarebbe opera genuina di Euclide, ma una interpolazione, pur antica.

Non entriamo nel merito della questione, che ci sembra comunque assai dubbia dal punto di vista dell'esame dei codici. Ma osserviamo che la XIII, 6 è una delle più belle proposizioni degli *Elementi*.

Anzitutto è da ammirare la sua classica semplicità: inoltre va detto che essa offre, nella dimostrazione, una delle più importanti applicazioni della teoria delle linee irrazionali svolta nel libro decimo.

Il risultato, inoltre, è importante di per sé, e viene applicato nella XIII, 17: ci sembra strano che (come afferma Heath, *op. cit.*, vol. III, p. 451) Euclide possa avere assunto (*assumed*) il risultato stesso come *evident enough from* XIII, 1 *without further proof*.

Viene, in questa XIII 6, dimostrato che la parte aurea di una retta razionale è la linea irrazionale detta *apotome*, che è stata introdotta nel

che ciascuna delle due rette AC, CB è la linea irrazionale che si chiama apotome.

Infatti, si prolunghi BA, e sul prolungamento si ponga AD uguale alla metà di BA. Poiché dunque la retta AB è stata divisa in C in estrema e media ragione, ed alla parte maggiore AC si aggiunge AD, che è la metà di AB, il quadrato di DC è il quintuplo del quadrato di DA (XIII, 1). Il quadrato di DC ha quindi con quello di DA il rapporto che un numero ha con un altro numero, per cui il quadrato di DC è commensurabile col quadrato di DA (X, 6). Ma il quadrato di DA è razionale – difatti DA, essendo la metà di AB, che è razionale, è razionale; perciò anche il quadrato

libro decimo (prop. 73) come differenza tra due rette razionali commensurabili tra loro soltanto in potenza. Ma c'è di più: anche la parte residua è una apotome, e precisamente è quella particolare apotome che, nella cosiddetta terza serie di definizioni che viene data dopo la prop. X, 84, viene indicata con il nome di prima apotome (ἀποτομὴ πρώτη).

La dimostrazione della XIII, 6 è, come s'è detto, classicamente semplice. Data la retta AB divisa in estrema e media ragione nel punto C in modo che AC sia la parte maggiore, o parte aurea, si stacca, sul prolungamento dalla parte di A, un segmento DA uguale alla metà di AB. Applicando la prop. XIII, 1, possiamo dire che il quadrato di DC è il quintuplo del quadrato costruito su DA. Quindi si ha:

$$q\,(DC) : q\,(DA) = 5 : 1$$

Quindi il quadrato di DC sta a quello di DA come un numero sta ad un numero, perciò i due quadrati sono tra loro commensurabili (X, 6). Ma 5 non è un numero quadrato, quindi il quadrato di DC non sta a quello di DA come un numero quadrato sta ad un numero quadrato, e pertanto DC, DA sono incommensurabili tra loro in lunghezza (X, 9) e quindi, per quel che s'è detto prima, sono commensurabili soltanto in potenza. E sono linee razionali, perché tale è DA che è la metà di AB, razionale per ipotesi. Perciò la parte aurea AC, che è la differenza tra DC e DA, è la differenza tra due rette razionali commensurabili tra loro soltanto in potenza, e quindi è la linea irrazionale detta *apotome*.

Inoltre il quadrato di AC è, per definizione di sezione aurea (cioè di divisione in estrema e media ragione), equivalente al rettangolo del segmento AB e della parte residua CB:

$$q\,(AC) = r\,(AB, CB)$$

Ma la X, 97 dice che se il quadrato di un'apotome è equivalente ad un rettangolo avente per base una retta razionale, l'altezza del rettangolo è la particolare linea detta *prima apotome*: ora il quadrato dell'apotome AC è equivalente al rettangolo di base razionale AB e di altezza CB; quindi CB è una *prima apotome*.

di DC è razionale (X, def. IV), ed è razionale pure DC. Ora, poiché il quadrato di DC non ha col quadrato di DA il rapporto che un numero quadrato ha con un altro numero quadrato, DC è incommensurabile in lunghezza con DA (X, 9), per cui DC, DA sono rette razionali commensurabili soltanto in potenza; quindi la loro differenza AC è un'apotome (X, 73). Di nuovo, poiché AB è stata divisa in estrema e media ragione, ed AC ne è la parte maggiore, il rettangolo di AB, CB è uguale al quadrato di AC (VI, def. III; VI, 17). Quindi il quadrato dell'apotome AC, applicato alla razionale AB, forma per larghezza BC. Ma il quadrato di un'apotome, se applicato ad una retta razionale, dà per altezza una prima apotome (X, 97); perciò CB è una prima apotome. E fu dimostrato che pure AC è un'apotome.

Dunque, se si divide una retta razionale... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

D A C B

APPLICA: VI, 17; X, 6, 9, 73, 97; XIII, 1.

È APPLICATA IN: XIII, 17.

PROPOSIZIONE 7.

Se in un pentagono equilatero sono uguali fra loro tre angoli, sia consecutivi, sia non consecutivi, il pentagono è equiangolo [3].

Infatti, nel pentagono equilatero $ABCDE$ siano uguali fra loro, dapprima, tre angoli consecutivi: [ad esempio] quelli

[3] Si ha ora un altro gruppo di proposizioni che considerano alcune proprietà dei pentagoni (XIII, 7, 8) e dei decagoni regolari in relazione, questi ultimi, a pentagoni ed esagoni regolari iscritti in uno stesso cerchio (XIII, 9, 10).

Più precisamente, nella XIII, 7 si dimostra che se un pentagono è equilatero, ma ha uguali tra loro tre angoli, esso ha uguali tra loro anche gli altri due, ossia è equiangolo: quindi è regolare. Va però osservato, per quanto riguarda la nomenclatura, che, come s'è visto nel libro quarto dedicato ai poligoni regolari, Euclide non adopera un termine equivalente al nostro « regolare », ma per esprimere lo stesso concetto parla di poligoni « equilateri ed equiangoli ».

La proprietà trattata nella XIII, 7 viene applicata in quella fonda-

con vertice, rispettivamente, in *A*, *B*, *C*; dico che il pentagono *ABCDE* è equiangolo.

Si traccino difatti le congiungenti *AC*, *BE*, *FD* [dove *F* è il punto comune alle rette *AC*, *BE*]. Ora, poiché i due lati *CB*, *BA* sono uguali rispettivamente ai due lati *BA*, *AE*, e l'angolo *CBA* è uguale all'angolo *BAE*, si ha che la base *AC* è uguale alla base *BE*, il triangolo *ABC* è uguale al triangolo *ABE*, e gli angoli rimanenti del primo triangolo saranno uguali agli angoli rimanenti del secondo, ossia quelli che sottendono i lati uguali, cioè *BCA* uguale a *BEA*, ed *ABE* uguale a *CAB* (I, 4); cosicché anche il lato *AF* è uguale al lato *BF* (I, 6). Ma fu dimostrato che è pure uguale tutta quanta *AC* a tutta quanta *BE*, per cui anche la parte *FC* che rimane [di *AC*, tolto *AF*,] è uguale alla parte rimanente *FE* [di *BE*, tolto *BF*]. Ma anche *CD*, *DE* sono uguali.

mentale proposizione che è la XIII, 17, per la costruzione del dodecaedro regolare.

Invece la proposizione seguente, XIII, 8, trova applicazione nella XIII, 11 nella quale, come vedremo, si stabilisce che se un pentagono equilatero viene iscritto in un cerchio di diametro razionale, il lato del pentagono è quella linea irrazionale che viene chiamata *minore* (ἐλάσσων) introdotta nella X, 76.

La XIII, 8, che appunto serve come lemma, è assai notevole: si tratta di due diagonali d'un pentagono regolare che partono da vertici diversi: esse si incontrano in modo da dividersi scambievolmente in estrema e media ragione: e le parti auree sono uguali al lato del pentagono. La dimostrazione mette in evidenza il fatto che una delle parti di ciascuna diagonale è uguale al lato del pentagono, e che insieme a questo e ad una parte dell'altra diagonale forma un triangolo isoscele nel quale ciascun angolo alla base è doppio dell'angolo al vertice (cfr. IV, 10).

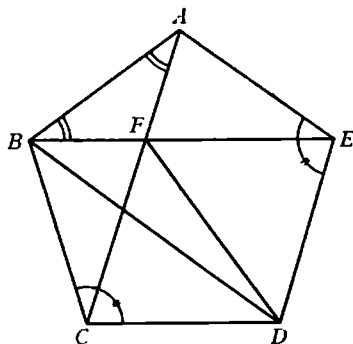
La XIII, 9 dimostra una singolare proprietà: se si riportano di séguito, sulla stessa retta, il lato d'un esagono e quello di un decagono equilateri ed iscritti in uno stesso cerchio, il segmento-somma così ottenuto è già diviso in media ed estrema ragione nelle sue parti, e precisamente la parte maggiore (parte aurea) è il lato dell'esagono.

Questa proprietà trova applicazione nella costruzione dell'icosagono regolare (XIII, 16).

Finalmente la XIII, 10 dà una notevolissima relazione tra il lato del pentagono, dell'esagono e del decagono, tutti regolari e iscritti nello stesso cerchio: precisamente si tratta di una relazione a carattere pitagorico: $l^2_5 = l^2_6 + l^2_{10}$ cioè il quadrato del lato del pentagono è equivalente alla somma dei quadrati dell'esagono e del decagono. Anche questa proprietà trova applicazione nella costruzione dell'icosagono (XIII, 16).

Quindi i due lati *FC*, *CD* sono uguali rispettivamente ai due lati *FE*, *ED*; e *FD* è loro base comune, per cui l'angolo *FCD* è uguale all'angolo *FED* (I, 8). Ma fu dimostrato che sono uguali pure gli angoli *BCA*, *AEB*; anche tutto quanto l'angolo *BCD* è perciò uguale a tutto quanto l'angolo *AED*. Ma *BCD* è per ipotesi uguale agli angoli coi vertici in *A*, *B*; anche *AED* è quindi uguale agli angoli coi vertici in *A*, *B*. Similmente potremo dimostrare che pure l'angolo *CDE* è uguale agli angoli coi vertici in *A*, *B*, *C*; dunque il pentagono *ABCDE* è equiangolo.

Ma sia adesso il caso in cui i tre angoli uguali non siano consecutivi: siano essi, invece, gli angoli coi vertici nei punti *A*, *C*, *D*; dico che anche così il pentagono *ABCDE* è equiangolo.

Infatti, si tracci la congiungente *BD*. E poiché i due lati *BA*, *AE* sono uguali rispettivamente ai due lati *BC*, *CD*, e gli uni e gli altri comprendono angoli uguali, si ha che la base *BE* è uguale alla base *BD*, il triangolo *ABE* è uguale al triangolo *BCD*, e gli angoli rimanenti del primo saranno uguali agli angoli rimanenti del secondo, quelli cioè che sottendono i lati uguali (I, 4); l'angolo *AEB* è perciò uguale all'angolo *CDB*. Ma pure gli angoli *BED*, *BDE* sono uguali, poiché è uguale pure il lato *BE* al lato *BD* (I, 5). Quindi anche tutto quanto l'angolo *AED* è uguale a tutto quanto l'angolo *CDE*. Ma *CDE* è per ipotesi uguale agli angoli coi vertici in *A*, *C*; pure l'angolo *AED* è perciò uguale agli angoli coi vertici in *A*, *C*. Per la stessa ragione, anche l'angolo *ABC* è uguale agli angoli coi vertici in *A*, *C*, *D*. Dunque, il pentagono *ABCDE* è equiangolo. – C.D.D.

APPLICA: I, 4, 5, 6, 8.

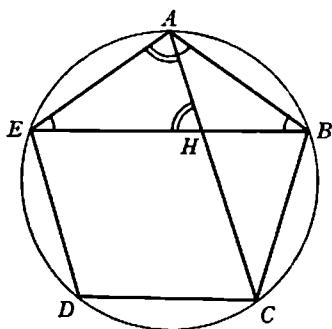
È APPLICATA IN: XIII, 17.

PROPOSIZIONE 8.

In un pentagono equilatero ed equiangolo le rette che sottendono due angoli consecutivi si dividono fra loro in estrema e media ragione, e le loro parti maggiori sono uguali al lato del pentagono.

Infatti, nel pentagono *ABCDE*, equilatero ed equiangolo, le rette *AC*, *BE* sottendano due angoli che siano l'uno di séguito all'altro, cioè quelli coi vertici in *A*, *B*, ed esse si dividano insieme fra loro nel punto *H*; dico che ciascuna risulta divisa nel punto *H* in estrema e media ragione, e che le loro parti maggiori sono uguali al lato del pentagono.

Si circoscriva difatti al pentagono *ABCDE* il cerchio *ABCDE* (IV, 14). Ora, poiché i due lati *EA*, *AB* sono uguali rispettivamente agli altri due *AB*, *BC* e comprendono, gli uni e gli altri, angoli uguali, si ha che la base *BE* è uguale alla base *AC*, il triangolo *ABE* è uguale al triangolo *ABC*, e gli angoli rimanenti del primo saranno uguali agli angoli rimanenti del secondo, quelli cioè che sottendono i lati uguali (I, 4). Quindi l'angolo *BAC* è uguale all'angolo *ABE*, per cui l'angolo *AHE* è il doppio dell'angolo *BAH* (I, 32). Ma anche l'angolo *EAC* è il doppio di quello *BAC*, dato che pure l'arco di circonferenza *EDC* è il doppio dell'arco di circonferenza *CB* (III, 28; VI, 33); l'angolo *HAE* è quindi uguale all'angolo *AHE*, cosicché anche la retta *HE* è uguale alla retta *EA*, vale a dire a quella *AB* (I, 6). E poiché la retta *AB* è uguale a quella *AE*, pure l'angolo *ABE* è uguale all'angolo *AEB* (I, 5). Ma fu dimostrato che l'angolo *ABE* è uguale all'angolo *BAH*, per cui sono uguali anche *BEA*, *BAH*. Ora, nei due triangoli *ABE* ed *ABH* l'angolo *ABE* è comune; perciò l'angolo *BAE* che rimane del primo è uguale all'angolo rimanente *AHB* del secondo (I, 32) ed il triangolo *ABE* ha gli angoli rispettivamente uguali a quelli del triangolo *ABH*; quindi $EB : AB = AB : BH$ (VI, 4). Ma *AB* è uguale ad *EH* [come s'è sopra dimostrato], quindi $EB : EH = EH : HB$. Ma *EB* è maggiore di *EH*; quindi *EH* è maggiore di *HB*. Dunque, *BE* è stata divisa in *H* in

estrema e media ragione, e la parte maggiore di essa, cioè *EH*, è uguale al lato del pentagono. Similmente potremo dimostrare che pure *AC* risulta divisa in *H* in estrema e media ragione, e che la parte maggiore di essa, cioè *CH*, è uguale al lato del pentagono. – C.D.D.

APPLICA: I, 4, 5, 6, 32; III, 28; IV, 14; VI, 4, 33.

È APPLICATA IN: XIII, 11.

PROPOSIZIONE 9.

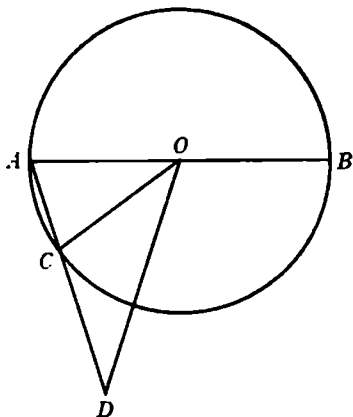
Se si sommano il lato di un esagono e quello di un decagono [equilateri], che siano iscritti nello stesso cerchio, la retta che ne risulta è divisa in estrema e media ragione, e la parte maggiore è il lato dell'esagono.

Sia *ABC* un cerchio, e *AC* sia il lato di un decagono [equilatero], e *CD* quello di un esagono [equilatero], figure ambedue iscritte nel cerchio *ABC*: siano inoltre i due lati sulla stessa retta [a]; dico che tutta quanta *AD*, risultante dalla loro somma [b] è divisa in estrema e media ragione, e che *CD* è la parte maggiore di essa.

Infatti, si prenda il centro del cerchio, ed esso sia il punto *O* (III, 1), si traccino le congiungenti *OA*, *OC*, *OD*, e si prolunghi *AO* oltre *O* sino a *B*. Poiché *AC* è il lato di un decagono equilatero, l'arco *ACB* è il quintuplo dell'arco *AC*; quindi l'arco *CB* è il quadruplo di quello *AC*. Ma l'arco *AC* sta all'arco *CB* come l'angolo *AOC* sta all'an-

a. Letteralmente: e delle figure iscritte nel cerchio *ABC*, sia *BC* lato di un decagono, e *CD* quello di un esagono, e siano essi per diritto.

b. Letteralmente: tutta quanta la retta *BD* – e basta naturalmente.

golo COB (VI, 33), per cui COB è il quadruplo di AOC. Ma poiché l'angolo OAC è uguale a quello ACO (I, 5), l'angolo COB è il doppio dell'angolo ACO (I, 32). E poiché la retta OC è uguale alla retta CD – ciascuna di esse è uguale difatti al lato dell'esagono [regolare] iscritto nel cerchio ABC –, anche gli angoli COD, CDO sono uguali (I, 5); l'angolo ACO è perciò il doppio dell'angolo CDO (I, 32). Ma fu dimostrato che l'angolo COB è il doppio di quello ACO; quindi l'angolo COB è il quadruplo dell'angolo CDO. Ma fu anche dimostrato che l'angolo COB è il quadruplo di quello AOC, quindi CDO è uguale ad AOC. Ma l'angolo OAC è angolo comune ai due triangoli AOC e AOD; è quindi anche uguale il rimanente angolo AOD all'angolo rimanente ACO (I, 32); perciò il triangolo AOD è equiangolo rispetto al triangolo AOC. Si ha quindi tra i lati la proporzione: $AD : AO = AO : AC$ (VI, 4). Ma AO è uguale a CD. Perciò; $AD : CD = CD : AC$. Ora, AD è maggiore di CD, quindi CD è maggiore di AC (V, 14). Dunque, la retta AD risulta divisa in C in estrema e media ragione, e CD è la parte maggiore. – C.D.D.

APPLICA: I, 5, 32; III, 1; V, 14; VI, 33.

È APPLICATA IN: XIII, 16, 18.

PROPOSIZIONE 10.

Se si iscrive in un cerchio un pentagono equilatero, il quadrato del lato del pentagono è uguale alla somma dei quadrati dei lati dell'esagono e del decagono [equilateri] che siano iscritti nello stesso cerchio.

Sia $ABCDE$ un cerchio, e nel cerchio $ABCDE$ si iscriva il pentagono equilatero $ABCDE$. Dico che il quadrato del

lato del pentagono *ABCDE* è uguale alla somma dei quadrati dei lati di un esagono e di un decagono equilateri iscritti nel cerchio *ABCDE*.

Infatti, si prenda il centro del cerchio, ed esso sia il punto *O* (III, 1), si tracci la congiungente *AO* e la si prolunghi oltre *O* sino al punto *G*, si tracci la congiungente *OB*, da *O* si conduca ad *AB* la perpendicolare *OH* e la si prolunghi oltre *H* sino a *K*, e si traccino le congiungenti *AK*, *KB*; di nuovo, si conduca da *O* ad *AK* la perpendicolare *OL*, la si prolunghi oltre *L* sino a *M*, e si tracci la congiungente *KN*. Poiché l'arco *ABCG* è uguale all'arco *AEDG*, e di essi la parte *ABC* è uguale alla parte *AED*, la parte *CG* che rimane del primo arco è uguale alla parte rimanente *GD* del secondo. Ma *CD* è l'arco relativo ad un lato del pentagono iscritto; quindi *CG* è l'arco relativo al lato di un decagono equilatero che sia iscritto nel cerchio. E poiché *OA* è uguale a *OB*, e *OH* è una perpendicolare, anche gli angoli *AOK*, *KOB* sono uguali (I, 5; I, 26). Cosicché è anche uguale l'arco *AK* all'arco *KB* (III, 26), quindi l'arco *AB* è il doppio dell'arco *BK*; e perciò la retta *AK* è il lato del decagono equilatero [di cui sopra]. Per la stessa ragione, pure l'arco *AK* è il doppio dell'arco *KM*. E poiché l'arco *AB* è il doppio dell'arco *BK*, mentre l'arco *CD* è uguale a quello *AB*, anche l'arco *CD* è il doppio dell'arco *BK*. Ma l'arco *CD* è pure il doppio dell'arco *CG*; perciò l'arco *CG* è uguale a quello *BK*. Ma *BK* è il doppio di *KM*, poiché lo è pure *KA*; quindi anche *CG* è il doppio di *KM*. Ma pure l'arco *CB* è il doppio dell'arco *BK* – difatti l'arco *CB* è uguale a quello *BA*. Anche tutto quanto l'arco *GB* è quindi il doppio dell'arco *BM*; cosicché pure l'angolo *GOB* è il doppio dell'angolo *BOM* (VI, 33). Ma *GOB* è il doppio pure dell'angolo *OAB* – l'angolo *OAB* è difatti uguale all'angolo *ABO* (I, 5; I, 32). Perciò anche gli angoli *BON*, *OAB* sono uguali. Ma l'angolo *ABO* è comune ai due triangoli *ABO* e *BON*, per cui l'angolo che rimane del primo è uguale all'angolo rimanente *BNO* del secondo (I, 32); il triangolo *ABO* è quindi equiangolo rispetto al triangolo *BON*. Perciò si ha la proporzione tra i lati: $AB : BO = BO : BN$ (VI, 4); quindi il rettangolo

di AB, BN è uguale al quadrato di BO (VI, 17). Di nuovo, poiché il lato AL è uguale a quello LK, e LN è comune e perpendicolare, la base KN è uguale alla base AN; e l'angolo LKN è uguale all'angolo LAN (I, 4). Ma l'angolo LAN è uguale all'angolo KBN (III, 29; I, 5); quindi pure l'angolo LKN è uguale a quello KBN. Ora, l'angolo col vertice in A è comune ai due triangoli AKB ed AKN. Perciò l'angolo AKB che rimane del primo è uguale all'angolo rimanente KNA del secondo (I, 32); il triangolo KBA è quindi equiangolo rispetto al triangolo KNA. Si ha, perciò, la proporzione tra i lati: $AB:AK = AK:AN$ (VI, 4); quindi il rettangolo di AB, AN è uguale al quadrato di AK (VI, 17). Ma fu pure dimostrato che il rettangolo di AB, BN è uguale al quadrato di BO, quindi la somma del rettangolo di AB, BN e del rettangolo di AB, AN, la quale è poi il quadrato di AB (II, 2), è uguale alla somma del quadrato di BO e del quadrato di AK. Ma AB è il lato del pentagono equilatero iscritto nel cerchio, BO è il lato dell'esagono equilatero (IV, 15, coroll.), ed AK quello del decagono equilatero che siano iscritti nello stesso cerchio.

Dunque, il quadrato del lato di un pentagono equilatero... (secondo l'enunciato). – C.D.D.

APPLICA: I, 4, 5, 26, 32; II, 2; III, 1, 26, 29; IV, 15 coroll.; VI, 4, 17.

È APPLICATA IN: XIII, 16, 18.

PROPOSIZIONE II.

Se si iscrive un pentagono equilatero in un cerchio che abbia diametro razionale, il lato del pentagono è la retta irrazionale che si chiama minore[1].

Infatti, nel cerchio *ABCDE*, avente il diametro razionale, si iscriva il pentagono equilatero *ABCDE*; dico che il lato del pentagono *ABCDE* è la retta irrazionale che si chiama *minore*.

Si prenda difatti il centro del cerchio, ed esso sia il punto *F* (III, 1), si traccino le congiungenti *AF*, *FB* e le si prolunghi oltre *F* sino ai punti *G*, *H*, si tracci la congiungente *AC*, e si ponga *FK* uguale alla quarta parte di *AF*[a]. Ora, *AF* è razionale; quindi anche *FK* è razionale. Ma pure *BF* è razionale; è quindi razionale *BK* che risulta dalla loro somma. E poiché l'arco *ACG* è uguale all'arco *ADG*, e di essi la parte *ABC* è uguale alla parte *AED*, la parte *CG* che rimane del primo arco è uguale alla parte rimanente *GD* del secondo. Tracciandosi inoltre la congiungente *AD*, verrà di conseguenza che gli angoli con vertice in *L* sono retti, e che *CD* è il doppio di *CL* (I, 4). Per la stessa ragione,

a. Si ponga *FK* (quale) quarta parte di *AF*.

[1] In questa proposizione XIII, 11 si dimostra che se un pentagono equilatero è iscritto in un cerchio di diametro razionale, il lato del pentagono è quella linea irrazionale che si chiama *minore*.

Ricordiamo come si definisce una tale retta irrazionale. Si parte dalla considerazione di due rette che siano tra loro incommensurabili in potenza, cioè tali che i quadrati costruiti su di esse siano incommensurabili. Si richiede inoltre che la somma di detti quadrati sia razionale, e che il rettangolo compreso tra le due rette sia area mediale.

Ricordiamo anche che s'intenda per area mediale. Si parte questa volta dalla considerazione di due rette che siano incommensurabili tra loro in lunghezza ma commensurabili in potenza (tali, ad esempio sono il lato e la diagonale di qualsiasi quadrato). Con dette due rette come dimensioni si formi un rettangolo, e si trasformi questo in un quadrato equivalente (II, 14). Ebbene: il lato di un tal quadrato si chiama *mediale* (o *retta mediale*), mentre quel quadrato vien detto *area mediale*, così come è *area mediale* qualunque figura (ad esempio un rettangolo) equivalente a quel quadrato.

anche gli angoli con vertice in M sono retti, ed AC è il doppio di CM. Poiché dunque l'angolo ALC è uguale all'angolo AMF, e quello LAC è comune ai due triangoli ACL ed AMF, l'angolo ACL che rimane del primo triangolo è uguale all'angolo rimanente MFA del secondo (I, 32), per cui il triangolo ACL è equiangolo rispetto al triangolo AMF; si ha quindi la proporzione tra i lati: $LC : AC = MF : AF$ (VI, 4), e si può prendere, rispettivamente il doppio dei termini antecedenti: perciò $2LC : AC = 2MF : AF$. Ma: $2MF : AF = MF : \frac{1}{2} AF$ quindi anche: $2LC : AC = MF :$ $: \frac{1}{2} AF$. E possono prendersi ugualmente le metà dei termini conseguenti; quindi: $2LC : \frac{1}{2} AC = MF : \frac{1}{4} AF$[a]. Ma il doppio di LC è CD, inoltre CM la metà di AC, e FK è per costruzione la quarta parte di AF, quindi: $CD : CM =$ $= MF : FK$.

Componendo, si ha pure: $(CD + CM) : CM = MK : FK$ (V, 18); quindi anche, il quadrato di $(CD + CM)$ sta al quadrato di CM come il quadrato di MK sta al quadrato di FK. E poiché, se si divide in estrema e media ragione una retta che sottenda due lati di un pentagono, com'è per la retta AC, la parte maggiore di essa è uguale al lato del pentagono, vale a dire a CD (XIII, 8), e poiché il quadrato della parte maggiore aumentata della metà di tutta quanta la retta è il quintuplo del quadrato della metà dell'intiera retta (XIII, 1), ed è CM la metà di tutta quanta AC, si ha che il quadrato di $(CD + CM)$ è il quintuplo del quadrato di CM. Ma fu dimostrato che il quadrato di $(CD +$ $+ CM)$ sta al quadrato di CM come il quadrato di MK sta al quadrato di FK, quindi il quadrato di MK è il quintuplo di quello di FK. Ma il quadrato di FK è razionale – difatti il diametro BH è razionale [e FK è la quarta parte

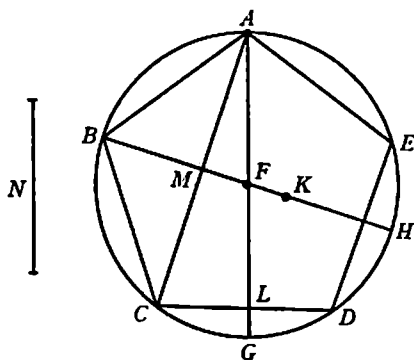
a. Letteralmente: in proporzione quindi è come LC a CA, così MF a FA; e degli antecedenti così i doppi; come perciò la (retta) doppia di LC alla CA, così la doppia di MF alla FA. Ma come la doppia di MF alla FA, così la MF alla metà di FA; quindi anche, come la doppia di LC alla CA, così la MF alla metà di FA. E così i doppi dei conseguenti; come quindi la doppia di LC alla metà di CA, così la MF ad un quarto della FA.

di AF, quindi la ottava parte di BH, per costruzione]; è quindi razionale anche il quadrato di MK, e MK è razionale. Ora, poiché BF è il quadruplo di FK, si ha che BK è il quintuplo di FK, quindi il quadrato di BK è venticinque volte il quadrato di FK. Ma il quadrato di MK è il quintuplo di quello di FK; il quadrato di BK è quindi il quintuplo del quadrato di MK; perciò il quadrato di BK non ha con quello di MK il rapporto che un numero quadrato ha con un altro numero quadrato, e BK è incommensurabile in lunghezza con MK. Ma ciascuna delle due rette è razionale. Quindi BK, MK sono due rette razionali commensurabili soltanto in potenza. Ma se da una retta razionale si sottrae un'altra retta razionale, che sia commensurabile con la prima soltanto in potenza, la differenza è la linea irrazionale detta apotome; quindi BM è un'apotome, come differenza $BK - MK$ (X, 73). Dico ora che BM è anche un'apotome quarta. Sia ora il quadrato di una retta N uguale alla differenza tra il quadrato di BK e il quadrato di MK: quindi il quadrato di BK supera quello di MK, del quadrato di N. E poiché FK è commensurabile con BF, sono pure commensurabili, *componendo*, BK con BF. Ma BF è commensurabile con BH; quindi anche BK è commensurabile con BH. E poiché il quadrato di BK è il quintuplo del quadrato di MK, il quadrato di BK ha con quello di MK il rapporto che 5 ha con 1. Perciò, *convertendo* (V, 19, coroll.), $q(BK) : [q(BK) - q(MK)] = 5 : (5 - 1)$, ossia: $q(BK) : q(N) = 5 : 4$. Ma $5 : 4$ non è rapporto che un numero quadrato abbia con un altro numero quadrato; BK è quindi incommensurabile con N (X, 9), quindi il quadrato di BK supera quello di MK del quadrato di una retta incommensurabile con BK. Poiché dunque il quadrato di tutta quanta BK supera quello della congruente KM del quadrato di una retta incommensurabile con BK, e tutta quanta BK è commensurabile con la retta razionale (per ipotesi BH, si ha che BM è una quarta apotome (X, deff. IIIe, 4). Ma un rettangolo compreso da una retta razionale e da una quarta apotome è irrazionale, ed una retta il cui quadrato sia uguale al rettangolo in questione è irrazionale, e si chiama *minore*

(X, 94). Ma il quadrato di AB è appunto uguale al rettangolo di BH, BM, poiché se tracciamo la congiungente AH, il triangolo ABH viene ad essere equiangolo rispetto al triangolo ABM (VI, 8) e BH sta ad AB come AB sta a BM (VI, 4).

Dunque, il lato AB del pentagono che consideriamo è la retta irrazionale che si chiama *minore*. – C.D.D.

APPLICA: I, 4, 32; III, 1; V, 18; VI, 4; X, 73, 94; XIII, 1, 8.

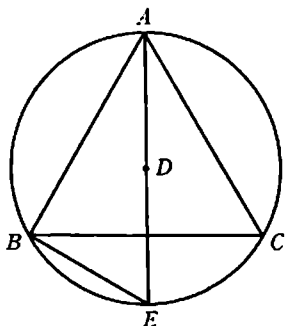
È APPLICATA IN: XIII, 16.

PROPOSIZIONE 12.

Se si iscrive in un cerchio un triangolo equilatero, il quadrato del lato del triangolo è il triplo del quadrato del raggio del cerchio[5].

Sia ABC un cerchio ed in esso si iscriva il triangolo equilatero ABC (IV, 2); dico che il quadrato di uno dei lati del triangolo ABC è il triplo di quello del raggio del cerchio ABC.

Infatti, si prenda il centro del cerchio ABC, ed esso sia D, si tracci la congiungente AD prolungandola oltre D sino ad E, e si tracci la congiungente BE. Ora, poiché il triangolo ABC è equilatero, l'arco BEC è la terza parte della circonferenza del cerchio ABC. Quindi l'arco BE è la sesta parte della circonferenza del cerchio, quindi la retta BE è il lato di un esagono equilatero iscritto: essa è perciò uguale

[5] Questa semplicissima e notissima proposizione permette di calcolare la lunghezza del lato di un triangolo equilatero iscritto in un cerchio di raggio dato. Essa trova il suo posto qui nel libro tredicesimo unicamente perché serve come lemma per la proposizione seguente XIII, 14 nella quale si costruisce il tetraedro regolare.

al raggio DE (IV, 15, coroll.). E poiché AE è il doppio di DE, il quadrato di AE è il quadruplo del quadrato di ED, vale a dire del quadrato di BE. Ma il quadrato di AE è uguale alla somma dei quadrati di AB, BE (III, 31; I, 47); la somma dei quadrati di AB, BE è quindi il quadruplo del quadrato di BE. Perciò, ***separando***, il quadrato di AB è il triplo di quello di BE. Ma BE è uguale a DE; il quadrato di AB è quindi il triplo del quadrato di DE.

Dunque, il quadrato di uno dei lati del triangolo considerato è il triplo del quadrato del raggio del cerchio. – C.D.D.

APPLICA: I, 47; III, 31; IV, 2, 15 coroll.

È APPLICATA IN: XIII, 13.

PROPOSIZIONE 13.

Costruire una piramide [tetraedro regolare], in modo che risulti iscritta in una sfera di diametro dato [a], *e dimostrare che il quadrato del diametro della sfera è una volta e mezzo il quadrato di uno spigolo della piramide* [6].

Sia AB il diametro della sfera data, lo si divida nel punto C in modo che AC sia il doppio di CB (VI, 10), su AB

a. Letteralmente: Costruire una piramide e comprenderla nella sfera data e dimostrare, ecc.

[6] Ha inizio con questa proposizione XIII, 13 la trattazione dell'argomento finale degli *Elementi*: la costruzione dei poliedri regolari. È stato detto che tale costruzione non rappresenta lo scopo vero e proprio di tutta la trattazione euclidea, nel senso che non è esatto che tutta la trattazione sia orientata proprio per giungere a questo traguardo finale. Così, ad esempio, nell'introduzione al libro decimo abbiamo osservato che troppo scarsa è l'applicazione che, di detto libro, vien fatta per la costruzione dei poliedri regolari, ed abbiamo prospettato l'ipotesi che, a prescindere

si descriva il semicerchio *ADB*, dal punto *C* si conduca *CD* perpendicolare ad *AB*, e si tracci la congiungente *DA*; si assuma poi un cerchio *EFG* che abbia il raggio uguale a *DC*, nel cerchio *EFG* si iscriva il triangolo equilatero *EFG* (IV, 2),

da tale applicazione, Euclide indugi sulla trattazione delle linee irrazionali nello spirito di chi coltiva *l'arte per l'arte*.

Ma è innegabile che la costruzione dei poliedri regolari, costituendo anche da un punto di vista materiale l'argomento finale, viene messa in particolare evidenza a conclusione degli *Elementi*.

L'argomento ha riflessi *platonici*, per dir così: infatti Platone tratta dei poliedri regolari nel *Timeo*, immaginando che le ultime particelle dei quattro elementi abbiano la forma di quattro poliedri regolari, riservando al quinto (il dodecaedro) una non determinata funzione di ordinata decorazione.

E precisamente al tetraedro (che è il più *aguzzo*) fece corrispondere il fuoco, all'ottaedro l'aria, all'icosaedro l'acqua, riservando la terra al cubo (che è per la sua forma il più *stabile*).

I poliedri regolari ricevettero perciò anche il nome di *figure cosmiche*, poiché in ultima analisi il *cosmo*, secondo il *Timeo*, sarebbe composto di particelle aventi la loro forma.

Proclo ne attribuisce la scoperta a Pitagora (cioè alla scuola pitagorica). Uno scolio al tredicesimo libro degli *Elementi* dice: « In questo libro si costruiscono i cosiddetti cinque corpi platonici, i quali però non sono dovuti a Platone, poiché tre di essi (il cubo, la piramide [cioè il tetraedro] e il dodecaedro) sono dovuti ai Pitagorici, e l'ottaedro e l'icosaedro a Teeteto ». È significativo che lo Scoliaste senta il bisogno di dire che la scoperta, o la costruzione che sia, dei poliedri regolari non sia dovuta a Platone: c'è ancora qui l'eco di quel fatto singolare consistente nell'attribuzione a Platone, da parte dei posteri, di tutte le scoperte e teorie matematiche dal filosofo esposte nei suoi Dialoghi.

Ben disse, invece, Proclo: « Platone fece prendere il massimo incremento alle altre scienze (matematiche) ed alla geometria, per il suo grande amore verso di esse: ciò è manifesto perché riempì i suoi scritti di considerazioni matematiche e dovunque destò ammirazione per questa scienza in coloro che studiano la filosofia ».

Sappiamo oggi bene che Platone non fu un matematico, ma che fu un grande animatore di studi matematici, dato che alla matematica egli attribuisce, nel suo sistema filosofico, la funzione di intermediario, di *argano*, per giungere, con la dialettica, alla contemplazione delle Idee (cfr. A. Frajese, *Platone e la matematica nel mondo antico*, Roma, Studium, 1963).

Vediamo ora come Euclide ci dà la costruzione dei poliedri regolari. Per tutt'e cinque i poliedri Euclide propone il problema in questo modo: è data una retta (un segmento) e si vuole costruire un poliedro regolare che sia iscrivibile in una sfera avente quella retta come diametro.

Ecco quindi l'enunciato di questa XIII, 13: « Costruire una piramide (cioè un tetraedro regolare) in modo che possa venire iscritta in una

si prenda il centro del cerchio e sia esso il punto H, e si traccino le congiungenti EH, HF, HG; dal punto H si innalzi HK perpendicolarmente al piano del cerchio EFG, si ponga

sfera di diametro dato » (letteralmente: costruire una piramide e iscriverla in una sfera data). E similmente per gli altri poliedri.

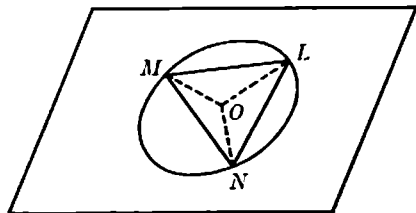
Vediamo di analizzare, a titolo di esempio, la costruzione del tetraedro regolare. Va subito detto che non soltanto impiegheremo la precedente proposizione XIII, 12 sul triangolo equilatero (il quadrato del cui lato è triplo del quadrato del raggio del cerchio circoscritto), ma anche il *lemma* che fa séguito alla proposizione. Detto *lemma* dice che in un triangolo rettangolo ADB, se dal vertice D dell'angolo retto si abbassa la perpendicolare DC sull'ipotenusa AB, si ha la proporzione:

$$AB : CB = q\,(AD) : q\,(DC)$$

infatti $AB : CB = r\,(AB, AC) : r\,(CB, AC)$ perché rettangoli aventi la stessa altezza stanno tra loro come le basi (VI, 1). Ma $r\,(AB, AC) = q(AD)$ (quello che oggi spesso chiamiamo *teorema di Euclide*, e che, replicato, porta al teorema di Pitagora), mentre $r\,(CB, AC) = q\,(DC)$ (il cosiddetto secondo teorema di Euclide sull'altezza del triangolo rettangolo media proporzionale tra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa). Segue appunto: $AB : CB = q\,(AD) : q\,(DC)$.

Passiamo ora alla costruzione del tetraedro regolare, che deve risultare inscrivibile in una sfera di diametro dato. Si veda la figura di sinistra di p. 1015.

Consideriamo il semicerchio generatore della sfera. Dunque AB è il diametro dato. Supponiamo che il tetraedro da costruire debba avere un vertice in A e che l'altezza che da A cada sulla faccia opposta (base) proceda lungo AB. Naturalmente l'altezza del tetraedro iscritto sarà minore del diametro della sfera, e sarà quindi una parte del diametro AB, ad esempio AC. Certamente, a causa della simmetria della figura trattandosi di un poliedro regolare, il punto C sarà anche il centro del cerchio che si otterrà intersecando la sfera con un piano perpendicolare ad AC, ossia col piano al quale appartiene il triangolo di base (opposta ad A) del tetraedro.

Di detto cerchio *di base*, CD sarà il raggio (se DC è perpendicolare ad AB), mentre AD sarà lo *spigolo* del tetraedro (supponendo che D sia un vertice del triangolo di base).

Evidentemente tutto sta, per eseguire la costruzione, nello scegliere convenientemente la posizione del punto C sul diametro AB, imponendo la condizione che il triangolo equilatero (di base) risulti uguale (cioè di uguale lato) rispetto ai triangoli laterali (che devono risultare pure equilateri e uguali tra loro).

Ebbene: sia LMN il cerchio *di base*, e si sia iscritto in esso il triangolo equilatero LMN. Sia O il centro del cerchio (e del triangolo) sicché:

$$OL = OM = ON = r \text{ (raggio del cerchio di base)}$$

HK uguale alla retta *AC*[a], e si traccino le congiungenti *KE*, *KF*, *KG*. Ora, poiché *KH* è perpendicolare al piano del cerchio *EFG*, essa formerà angoli retti con tutte le rette che la incontrino e che siano sul piano del cerchio *EFG* (XI, def. III). Ma la incontra ciascuna delle rette *HE*, *HF*, *HG*, quindi *HK* è perpendicolare a ciascuna delle rette *HE*,

a. Letteralmente: da *HK* si sottragga (al solito, risulti sottratta) la (retta) *HK* uguale alla retta *AC*.

Ma dalla XIII, 12 abbiamo:

$$q\,(NL) = 3\,q\,(OL)$$

E se il lato del triangolo di base deve essere anche *spigolo* (dato che in un poliedro regolare tutti gli spigoli devono essere uguali) si deve avere:

$$NL = AD \text{ e } OL = CD\ ;$$

quindi la relazione precedente diviene:

$$q\,(AD) = 3q\,(CD)$$

ossia:

$$q\,(AD) : q\,(CD) = 3 : 1$$

Ma per il lemma prima veduto si ha:

$$q\,(AD) : q\,(CD) = AB : CB$$

dunque deve essere:

$$AB : CB = 3 : 1$$

ossia:

$$AB = 3\,CB$$

che val quanto dire:

$$AC = 2\,CB$$

Ecco dunque la posizione del punto *C*: deve trovarsi a due terzi di *AB*. Euclide ha compiuto naturalmente una tale *analisi* del problema, ma espone la sintesi: cioè parte proprio da questa conclusione e dimostra poi la giustezza della costruzione conseguentemente realizzata. E infatti Euclide comincia così la sua esposizione: « Sia *AB* il diametro della sfera data e lo si divida nel punto *C* in modo che *AC* sia il doppio di *CB* » e prosegue in conseguenza.

Nella proposizione XIII, 13 si dimostra pure che il quadrato del diametro della sfera è una volta e mezzo il quadrato dello spigolo del tetraedro regolare iscritto.

Infatti, applicando il cosiddetto *teorema di Euclide* al triangolo rettangolo *ADB* si ha:

$$q\,(AD) = r\,(AB \cdot AC) = r\left(AB \cdot \frac{2}{3}\,AB\right) = \frac{2}{3}\,q\,(AB)$$

da cui:

$$q\,(AB) = \frac{3}{2}\,q\,(AD)$$

HF, *HG*. E poiché *AC* è uguale a *HK*, *CD* è uguale a *HE*, e le une e le altre comprendono angoli retti, la base *DA* è uguale alla base *KE* (I, 4). Per la stessa ragione, anche ognuna delle due rette *KF*, *KG* è uguale a *DA*; quindi le tre rette *KE*, *KF*, *KG* sono uguali fra loro. E poiché *AC* è il doppio di *CB*, si ha che *AB* è il triplo di *BC*. Ma *AB* sta a *BC* come il quadrato di *AD* sta al quadrato di *DC*, come si dimostrerà (cfr. lemma seguente). Perciò il quadrato di *AD* è il triplo di quello di *DC*. Ma pure il quadrato di *FE* è il triplo del quadrato di *EH* (XIII, 12), e *DC* è uguale ad *EH*, quindi anche *DA*, *EF* sono uguali. Ma fu dimostrato che *DA* è uguale a ciascuna delle rette *KE*, *KF*, *KG*; pure ognuna delle rette *EF*, *FG*, *GE* è perciò uguale a ciascuna delle rette *KE*, *KF*, *KG*: quindi i quattro triangoli *EFG*, *KEF*, *KFG*, *KEG* sono equilateri. Dunque, con quattro triangoli equilateri si è costruita una piramide [tetraedro regolare], di cui è base il triangolo *EFG* e vertice il punto *K*.

Adesso si deve [dimostrare che è possibile] iscriverla nella sfera di diametro dato e dimostrare che il quadrato del diametro della sfera è una volta e mezzo il quadrato di uno spigolo della piramide.

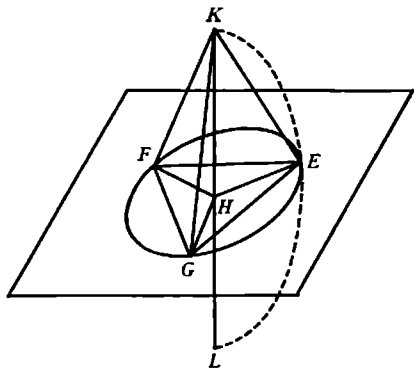
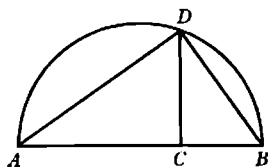
Infatti, si prolunghi la retta *KH* dalla parte di *H*[a] e sul prolungamento si stacchi $HL = CB$. Ora, poiché $AC : CD = CD : CB$ (VI, 8, coroll.), $AC = KH$, $CD = HE$, $CB = HL$, si ha: $KH : HE = HE : HL$, quindi il rettangolo di *KH*, *HL* è uguale al quadrato di *HE* (VI, 17). Ma ciascuno dei due angoli *KHE*, *EHL* è retto; perciò il semicerchio che sia descritto su *KL* verrà a passare anche per il punto *E*[, giacché, tracciando noi la congiungente *EL*, l'angolo *LEK* risulterà retto, per essere il triangolo *ELK* equiangolo rispetto a ciascuno dei due triangoli *ELH*, *EHK*]. Se allora, mentre resta immobile *KL*, di nuovo si riporta il semicerchio, dopo che si sia fatto ruotare attorno ad essa, nello stesso punto da cui si cominciò a farlo muovere, esso passerà anche per i punti *F*, *G*, dato che, tracciando noi le congiungenti *FL*,

a. Letteralmente: si prolunghi per diritto, in retta, a *KH* la retta *HL*.

LG, allo stesso modo di prima verranno pure ad essere retti gli angoli coi vertici in *F*, *G*, e la piramide che consideriamo risulterà iscritta nella sfera data. Difatti *KL*, diametro della sfera, è uguale al diametro *AB* della sfera data, giacché ponemmo *KH* uguale ad *AC*, e *HL* uguale a *CB*.

Dico adesso che il quadrato del diametro della sfera è una volta e mezzo il quadrato dello spigolo della piramide.

Infatti, poiché *AC* è il doppio di *CB*, si ha che *AB* è il triplo di *CB*; si ha quindi, *convertendo*, che *AB* è tre volte la metà di *AC*, ossia che *AB* è una volta e mezzo *AC*. Ma *AB* sta ad *AC* come il quadrato di *AB* sta al quadrato di *AD*[, dato che, se tracciamo *DB*, si ha che *AB* sta ad *AD* come *AD* sta ad *AC*, e che la prima retta *AB* sta alla terza *AC* come il quadrato della prima sta al quadrato della seconda (VI, 19 coroll.)]. Anche il quadrato di *AB* è perciò una volta e mezzo il quadrato di *AD*. Ora *AB* è il diametro della sfera data, ed *AD* è uguale allo spigolo della piramide.

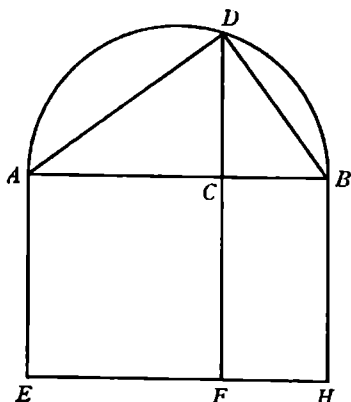
Dunque, il quadrato del diametro di una sfera... (secondo l'enunciato)[a]. – C.D.D.

APPLICA: I, 4; IV, 2; VI, 8 coroll., 10, 17; XIII, 2, il lemma seguente.

È APPLICATA IN: XIII, 18.

a. Il testo manca del vocabolo δυνάμει, *in potenza*, parlando del diametro e non del quadrato del diametro, ma è senz'altro da integrare, visto l'enunciato.

LEMMA

Si deve dimostrare che AB sta a CB come il quadrato di AD sta al quadrato di DC.

Infatti, si descriva il semicerchio [come prima], si tracci la congiungente DB, su AC si descriva il quadrato $ACFE$, e si completi il parallelogrammo $CBHF$. Poiché dunque, essendo i triangoli DAB, DAC equiangoli fra loro, $AB : AD = AD : AC$ (VI, 8; VI, 4), si ha che $r(AB, AC) = q(AD)$ (VI, 17). E poiché $AB : CB = ABHE : CBHF$ (VI, 1), ed $ABHE$ è il rettangolo di AB, AC – difatti EA è uguale ad AC –, mentre $CBHF$ è il rettangolo di AC, CB, si ha: $AB : CB = r(AB, AC) : r(AC, CB)$. Ma $r(AB, AC) = q(AD)$, mentre $r(AC, CB) = q(DC)$: la perpendicolare DC è difatti media proporzionale fra le parti AC, CB della base AB (VI, 8, coroll.), dato che l'angolo ADB è retto (III, 31). Dunque, AB sta a CB come il quadrato di AD sta al quadrato di DC. – C.D.D.

APPLICA: III, 31; VI, 1, 4, 8, 8 coroll., 17.

È APPLICATO IN: XIII, 13.

PROPOSIZIONE 14.

Costruire un ottaedro e iscriverlo in una sfera di diametro dato, così come si è fatto prima, e dimostrare che il quadrato del diametro della sfera è il doppio di quello dello spigolo dell'ottaedro [7].

Si assuma il diametro della sfera data, ed esso sia AB, lo si divida per metà in C, su AB si descriva il semicer-

[7] In questa proposizione XIII, 14 si costruisce l'ottaedro regolare, in modo che esso possa iscriversi in una sfera di diametro dato. L'ottaedro

chio *ADB*, da *C* si conduca *CD* perpendicolare ad *AB*, e si tracci la congiungente *DB*; si assuma poi il quadrato *EFGH*, avente ciascuno dei lati uguale a *DB*, e si traccino le congiungenti *HF*, *EG* [che si taglino nel punto *K*]: dal punto *K* si innalzi la retta *KL* perpendicolare al piano del quadrato *EFGH* (XI, 12), prolungandola dall'altra parte del piano in questione, e si stacchino *KL*, *KM* uguali ad una delle rette *EK*, *FK*, *GK*, *HK* (I, 3) e si traccino le congiungenti *LE*, *LF*, *LG*, *LH*, *ME*, *MF*, *MG*, *MH*. Ora, poiché *KE* è uguale a *KH*, e l'angolo *EKH* è retto, il quadrato di *EH* è il doppio del quadrato di *EK* (I, 47). Di nuovo, poiché *LK* è uguale a *KE*, e l'angolo *LKE* è retto, il quadrato di *EL* è il doppio di quello di *EK* (id.). Ma fu dimostrato che anche il quadrato di *EH* è pure il doppio del quadrato di *EK*, per cui il quadrato di *EL* è uguale al quadrato di *EH*, ed *EL* è uguale ad *EH*. Per la stessa ragione, pure *LH*, *HE* sono uguali; quindi il triangolo *LEH* è equilatero. Similmente potremo dimostrare che anche ciascuno dei triangoli rimanenti, di cui sono basi i lati del quadrato *EFGH* e vertici i punti *L*, *M*, è equilatero; dunque,

regolare ha otto facce triangolari equilatere tutte uguali tra loro, e ne concorrono quattro in ogni vertice. Se, quindi, consideriamo i quattro triangoli aventi un vertice comune, le loro quattro basi (cioè i lati di ciascun triangolo opposti a quel vertice) formano un quadrangolo che, a causa della simmetria della figura, deve essere un quadrato. Il piano di questo quadrato, sempre a causa della necessaria simmetria, deve dividere a metà la congiungente il vertice *A* considerato col vertice opposto *B*. Ciò vale quanto dire che il piano del quadrato sega il diametro *AB* della sfera circoscritta nel suo punto medio *C*, ossia nel centro della sfera. Per costruire l'ottaedro partendo dal semicerchio *ADB* generatore della sfera, basta dunque prendere il punto medio *C* del diametro *AB*, condurre la perpendicolare *CD* ad *AB*, congiungere *D* con *A* e con *B*: allora *CD* è la sezione del semicerchio col piano del quadrato di cui s'è parlato, e $AD = DB$ sono spigoli dell'ottaedro.

Così appunto fa Euclide nella sua costruzione, della quale abbiamo eseguito l'*analisi*.

E poiché il triangolo *ADB* è rettangolo e isoscele, si ha:

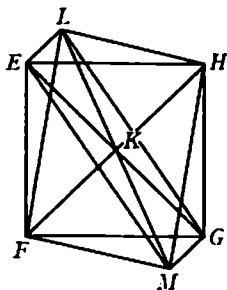
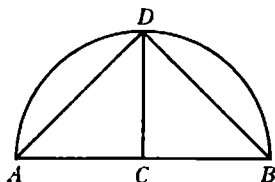
$$q\,(AB) = 2q\,(AD)$$

ossia il quadrato del diametro della sfera è il doppio del quadrato dello spigolo dell'ottaedro regolare in essa iscritto.

si è costruito un ottaedro compreso da otto triangoli equilateri.

Adesso si deve pure [dimostrare che è possibile] iscriverlo nella sfera di diametro dato e dimostrare che il quadrato del diametro della sfera è il doppio di quello dello spigolo dell'ottaedro.

Infatti, poiché le tre rette LK, KM, KE sono uguali fra loro, il semicerchio che sia descritto su LM verrà a passare anche per il punto E. Per la stessa ragione, se resta immobile LM e si riporta il semicerchio, dopo averlo fatto ruotare attorno ad essa, nello stesso punto da cui si cominciò a farlo muovere, esso passerà anche per i punti F, G, H, e l'ottaedro risulterà iscritto in una sfera. Dico ora che esso lo è, inoltre, proprio in quella di diametro dato. Infatti, poiché LK è uguale a KM, mentre KE è comune [alle due], e [sia LK, KE che KE, KM] comprendono angoli retti, la base EL è uguale alla base EM (I, 4). E poiché l'angolo LEM è retto – è difatti iscritto (come s'è veduto) in un semicerchio (III, 31) –, il quadrato di LM è il doppio del quadrato di EL (I, 47). Di nuovo, poiché AC è uguale a CB, si ha che AB è il doppio di BC. Ma AB sta a BC come il quadrato di AB sta al quadrato di BD [infatti: $AB : DB = DB : CB$, da cui: $AB : CB =$ duplicato (AB : : DB)] (VI, 8; V, def. IX; VI, 19 coroll.), per cui il quadrato di AB è il doppio del quadrato di BD. Ma fu dimostrato che il quadrato di LM è il doppio di quello di EL. Ed il quadrato di DB è uguale al quadrato di EL – difatti ponemmo EH uguale a DB [e s'è veduto che è $EH = EL$]. Quindi anche i quadrati di AB, LM sono uguali, ed AB è così uguale a LM. Ma AB è il diametro della sfera data; perciò LM è uguale al diametro della sfera data.

Dunque, l'ottaedro è stato iscritto nella sfera di diametro dato; e si è insieme dimostrato che il quadrato del diametro della sfera è il doppio del quadrato dello spigolo dell'ottaedro. – C.D.D.

APPLICA: I, 3, 4, 47; III, 31; VI, 19 coroll.; XI, 12.

È APPLICATA IN: XIII, 18.

PROPOSIZIONE 15.

Costruire un cubo iscrivendolo in una sfera di diametro dato, come si è fatto per la piramide, e dimostrare che il quadrato del diametro della sfera è il triplo del diametro dello spigolo del cubo [8].

Sia AB il diametro della sfera data, lo si divida in C in modo che AC sia il doppio di CB (VI, 10), su AB si

[8] Nella XIII, 15 viene costruito l'esaedro regolare, cioè il cubo, in modo che risulti iscrivibile in una sfera di diametro dato.

Se si considera la diagonale KG del cubo, ossia il diametro della sfera circoscritta, si vede che il suo quadrato è il triplo del quadrato dello spigolo EH del cubo. Basta infatti applicare due volte il teorema di Pitagora: una prima volta al triangolo rettangolo isoscele EHG, che ci dà:

$$q\,(EG) = 2q\,(EH)$$

e una seconda volta al triangolo rettangolo KEG ottenendo:

$$q\,(KG) = q\,(EG) + q\,(KE) = 2q\,(EH) + q\,(EH) = 3q\,(EH)$$

ossia:

$$q\,(d) = 3q\,(s_6)$$

(dove con d s'intende il diametro della sfera circoscritta e con s_6 lo spigolo dell'esaedro regolare, cioè del cubo). Ora se si considera il quadrato del lato DB del triangolo rettangolo ABD, e si supponga che, come per la costruzione del tetraedro, si abbia $AC = 2CB$, ossia $AB = 3CB$, si ha:

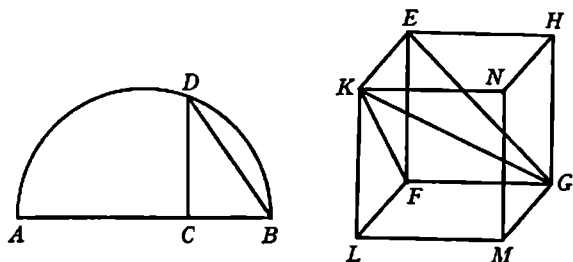
$$q\,(DB) = r\,(AB \cdot CB) = r\left(AB \cdot \frac{1}{3}\,AB\right) = \frac{1}{3}\,q\,(AB)$$

cioè il quadrato di DB è la terza parte del quadrato del diametro AB della sfera circoscritta: quindi DB è lo spigolo del cubo richiesto.

descriva il semicerchio *ADB*, da *C* si conduca *CD* perpendicolare ad *AB*, e si tracci la congiungente *DB*; si costruisca poi il quadrato *EFGH*, avente il lato uguale a *DB*, e da *E*, *F*, *G*, *H* si conducano *EK*, *FL*, *GM*, *HN* perpendicolarmente al piano del quadrato *EFGH*; si stacchi su ciascuna perpendicolare una retta (*EK*, *FL*, *GM*, *HN*) uguale ad una delle altre rette *EF*, *FG*, *GH*, *HE*, e si traccino le congiungenti *KL*, *LM*, *MN*, *NK*: si è quindi costruito il cubo *FN*, compreso da sei quadrati uguali. Adesso si deve pure mostrare che esso si può iscrivere nella sfera di diametro dato e dimostrare che il quadrato del diametro della sfera è il triplo del quadrato dello spigolo del cubo.

Infatti, si traccino le congiungenti *KG*, *EG*. Ora, poiché l'angolo *KEG* è retto, dato che *KE* è perpendicolare al piano *EFGH* di *EG*, ed anche alla retta *EG* di detto piano (XI, def. III), si ha che il semicerchio descritto su *KG* verrà a passar pure per il punto *E*. Di nuovo, poiché *GF* è perpendicolare a ciascuna delle due rette *FL*, *FE*, si ha che *GF* è perpendicolare al piano *EFLK* (XI, 4), cosicché pure, tracciandosi la congiungente *FK*, la *GF* sarà perpendicolare anche a *FK*: e perciò, di nuovo, il semicerchio descritto su *GK* passerà anche per *F*. Similmente verrà pure a passare per gli altri vertici del cubo. Se dunque, mentre resta immobile *KG*, si riporta il semicerchio, dopo che lo si sia fatto ruotare attorno ad essa, nello stesso punto da cui si cominciò a farlo muovere, il cubo risulterà iscritto in una sfera. Dico, ora, che inoltre lo è proprio in quella di diametro dato. Infatti, poiché *GF* è uguale a *FE*, e l'angolo con vertice in *F* è retto, il quadrato di *EG* è il doppio del quadrato di *EF* (I, 47). Ma *EF* è uguale ad *EK*, quindi il quadrato di *EG* è il doppio di quello di *EK*; cosicché la somma dei quadrati di *EG*, *EK*, vale a dire il quadrato di *GK*, è il triplo del quadrato di *EK*. Ma poiché *AB* è il triplo di *BC*, e poiché *AB* sta a *BC* come il quadrato di *AB* sta al quadrato di *BD* (cfr. prop. precedente) (VI, 8; V, def. IX; VI, 22), il quadrato di *AB* è il triplo del quadrato di *BD*. Ma fu dimostrato che pure il quadrato di *GK* è il triplo di quello di *KE*. Ponemmo inoltre *KE* uguale a *DB*, quindi sono

uguali anche KG, AB. Ora, AB è il diametro della sfera data; perciò anche KG è uguale al diametro della sfera data.

Dunque, si è iscritto un cubo in una sfera di diametro dato; e si è dimostrato che il quadrato del diametro della sfera è il triplo del quadrato dello spigolo del cubo. – C.D.D.

APPLICA: I, 47; VI, 8, 10, 22; XI, 4.

È APPLICATA IN: XIII, 17, 18.

PROPOSIZIONE 16.

Costruire un icosaedro iscrivendolo in una sfera di diametro dato, come si è fatto per le figure indicate prima, e dimostrare che il lato dell'icosaedro è la retta irrazionale che si chiama minore *[rispetto al diametro assunto come retta razionale]* [9].

Sia AB il diametro della sfera data, lo si divida in C in modo che AC sia il quadruplo di CB (VI, 10), su AB si

[9] Per orientarsi nella costruzione dell'icosaedro regolare, cioè del poliedro regolare di 20 facce triangolari, si può osservare che in ogni vertice concorrono 5 facce, quindi 5 spigoli. Se, quindi, si parte da due vertici opposti Z, X e in due punti V, W (da determinare, ma comunque tali che sia $WZ = VX$) si taglia la XZ con due piani perpendicolari alla XZ stessa, le sezioni di ciascuno di detti piani con l'icosaedro sono due pentagoni regolari uguali. Congiungendo i vertici di ciascun pentagono rispettivamente con Z e X si ottengono 10 facce triangolari dell'icosaedro. Le altre 10 facce si ottengono congiungendo ciascun vertice del primo pentagono con due determinati vertici consecutivi del secondo pentagono, e così pure ciascun vertice del secondo pentagono con due vertici consecutivi del primo.

La dimostrazione risulta complicata: tuttavia la costruzione è abbastanza semplice. Si divide questa volta il diametro $AB = d$ della sfera

descriva il semicerchio ADB, si conduca da C la linea retta CD perpendicolare ad AB, e si tracci la congiungente DB; si costruisca poi il cerchio $EFGHK$, il cui raggio sia uguale a DB, e nel cerchio $EFGHK$ si descriva il pentagono equilatero ed equiangolo $EFGHK$ (IV, 11); si dividano gli archi EF, FG, GH, HK, KE per metà nei punti L, M, N, O, P, e si traccino le congiungenti LM, MN, NO, OP, PL, EP. Anche il pentagono $LMNOP$ è quindi equilatero, e la retta EP è il lato di un decagono equilatero iscritto nello stesso cerchio. Si innalzino ora dai punti E, F, G, H, K, perpendicolarmente al piano del cerchio, le rette EQ, FR, GS, HT, KU, che siano uguali al raggio del cerchio $EFGHK$, e si traccino le congiungenti QR, RS, ST, TU, UQ, QL, LR, RM, MS, SN, NT, TO, OU, UP, PQ. E poiché ciascuna delle due rette EQ, KU è perpendicolare ad uno stesso piano,

data in cinque parti uguali, ed una di esse è CB (ossia $AB = 5\,CB$). Si prende uguale al cateto DB il raggio r dei cerchi nei quali si iscrivono i pentagoni regolari di cui s'è parlato; quindi si ha:

$$q(r) = q(DB) = r(AB \cdot CB) = r\left(AB \cdot \frac{1}{5} AB\right) = \frac{1}{5} q(AB)$$

Quindi:

$$q(AB) = q(d) = 5\,q(r)$$

Si osservi poi che per la simmetria della figura si ha $WV = WQ = r$ cioè uguale al lato dell'esagono regolare iscritto nel cerchio. Si dimostra poi che $ZW = VX$ è uguale al lato del decagono regolare iscritto nello stesso cerchio.

Si giunge così all'enunciato del *corollario*: il diametro di una sfera è quintuplo del quadrato del raggio del cerchio su cui si descrive un icosaedro regolare, e inoltre il diametro stesso della sfera si scompone in tre parti: una è uguale al lato dell'esagono regolare iscritto in quel cerchio, e due, uguali tra loro, sono uguali al lato del decagono regolare iscritto nello stesso cerchio.

Si conclude poi, la XIII 16, con la precisazione che se il diametro della sfera è razionale, lo spigolo dell'icosaedro regolare iscritto è la retta irrazionale detta *minore*. Infatti lo spigolo dell'icosaedro è il lato del pentagono regolare iscritto nel cerchio di raggio r, anch'esso razionale perché commensurabile in potenza col diametro della sfera ($d^2 = 5r^2$). E nella XIII, 11 si è appunto dimostrato che il lato del pentagono regolare iscritto in un cerchio di raggio razionale è la linea irrazionale detta *minore*.

EQ è parallela a *KU* (XI, 6). Ma è pure uguale ad essa, e rette che congiungenti dalla stessa parte rette uguali e parallele, sono fra loro uguali e parallele (I, 33). Quindi *QU* è uguale e parallela ad *EK*. Ma *EK* è il lato di un pentagono equilatero, quindi anche *QU* è uguale al lato del pentagono equilatero [*EFGHK*], iscritto nel cerchio *EFGHK*. Per la stessa ragione, pure ognuna delle rette *QR*, *RS*, *ST*, *TU* è uguale al lato del pentagono [*EFGHK*] iscritto nel cerchio *EFGHK*; quindi il pentagono *QRSTU* è equilatero. Ma poiché *QE* è uguale al lato di un esagono equilatero che sia iscritto nel cerchio in questione [essendosi preso uguale al raggio], *EP* è lato di un decagono [equilatero], e l'angolo *QEP* è retto, si ha che *QP* è uguale al lato del pentagono *EFGHK*: difatti il quadrato del lato di un pentagono equilatero è uguale alla somma dei quadrati dei lati di un esagono e di un decagono equilateri iscritti nello stesso cerchio (XIII, 10). Per la medesima ragione, anche *PU* è uguale al lato del pentagono di cui sopra. Ma pure *QU* è lato di un pentagono equilatero [iscritto nel cerchio], per cui il triangolo *QPU* è equilatero. Per la stessa ragione, si ha che equilatero è anche ciascuno dei triangoli *QLR*, *RMS*, *SNT*, *TOU*. E poiché fu dimostrato che ognuna delle due rette *QL*, *QP* è uguale al lato di un pentagono equilatero, ed anche *LP* è lato di un pentagono equilatero, il triangolo *QLP* è equilatero. Per la stessa ragione, è equilatero pure ciascuno dei triangoli *LRM*, *MSN*, *NTO*, *OUP*. Si prenda ora il centro del cerchio *EFGHK*, ed esso sia il punto V (III, 1); da V si innalzi *VZ* perpendicolarmente al piano del cerchio, e la si prolunghi dall'altra parte di *V* staccando poi *VW* uguale al lato dell'esagono equilatero di cui sopra e ciascuna delle due rette *VX*, *WZ* uguali al lato del decagono equilatero suindicato, e si traccino le congiungenti *QZ*, *QW*, *UZ*, *EV*, *LV*, *LX*, *XM*. Ora, poiché ciascuna delle due rette *VW*, *QE* è perpendicolare al piano del cerchio [*EFGHK*], si ha che *VW* è parallela a *QE* (XI, 6). Ma [*VW*, *QE*] sono anche uguali fra loro, per cui pure *EV*, *QW* sono fra loro uguali e parallele (I, 33). Ma *EV* è uguale al lato di un esagono equilatero; quindi *QW* è pure uguale al

lato di un esagono equilatero, iscritti ambedue in cerchi uguali. E poiché QW è il lato di un esagono equilatero, mentre WZ è quello di un decagono equilatero, e l'angolo QWZ è retto (XI, def. III; I, 29), si ha che QZ è uguale al lato di un pentagono equilatero (XIII, 10). Per la stessa ragione, anche UZ è uguale al lato di un pentagono equilatero, dato che, se tracciamo le congiungenti VK, WU, esse saranno uguali ed opposte fra loro, e VK, che è un raggio, è uguale al lato di un esagono equilatero iscritto nel cerchio $EFGHK$ (IV, 15, coroll.); perciò è uguale al lato di un esagono equilatero pure WU. Ma WZ è uguale al lato di un decagono equilatero, e l'angolo UWZ è retto, per cui UZ è uguale al lato di un pentagono equilatero. Ma anche QU è lato di un pentagono equilatero; quindi il triangolo QUZ è equilatero. Per la stessa ragione, è equilatero pure ciascuno dei rimanenti triangoli, di cui sono basi QR, RS, ST, TU e vertice è il punto Z. Di nuovo, poiché VL è uguale al lato di un esagono equilatero, VX a quello di un decagono equilatero, e l'angolo LVX è retto, LX è uguale al lato di un pentagono equilatero (XIII, 10). Per la medesima ragione, se tracciamo la congiungente MV, uguale al lato di un esagono equilatero, ne deriva che pure MX è uguale al lato di un pentagono equilatero. Ma anche LM è lato di un pentagono equilatero; perciò il triangolo LMX è equilatero. Similmente si potrà dimostrare che è equilatero pure ciascuno dei triangoli rimanenti, di cui sono basi MN, NO, OP, PL ed è vertice il punto X. Dunque, si è costruito un icosaedro compreso da venti triangoli equilateri.

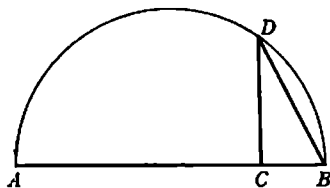
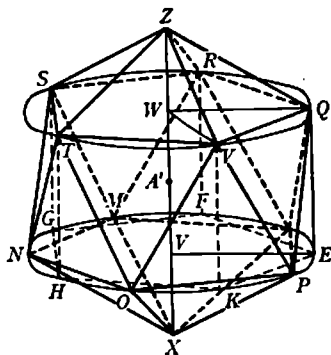
Adesso si deve dimostrare che esso può iscriversi nella sfera di diametro dato e dimostrare che (assunto detto diametro come retta razionale) lo spigolo dell'icosaedro è la retta irrazionale che si chiama *minore*.

Infatti, poiché VW è uguale al lato di un esagono equilatero, e WZ a quello di un decagono equilatero, VZ è divisa in W in estrema e media ragione, e VW è la parte maggiore di essa (XIII, 9), si ha: $ZV : VW = VW : WZ$. Ma $VW = VE$ e $WZ = VX$; quindi: $ZV : VE = VE : VX$. Ora, gli angoli ZVE, EVX sono retti, per cui, se tracciamo

la retta congiungente EZ, l'angolo XEZ sarà retto, data la similitudine dei triangoli XEZ, VEZ (VI, 8).

Per la stessa ragione, poiché $ZV : VW = VW : WZ$, ma ZV è uguale a XW, mentre VW è uguale a WQ, si ha: $XW : WQ = WQ : WZ$. E perciò, di nuovo, se tracciamo la congiungente QX, l'angolo con vertice in Q sarà retto (VI, 8), per cui il semicerchio descritto su XZ passerà anche per Q (III, 31). Se poi, mentre resta immobile XZ, si riporta il semicerchio, dopo che lo si sia fatto ruotare attorno ad essa, nello stesso punto da cui si cominciò a farlo muovere, esso verrà a passare per Q e per gli altri punti dell'icosaedro, e l'icosaedro risulterà iscritto in una sfera. Dico adesso che lo è proprio in quella di diametro dato. Infatti, si divida VW per metà in A'. Ora, poiché la linea retta VZ è divisa in W in estrema e media ragione, e ZW è la parte minore di essa, si ha che il quadrato di ZW aumentato della metà della parte maggiore, cioè aumentato di WA', è il quintuplo del quadrato della metà della parte maggiore (XIII, 3); il quadrato di ZA' è quindi il quintuplo di quello di $A'W$, ossia: $q(ZA') = 5\,q(A'W)$. Ma ZX è il doppio di ZA', mentre VW è il doppio di $A'W$: perciò anche: $q(ZX) = 5\,q(VW)$. E poiché AC è il quadruplo di CB, si ha che AB è il quintuplo di BC. Ma AB sta a BC come il quadrato di AB sta al quadrato di BD (VI, 8; V, def. IX), quindi il quadrato di AB è il quintuplo del quadrato di BD, cioè: $q(AB) =$ $= 5\,q(BD)$. Ma fu dimostrato che anche il quadrato di ZX è il quintuplo di quello di VW. Inoltre DB è uguale a VW – ciascuna delle due rette è difatti uguale al raggio del cerchio $EFGHK$; quindi si ha pure che AB è uguale a XZ. Ora, AB è il diametro della sfera data, per cui anche XZ è uguale al diametro della sfera data. Dunque, l'icosaedro è stato iscritto nella sfera di diametro dato.

Dico adesso che lo spigolo dell'icosaedro è la retta irrazionale che si chiama *minore* [rispetto al diametro assunto come retta razionale]. Infatti, poiché il diametro della sfera è razionale, ed il suo quadrato è il quintuplo di quello del raggio del cerchio $EFGHK$, è razionale anche il raggio del cerchio $EFGHK$; cosicché pure il diametro di esso è razio-

nale. Ma se in un cerchio avente razionale il diametro si iscrive un pentagono equilatero, il lato del pentagono è la retta irrazionale che si chiama *minore* (XIII, 11). Ma il lato del pentagono *EFGHK* è il lato [stesso] dell'icosaedro. Dunque, il lato dell'icosaedro [iscritto in una sfera di diametro razionale] è la retta irrazionale che si chiama *minore*.

Applica: I, 33; III, 1, 31; IV, 11, 15 coroll.; VI, 8, 10; XI, 6; XIII, 3, 9, 10, 11.

È applicata in: XIII, 18.

Corollario

È da ciò evidente che il quadrato del diametro di una sfera è il quintuplo del quadrato del raggio del cerchio su cui si descriva un icosaedro[a], e che il diametro della sfera risulta dalla somma di uno dei lati di un esagono e di due lati di un decagono ambedue equilateri, che siano iscritti nello stesso cerchio. – C.D.D.

È applicato in: XIII, 18.

[a] Testuale.

PROPOSIZIONE 17.

Costruire un dodecaedro iscrivendolo in una sfera, come si è fatto per le figure indicate prima, e dimostrare che lo spigolo del dodecaedro è la retta irrazionale che si chiama apotome [10].

Si assumano i due piani *ABCD*, *CBEF*, facce del cubo già prima indicato e perpendicolari fra loro (XIII, 15), si divida per metà ciascuno dei lati *AB*, *BC*, *CD*, *DA*, *EF*, *EB*, *FC* rispettivamente nei punti *G*, *H*, *K*, *L*, *M*, *N*, *O*, e si traccino le congiungenti *GK*, *HL* [che si taglino nel punto *Q*] e le *MH*, *NO* [che si taglino nel punto *P*]; si divida ciascuna delle rette *NP*, *PO*, *HQ* in estrema e media ragione rispettivamente nei punti *R*, *S*, *T* e siano *RP*, *PS*, *TQ* le loro parti maggiori. Dai punti *R*, *S*, *T*, perpendicolarmente alle facce del cubo considerate ed esternamente ad esso, si innalzino *RU*, *SV*, *TW* e si pongano uguali e *RP*, *PS*, *TQ*; si traccino le congiungenti *UB*, *BW*, *WC*, *CV*, *VU*. Dico che il pentagono *UBWCV* è equilatero, che giace in un solo piano, ed è infine equiangolo. Infatti, si traccino le congiungenti *RB*, *SB*, *VB*. Ora, poiché la retta *NP* è divisa in *R* in estrema e media ragione, e *RP* è la parte maggiore di essa, si ha che la somma dei quadrati di *PN*, *NR* è il

[10] In questa XIII, 17 viene costruito il dodecaedro regolare iscrivibile in una sfera di diametro dato. La dimostrazione della validità della costruzione eseguita è piuttosto complicata, ma assai semplice è il procedimento costruttivo. Si considera infatti il cubo iscritto nella stessa sfera (XIII, 15) e si costruisce un pentagono regolare avente la diagonale uguale allo spigolo del cubo. Un tal pentagono costituisce una delle facce del dodecaedro regolare richiesto.

Viene poi dimostrato che il lato di detto pentagono, cioè lo spigolo del dodecaedro, è la parte aurea dello spigolo del cubo. Assumendo il diametro della sfera come retta razionale, è retta razionale anche lo spigolo del cubo (poiché è commensurabile in potenza col diametro, dal momento che il quadrato del diametro della sfera è triplo del quadrato dello spigolo del cubo). Ma la parte aurea di una retta razionale è la retta irrazionale detta *apotome* (XIII, 6), quindi tale è lo spigolo del dodecaedro. Va infine accennato al fatto che in questa XIII, 17 si ha l'unica applicazione della prop. VI, 32, cioè dell'ultima proposizione del libro sesto.

triplo del quadrato di *RP* (XIII, 4). Ma *PN* è uguale a *NB*, mentre *PR* è uguale a *RU*; la somma dei quadrati di *BN*, *NR* è quindi il triplo del quadrato di *RU*. Ma il quadrato di *BR* è uguale alla somma dei quadrati di *BN*, *NR* (I, 47); perciò il quadrato di *BR* è il triplo di quello di *RU*, cosicché la somma dei quadrati di *BR*, *RU* è il quadruplo del quadrato di *RU*. Ma alla somma dei quadrati di *BR*, *RU* è uguale il quadrato di *BU* (I, 47), quindi il quadrato di *BU* è il quadruplo del quadrato di *UR*; e *BU* è perciò il doppio di *RU*. Ma anche *VU* è il doppio di *RU*, dato che pure *SR* è il doppio di *PR*, vale a dire di *RU*; quindi *BU* è uguale a *UV*. Similmente si potrà dimostrare che anche ciascuna delle rette *BW*, *WC*, *CV* è uguale a ciascuna delle due rette *BU*, *UV*. Il pentagono *BUVCW* è perciò equilatero. Dico adesso che giace pure in un solo piano. Infatti, dal punto *P* si conduca *PX* parallela a ciascuna delle due rette *RU*, *SV* ed esternamente al cubo, e si traccino le congiungenti *XH*, *HW*; dico che *KHW* è una retta. Poiché difatti *HQ* è divisa in *T* in estrema e media ragione, e *QT* è la parte maggiore di essa, *HQ* sta a *QT* come *QT* sta a *TH*. Ma *HQ* è uguale a *HP*, e *QT* è uguale ad ognuna delle due rette *TW*, *PX*; si ha quindi che *HP* sta a *PX* come *WT* sta a *TH*. Ora, *HP* è parallela a *TW* – ciascuna delle due rette è perpendicolare difatti al piano *BD* (XI, 6) –, mentre *TH* è parallela a *PX*: difatti ciascuna di esse è perpendicolare al piano *BF* (id.). Ma se due triangoli, che abbiano rispettivamente due lati proporzionali a due lati, hanno in comune il vertice di un angolo, come hanno *XPH*, *HTW*, cosicché i lati omologhi di due coppie sono anche paralleli, le rette rimanenti[, cioè gli altri lati,] saranno per diritto fra loro (VI, 32); quindi *XH* è per diritto a *HW*. Ma ogni retta giace in un piano solo (XI, 1); dunque, il pentagono *UBWCV* è in un solo piano. Dico adesso che è anche equiangolo.

Infatti, poiché la linea retta *NP* è divisa in *R* in estrema e media ragione, e *PR* è la parte maggiore di essa[– la somma di *NP*, *PR* sta quindi a *PN* come *NP* sta a *PR* –], mentre *PR* è poi uguale a *PS*[– perciò *SN* sta a *NP* come

NP sta a *PS* –] [a], si ha che *NS* risulta divisa in *P* in estrema e media ragione, e *NP* è la parte maggiore di essa (XIII, 5); la somma dei quadrati di *NS*, *SP* è quindi il triplo del quadrato di *NP* (XIII, 4). Ma *NP* è uguale a *NB*, e *PS* è uguale a *SV*, quindi la somma dei quadrati di *NS*, *SV* è il triplo del quadrato di *NB*; cosicché la somma dei quadrati di *VS*, *SN*, *NB* è il quadruplo del quadrato di *NB*. Ma alla somma dei quadrati di *SN*, *NB* è uguale il quadrato di *SB* (I, 47); la somma dei quadrati di *BS*, *SV*, vale a dire il quadrato di *BV* (difatti l'angolo *VSB* è retto) (XI, def. III), è quindi il quadruplo del quadrato di *NB*, quindi *VB* è il doppio di *BN*. Ma pure *BC* è il doppio di *BN*; quindi *BV* è uguale a *BC*. E poiché i due lati *BU*, *UV* sono uguali rispettivamente ai due lati *BW*, *WC*, e la base *BV* è uguale alla base *BC*, l'angolo *BUV* è uguale all'angolo *BWC* (I, 8). Similmente potremo dimostrare che anche l'angolo *UVC* è uguale all'angolo *BWC*, quindi i tre angoli *BWC*, *BUV*, *UVC* sono uguali fra loro. Ma se in un pentagono equilatero tre angoli sono uguali fra loro, il pentagono è equiangolo (XIII, 7); il pentagono *BUVCW* è perciò equiangolo. E si dimostrò che è anche equilatero; quindi il pentagono *BUVCW*. è equilatero ed equiangolo, ed è posto su uno spigolo del cubo, cioè *BC*. Se dunque eseguiremo la medesima costruzione su ciascuno dei dodici lati del cubo, risulterà costruita una figura solida compresa da dodici pentagoni equilateri ed equiangoli, la quale è chiamata dodecaedro.

Adesso si deve pure dimostrare che il dodecaedro così costruito può iscriversi nella sfera di diametro dato e dimostrare che il lato del dodecaedro è la retta irrazionale che si chiama apotome [assunto il diametro della sfera come retta razionale].

Infatti, si prolunghi *XP*, e sia *XZ* la retta prolungata; quindi *PZ* si incontra con la diagonale del cubo, e l'uno e

a. Heiberg ritiene aggiunte ed inutili le parole poste nelle parentesi quadre, dato che la forma della proposizione 5 del XIII, a cui Euclide apertamente qui si riferisce, le esclude nel suo discorso.

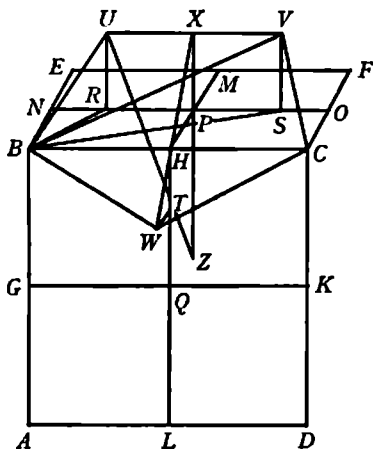
l'altra si dividono fra loro per metà: ciò è stato difatti dimostrato nel penultimo teorema dell'undicesimo libro (XI, 38). Si dividano in *Z*; perciò *Z* è il centro della sfera nella quale è iscritto il cubo [dato], e *ZP* è la metà dello spigolo del cubo. Si tracci ora la congiungente *UZ*. E poiché la linea retta *NS* è divisa in *P* in estrema e media ragione, e *NP* è la parte maggiore di essa, la somma dei quadrati di *NS*, *SP* è il triplo del quadrato di *NP* (XIII, 4). Ma *NS* è uguale a *XZ*, dato che pure *NP* è uguale a *PZ*, e *XP* è uguale a *PS*. Ma si ha anche, tuttavia, che *PS* è uguale a *XU*, poiché lo è pure a *RP*; la somma dei quadrati di *ZX*, *XU* è quindi il triplo del quadrato di *NP*. Ma alla somma dei quadrati di *ZX*, *XU* è uguale il quadrato di *UZ* (I, 47), quindi il quadrato di *UZ* è il triplo di quello di *NP*. Ma anche il raggio della sfera, nella quale è iscritto il cubo considerato, è il triplo della metà dello spigolo del cubo; già prima, difatti, si è dimostrato come si possa costruire un cubo iscrivendolo in una sfera, e che il quadrato del diametro della sfera è il triplo del quadrato dello spigolo del cubo (XIII, 15). Ma se tutta quanta una retta è il triplo di tutta quanta un'altra, lo è anche la metà della prima rispetto alla metà della seconda; ora, *NP* è la metà del lato del cubo, per cui *UZ* è uguale al raggio di una sfera nella quale sia iscritto il cubo. Ma *Z* è il centro della sfera nella quale è iscritto il cubo in questione; quindi il punto *U* si trova sulla superficie della sfera. Similmente potremo dimostrare che pure ciascuno degli angoli rimanenti del dodecaedro ha il vertice sulla superficie della sfera; dunque, il dodecaedro è stato iscritto nella sfera di diametro dato.

Dico adesso che il lato del dodecaedro è la retta irrazionale che si chiama apotome.

Infatti, poiché *RP* è la parte maggiore della retta *NP* che è stata divisa in estrema e media ragione, mentre è *PS* la parte maggiore di *PO* divisa in estrema e media ragione, si ha che *RS* è la parte maggiore di tutta quanta *NO*, se divisa in estrema e media ragione. E poiché *NP* sta a *PR* come *PR* sta a *RN*, così sarà anche per i loro doppi (le parti hanno difatti lo stesso rapporto fra loro degli equi-

multipli) (V, 15); quindi *NO* sta a *RS* come *RS* sta alla somma di *NR*, *SO*. Ma *NO* è maggiore di *RS*, quindi anche *RS* è maggiore della somma di *NR*, *SO* (V, 14); dunque *NO* è divisa in estrema e media ragione, e *RS* è la sua parte maggiore. Ma *RS* è uguale ad *UV*; perciò *UV* è la parte maggiore di *NO*, divisa in estrema e media ragione. E poiché il diametro della sfera è razionale, ed il suo quadrato è il triplo del quadrato dello spigolo del cubo iscritto, si ha che è razionale *NO*, che è spigolo del cubo. Ma se una linea razionale viene divisa in estrema e media ragione, ciascuna delle sue due parti è la linea irrazionale detta apotome (XIII, 6).

Dunque, la retta *UV*, che è lo spigolo del dodecaedro [iscritto in una sfera di diametro razionale] è la linea irrazionale detta apotome.

APPLICA: I, 8, 47; V, 14, 15; VI, 32; XI, 6, 38; XIII, 4, 5, 6, 7, 15.

COROLLARIO

È da ciò evidente che se dividiamo lo spigolo di un cubo in estrema e media ragione, la parte maggiore di esso è lo spigolo di un dodecaedro. – C.D.D.

È APPLICATO IN: XIII, 18.

Proposizione 18.

Trovare gli spigoli delle cinque figure [poliedri regolari] e paragonarli fra loro [11].

Sia AB il diametro di una sfera data, e lo si divida in C in modo che AC sia uguale a CB, ed in D in modo che AD

[11] È, questa, l'ultima proposizione degli *Elementi* di Euclide (il lemma seguente in realtà è da considerarsi come precedente in quanto costituisce una premessa alla XIII, 18).

C'è un'aria festosa, come per salutare l'arrivo alla mèta dopo un viaggio lungo e faticoso. I cinque poliedri regolari vengono in certo senso riuniti, e confrontati tra loro (l'enunciato della XIII, 18 prescrive appunto di far ciò). È quasi un'esaltazione dei risultati raggiunti, che viene effettuata mediante una sintesi finale.

Un'esposizione sistematica di geometria solida, pur con qualche imperfezione, era ai tempi di Euclide impresa degna di particolare considerazione. Occorre infatti ricordare che ancora ai tempi della *Repubblica* (intorno al 360 a. C.) Platone lamentava l'arretratezza degli studi sulla stereometria, pur se poco più tardi, nel *Timeo*, si serviva dei poliedri regolari a guisa di strumento matematico, per le sue teorie fisiche (cfr. *Repubblica*, 528*a*-*c*; *Timeo*, 53*c*-56*c*).

È del resto anche vero che Euclide non esaurisce le ricerche sulla geometria solida: basti pensare che egli, ad esempio, non tratta delle superficie che limitano i corpi solidi. Così per la sfera egli dà il teorema XII, 18: « Le sfere stanno tra loro in ragione triplicata dei diametri », il quale permette di calcolare il volume della sfera (a parte la mancata determinazione numerica del rapporto tra volume e cubo del raggio, che sarà opera di Archimede); ma non si occupa della superficie sferica: la ricerca della relazione tra volume e superficie della sfera costituirà un'altra memorabile impresa dello stesso Archimede.

Qui dunque Euclide ci offre una specie di mostra, di esposizione finale, come il grande artista che *espone* le sue opere ad un pubblico affezionato che l'ha seguito durante tutto l'arco di sviluppo della sua arte.

Ed ecco un semicerchio, il cui diametro è quello della sfera nella quale i poliedri regolari, tutti e cinque, vanno iscritti. Sono soltanto cinque, e non più: la relativa dimostrazione, la stessa che ancor oggi diamo, costituirà l'ultima parte di questa ultima proposizione XIII, 18. Ci si basa sulla proposizione XI, 21: la somma delle facce (intese come angoli piani) che contengono un angolo solido deve essere sempre minore di quattro retti. Non è possibile, quindi, formare un poliedro regolare con sei triangoli equilateri intorno a ciascun vertice: ciascun angolo di un triangolo equilatero vale due terzi dell'angolo retto e sei messi insieme fan proprio quattro retti ($60^\circ \times 6 = 360^\circ$).

Dunque: tre triangoli equilateri intorno a ciascun vertice (tetraedro regolare, da Euclide detto semplicemente *piramide*) o quattro (ottaedro) o cinque (icosaedro). Così non è possibile racchiudere un angolo solido

sia il doppio di DB; su AB si descriva il semicerchio AEB, da C, D si conducano CE, DF perpendicolari ad AB, e si traccino le congiungenti AF, FB, EB. Ora, poiché AD è

con quattro quadrati perché si avrebbe la somma delle facce uguali ancora a quattro retti: dunque si possono avere soltanto tre quadrati attorno a ciascun vertice (esaedro regolare o cubo). Finalmente si possono avere soltanto tre pentagoni regolari attorno a ciascun vertice, poiché con quattro di tali pentagoni la somma delle facce supererebbe i quattro retti: infatti l'angolo del pentagono regolare vale un angolo retto più un quinto (questa è appunto la proposizione che viene dimostrata nel lemma finale, il posto logico del quale è quindi antecedente a quello della XIII, 18). Con le nostre misure in gradi:

$$(5 - 2) \cdot 180^\circ = 3 \cdot 180^\circ = 540^\circ \text{ (somma degli angoli d'un pentagono)}$$
$$540^\circ : 5 = 108^\circ \text{ (angolo di un pentagono regolare)}$$
$$108^\circ \times 3 = 324^\circ < 360^\circ$$
$$108^\circ \times 4 = 432^\circ > 360^\circ$$

E si noti che $108 = 90 + 18 = 90 + 1/5 \cdot 90$.

E non c'è altra possibilità: da una parte anche tre soli esagoni regolari dànno come somma delle facce quattro retti:

$$120^\circ \times 3 = 360^\circ$$

e d'altro canto un angolo solido non può essere costruito con due soli triangoli o comunque con due sole figure piane.

Torniamo dunque al nostro semicerchio generatore (con la sua rotazione intorno al diametro) della sfera circoscritta ai poliedri regolari.

Si pone $AC = CB$ (ossia C è il centro della sfera), poi AD doppio di DB (ossia il punto D è a due terzi del diametro): si innalzano per C e D le perpendicolari CE, DF al diametro e si congiunge E con B, ed F con A e con B. Allora, in base alla XIII, 13, risulta che AF è lo spigolo del tetraedro regolare iscritto nella sfera, e in base alla XIII, 15 risulta che FB è lo spigolo dell'esaedro regolare, cioè del cubo, iscritto. Inoltre, in base alla XIII, 14, risulta che EB è lo spigolo dell'ottaedro regolare iscritto nella sfera.

In base alla XIII, 17 (e suo corollario) lo spigolo del dodecaedro regolare è la parte aurea dello spigolo del cubo, ossia (nel nostro caso) la parte aurea di FB. Basta, quindi, dividere il segmento FB in estrema e media ragione nel punto N: la parte maggiore è NB, e questo è lo spigolo del dodecaedro regolare.

Finalmente, per trovare lo spigolo dell'icosaedro regolare occorre ricordare che, in base alla XIII, 16, il cerchio «sul quale è costruito l'icosaedro», cioè il cerchio nel quale risulta iscritto quel pentagono al quale s'è accennato nella nota a detta XIII, 16, ha un raggio tale che il suo quadrato è la quinta parte del quadrato del diametro della sfera. Cominciamo col trovare, mediante una costruzione che parta dal solito semicerchio, un segmento, uguale al raggio del cerchio circoscritto al pentagono relativo all'icosaedro. Euclide conduce, a tale scopo, la tangente AG al semicerchio in A, stacca $AG = AB$ (= diametro), e congiunge G

il doppio di DB, si ha che AB è il triplo di BD. Si ha quindi, *convertendo*, che AB è una volta e mezzo AD. Ma AB sta ad AD come il quadrato di AB sta al quadrato di

col centro C; sia H il punto nel quale tale congiungente incontra la semicirconferenza: abbassa da H la perpendicolare HK sul diametro, pone $CL = KC$, innalza da L la perpendicolare LM ad AB, e finalmente congiunge M con B. Euclide dimostra che il segmento $KL = 2KC$ è uguale al raggio del cerchio (circoscritto al pentagono) « sul quale è stato costruito l'icosaedro ».

Poiché il quadrato del diametro della sfera, come s'è visto nella XIII, 16, è quintuplo del quadrato del raggio di quel cerchio, basta dimostrare che è:

$$q\,(AB) = 5q\,(KL)$$

A questa relazione si giunge facilmente.

È infatti:

$$AG : AC = AB : AC = 2 : 1$$

quindi anche

$$HK : KC = 2 : 1$$

dunque HK è doppio di KC. Pertanto

$$q\,(HK) = 4q\,(KC)$$

e:

$$q\,(HK) + q\,(KC) = 5q\,(KC)$$

ossia, per il teorema di Pitagora:

$$q\,(HC) = 5q\,(KC)$$

ossia ancora:

$$q\,(CB) = 5q\,(KC)$$

La stessa relazione vale anche tra il doppio di CB e il doppio di KC, quindi:

$$q\,(AB) = 5q\,(KL)$$

e dunque KL è il raggio di quel cerchio relativo all'icosaedro. Sempre in base alla XIII, 16 e al suo corollario. Euclide dimostra finalmente che MB è lo spigolo dell'icosaedro.

Ma egli ancora si sofferma sul *confronto* tra i poliedri regolari e presenta il risultato del confronto stesso in altra forma: se si divide il quadrato del diametro nella sfera circoscritta in 6 parti uguali, il quadrato dello spigolo del tetraedro ne contiene 4, il quadrato dello spigolo dell'ottaedro ne contiene 3, il quadrato dello spigolo del cubo ne contiene 2.

Sicché, aggiunge ancora, il quadrato dello spigolo del tetraedro è 4/3 (ἐπίτριτος) del quadrato dello spigolo dell'ottaedro e il doppio (διπλῆ) del quadrato dello spigolo del cubo, e il quadrato dello spigolo dell'ottaedro è una volta e mezzo (ἡμιολία) il quadrato dello spigolo del cubo.

E soggiunge, quasi con compiacenza, che dunque « i suddetti spigoli di quelle tre figure, cioè della piramide, (tetraedro), dell'ottaedro e del cubo sono tra loro in rapporti razionali (πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ἐν λόγοις ῥητοῖς).

Vien fatto di ricordare i risultati, numericamente semplicissimi, di Archimede, per determinazioni di aree e di volumi, e viene in mente anche

AF (V, def. IX; VI, 19 coroll.) – difatti il triangolo *AFB* è equiangolo rispetto al triangolo *AFD* (VI, 8); perciò il quadrato di *AB* è una volta e mezzo quello di *AF*. Ma anche il quadrato del diametro della sfera è una volta e mezzo il quadrato del lato di una piramide [tetraedro] in essa iscritta (XIII, 13). Ed il diametro della sfera è *AB*; dunque *AF* è uguale allo spigolo della piramide. Di nuovo, poiché *AD* è il doppio di *DB*, si ha che *AB* è il triplo di *BD*. Ma *AB* sta a *BD* come il quadrato di *AB* sta al quadrato di *BF* (VI, 8; V, def. IX), per cui il quadrato di *AB* è il triplo di quello di *BF*. Ma anche il quadrato del diametro della sfera è il triplo del quadrato dello spigolo di un cubo che sia iscritto in essa (XIII, 15). Ora, *AB* è il diametro della sfera; dunque, *BF* è lo spigolo del cubo.

E poiché *AC* è uguale a *CB*, si ha che *AB* è il doppio di *BC*. Ma *AB* sta a *BC* come il quadrato di *AB* sta al quadrato di *BE* (VI, 19, coroll.), quindi il quadrato di *AB* è il doppio di quello di *BE*. Ma anche il quadrato del diametro della sfera è il doppio del quadrato dello spigolo di un ottaedro in essa iscritto (XIII, 14). Ora, *AB* è il diametro della sfera data; dunque *BE* è lo spigolo dell'ottaedro.

Dal punto *A* si conduca allora *AG* perpendicolarmente alla retta *AB*, si ponga *AG* uguale ad *AB*, si tracci la congiungente *GC*, e dal punto *H* si conduca ad *AB* la perpendicolare *HK*. Ora, poiché *AG* è il doppio di *AC* – difatti *AG* è uguale ad *AB* –, e poiché $AG : AC = HK : KC$ (VI, 4),

il compiacimento che Galileo prova quando trova le leggi, pure numericamente semplicissime, sulla caduta dei gravi. Presumiamo troppo se formuliamo l'ipotesi che in questi risultati finali, almeno sotto questa forma, vi sia anche il contributo personale di Euclide?

Gli spigoli dell'icosaedro e del dodecaedro non sono invece in rapporto razionale né tra loro né con gli spigoli prima menzionati: ma Euclide domina ugualmente la materia anche in questo caso più difficile e meno *regolare* numericamente, e ricorda che quegli spigoli *ribelli* sono però, rispetto al diametro razionale della sfera circoscritta, rette che negli *Elementi* sono state ben studiate e classificate: rispettivamente sono l'irrazionale detta *minore* e quella detta *apotome*.

Si può ben porre qui, dunque, la parola *fine*. A. F.

si ha che pure *HK* è il doppio di *KC*. Quindi il quadrato di *HK* è il quadruplo di quello di *KC*, e la somma dei quadrati di *HK*, *KC*, che è uguale al quadrato di *HC* (I, 47), è il quintuplo del quadrato di *KC*. Ma *HC* è uguale a *CB*; il quadrato di *CB* è perciò il quintuplo di quello di *KC*. E poiché *AB* è il doppio di *CB*, delle quali rette la parte *AD* della prima è il doppio della parte *DB* della seconda, la parte *DB* che rimane della prima è il doppio della parte rimanente *CD* della seconda. Quindi *CB* è il triplo di *CD*, e il quadrato di *CB* è nove volte il quadrato di *CD*. Ma il quadrato di *CB* è il quintuplo di quello di *CK*; il quadrato di *CK* è quindi maggiore del quadrato di *CD*. Perciò *CK* è maggiore di *CD*. Si ponga *CL* uguale a *CK*, da *L* si conduca *LM* perpendicolare ad *AB*, e si tracci la congiungente *MB*. Ora, poiché il quadrato di *CB* è il quintuplo del quadrato di *KC*, e poiché *AB* è il doppio di *BC*, mentre *KL* è il doppio di *KC*, il quadrato di *AB* è il quintuplo di quello di *KL*. Ma anche il quadrato del diametro di una sfera è il quintuplo del quadrato del raggio del cerchio su cui si descriva un icosaedro (XIII, 16, coroll.). Ed *AB* è il diametro della sfera [data], quindi *KL* è il raggio del cerchio su cui si sia descritto un icosaedro; e *KL* è uguale al lato di un esagono equilatero che sia iscritto nel detto cerchio (IV, 15, coroll.). Ma poiché il diametro della sfera risulta dalla somma di uno dei lati di un esagono e da due lati di un decagono, ambedue equilateri ed iscritti nel detto cerchio (XIII, 16, coroll.), e poiché *AB* è il diametro della sfera, mentre *KL* è uguale al lato di un esagono equilatero, ed *AK* è uguale a *LB*, si ha che ciascuna delle due rette *AK*, *LB* è il lato di un decagono equilatero iscritto nel cerchio sul quale si sia descritto l'icosaedro. E poiché *LB* è il lato di un decagono equilatero, mentre *ML* è quello di un esagono equilatero – *ML* è difatti uguale a *KL*, poiché lo è pure a *HK*: infatti *HK*, *ML* distano ugualmente dal centro del cerchio in questione, e ciascuna delle due rette è il doppio di *KC* –, si ha che *MB* è il lato di un pentagono equilatero iscritto nel cerchio (XIII, 10; I, 47). Ma il lato di un tale

pentagono equilatero è lo spigolo stesso di un icosaedro [iscritto nella sfera] (XIII, 16); dunque MB è lo spigolo dell'icosaedro.

Ora, poiché FB è lo spigolo di un cubo [iscritto nella sfera data], lo si divida in N in estrema e media ragione, e NB sia la parte maggiore; dunque, NB è lo spigolo del dodecaedro (XIII, 17, coroll.).

E poiché fu dimostrato che il quadrato del diametro della sfera in questione è una volta e mezzo il quadrato dello spigolo AF di una piramide (tetraedro) in essa compresa, è il doppio del quadrato dello spigolo BE di un ottaedro, ed il triplo di quello dello spigolo FB di un cubo, tutti iscritti in essa, si ha che delle stesse parti, delle quali son contenute sei nel quadrato del diametro della sfera, quattro ne contiene il quadrato dello spigolo della piramide (tetraedro), quello dello spigolo dell'ottaedro ne contiene tre, e quello dello spigolo del cubo ne contiene due. Il quadrato dello spigolo della piramide è quindi quattro terzi del quadrato dello spigolo dell'ottaedro, ed il doppio del quadrato dello spigolo del cubo, mentre il quadrato dello spigolo dell'ottaedro è una volta e mezzo il quadrato dello spigolo del cubo. Dunque, gli spigoli suddetti delle tre figure, ossia, dico, della piramide (tetraedro), dell'ottaedro e del cubo, hanno fra loro rapporti razionali. Ma i due che rimangono, ossia, dico, lo spigolo dell'icosaedro e quello del dodecaedro, non stanno in rapporto razionale né fra loro né con gli spigoli detti prima: sono difatti irrazionali, l'uno essendo una retta *minore* (XIII, 16), e l'altro un'apotome (XIII, 17).

Dimostreremo nel modo seguente che lo spigolo dell'icosaedro, in questo caso MB, è maggiore dello spigolo del dodecaedro, in questo caso NB.

Infatti, poiché il triangolo FDB è equiangolo rispetto al triangolo FAB (VI, 8), si ha la proporzione tra i lati: $DB : FB = FB : AB$ (VI, 4). Ora, poiché si hanno tre rette in proporzione fra loro, la prima sta alla terza come il quadrato della prima sta al quadrato della seconda (V, def. IX;

VI, 19, coroll.)[a], per cui $DB : AB = q(DB) : q(FB)$; si ha quindi, *invertendo*: $AB : DB = q(FB) : q(DB)$ (V, 7 coroll.). Ma AB è il triplo di DB; perciò il quadrato di FB è il triplo del quadrato di BD. Ma si ha pure che il quadrato di AD è il quadruplo di quello di DB — difatti AD è il doppio di DB; il quadrato di AD è quindi maggiore del quadrato di FB, per cui AD è maggiore di FB, e di molto maggiore, per conseguenza, è AL rispetto a FB. Ora, se dividiamo AL in estrema e media ragione, KL è la parte maggiore di essa, dato che KL è uguale al lato di un esagono equilatero e AK è quello di un decagono equilatero (XIII, 9), mentre, se è divisa FB in estrema e media ragione, la parte maggiore è NB; perciò KL è maggiore di NB. Ma KL è uguale a LM; quindi LM è maggiore di NB. Dunque, MB che è lo spigolo dell'icosaedro è maggiore di molto rispetto a NB, che è lo spigolo del dodecaedro. – C.D.D.

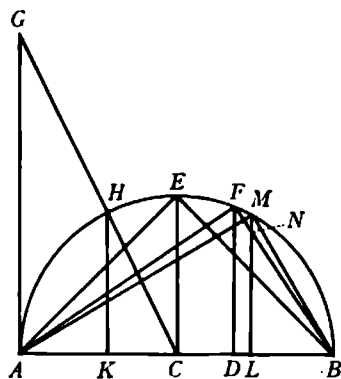
Dico adesso che, oltre alle cinque figure suddette, non può costruirsi nessun'altra figura che sia compresa da poligoni equilateri ed equiangoli, fra loro uguali.

Infatti, non è possibile costruire un angolo solido con due triangoli, o, in generale, con due figure piane (XI, def. XI). Con tre triangoli poi, è costruibile l'angolo (solido) di una piramide (tetraedro), con quattro l'angolo di un ottaedro, e con cinque quello di un icosaedro. Mentre invece con sei triangoli equilateri ed equiangoli, che si incontrino e si congiungano in un punto, non si potrà avere un angolo solido; poiché difatti un angolo di un triangolo equilatero è due terzi di un angolo retto, i sei angoli daranno, sommati, quattro retti – il che è impossibile: difatti ogni angolo solido è compreso da meno di quattro retti (XI, 21). Per la stessa

a. Che la definizione sia qui citata mentre poi, nella medesima prop. 18, si è già adoperata altre volte tacitamente, non risponde molto al più normale procedere euclideo; Heiberg (cfr. XIII, 18, nota apposita) ritiene che da *Ora, poiché...* a *sta al quadrato della seconda* si abbia a che fare con aggiunta estranea al testo genuino.

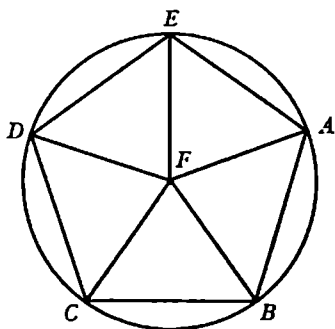
ragione, non può darsi neppure che un angolo solido sia costruibile con più di sei angoli piani. Quanto all'angolo solido del cubo, esso è compreso da tre quadrati; è impossibile invece che lo sia da quattro: difatti, sarebbero di nuovo quattro angoli retti a comprenderlo. Usando poi pentagoni equilateri ed equiangoli, con tre di essi è costruibile l'angolo del dodecaedro, mentre è impossibile lo sia con quattro: poiché l'angolo di un pentagono equilatero è uguale difatti ad un angolo retto più un quinto di esso (cfr. lemma), la somma dei quattro angoli sarebbe in tal caso maggiore di quattro retti – il che è impossibile. E nemmeno potrà darsi che un angolo solido sia compreso da altre figure poligonali, per la medesima assurdità di prima.

Dunque, non è possibile che, oltre alle cinque figure suddette, sia costruibile una qualunque altra figura solida compresa da poligoni equilateri ed equiangoli. – C.D.D.

Applica: I, 47; IV, 15 coroll.; VI, 4, 8, 19 coroll.; XI, 21; XIII, 9, 10, 13, 14, 15, 16, 16 coroll., 17 coroll., il lemma seguente.

Lemma

Va dimostrato poi nel modo seguente che l'angolo di un pentagono equilatero ed equiangolo è uguale ad un angolo retto più un quinto di esso.

Infatti, sia $ABCDE$ un pentagono equilatero ed equiangolo, ad esso si circoscriva il cerchio $ABCDE$ (IV, 14), si prenda il cerchio del cerchio (III, 1), e sia esso F, e si traccino le congiungenti FA, FB, FC, FD, FE. Quindi esse dividono per metà gli angoli del pentagono nei punti A, B, C, D, E (I, 4). Ora, poiché i cinque angoli con vertice in F dànno, se sommati, quattro retti, e sono uguali fra loro,

uno solo di essi, ad esempio l'angolo *AFB*, è uguale [a quattro quinti di angolo retto, cioè] ad un angolo retto meno un quinto. Perciò la somma degli altri angoli *FAB*, *ABF* [del triangolo *AFB*] è uguale ad un retto più un quinto di esso (I, 32). Ma l'angolo *FAB* è uguale all'angolo *FBC*; dunque, tutto quanto l'angolo *ABC* del pentagono è uguale ad un angolo retto più un quinto di esso. – C.D.D.

APPLICA: I, 4, 32; IV, 14.

È APPLICATO IN: XIII, 18.

INDICI

INDICE DELLE TAVOLE

INDICE DEL VOLUME